УДК 517.5

С.С. Ежак[1]

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИОНАЛА, ПОРОЖДЕННОГО ЗАДАЧЕЙ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ НА ПОТЕНЦИАЛ[2]

В статье рассматривается задача минимизации функционала $R[Q,y] = \frac{\int_0^1 y'^2dx - \int_0^1 Q(x)y^2dx}{\int_0^1 y^2dx}$, порожденного задачей Штурма – Лиувилля с краевыми условиями Дирихле и зависящего от параметра интегральным условием на потенциал Q. Задача оценивания точной нижней грани функционала в некоторых классах функций y и Q сводится к оцениванию нелинейного функционала, не содержащего потенциал Q. А исследование этого функционала приводит к нелинейной краевой задаче с параметром. Получены оценки сверху и снизу для $\inf_{y\in H_0^1(0,1)} R[Q,y]$ при различных значениях параметра интегрального условия.

Ключевые слова: вариационная задача, минимизация функционала, задача Штурма – Лиувилля, экстремальные оценки, точная нижняя грань, спектральная теория.

1. Предварительные сведения

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$R[Q,y] = \frac{\int_0^1 y'^2dx - \int_0^1 Q(x)y^2dx}{\int_0^1 y^2dx}. \tag{1.1}$$

в классе функций y из $H_0^1(0,1)$ и $Q(x)$ из A_α, где A_α — множество неотрицательных ограниченных на $[0,1]$ функций, удовлетворяющих условию

$$\int_0^1 Q^\alpha(x)dx = 1, \quad \alpha \neq 0. \tag{1.2}$$

Обозначим

$$m_\alpha = \inf_{Q(x)\in A_\alpha} \inf_{y\in H_0^1(0,1)} R[Q,y], \quad M_\alpha = \sup_{Q(x)\in A_\alpha} \inf_{y\in H_0^1(0,1)} R[Q,y].$$

Ежак Светлана Сергеевна (`svetlana.ezhak@gmail.com`), кафедра высшей математики, Московский государственный университет экономики, статистики и информатики, 119501, Российская Федерация, г. Москва, ул. Нежинская, 7.

[2]Статья подготовлена по докладу конференции ”СамДиф-2015”.

Отметим, что обозначения приняты на основе работ В.А. Кондратьева и Ю.В. Егорова [1; 2]. Метод исследования функционала, используемый в статье, был разработан В.А. Кондратьевым и Ю.В. Егоровым применительно к изучению функционала $R[Q,y]=\frac{\int_0^1 y'^2dx}{\int_0^1 Q(x)y^2dx}$.

2. Основные результаты

Теорема 2.1. Если $\alpha>1$, то $m_\alpha\geqslant\frac{\pi^2}{2}$, $M_\alpha=\pi^2$, причем существуют такие функции $u\in H_0^1(0,1)$ и $Q(x)\in A_\alpha$, что $\inf_{y\in H_0^1(0,1)}R[Q,y]=R[Q,u]=m_\alpha$.

Если $\alpha=1$, то m_1 есть принадлежащее интервалу $(0,\pi^2)$ решение уравнения $2\sqrt{\lambda}=\mathrm{tg}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right)$, $M_1=\pi^2$, причем m_1 достигается на δ-функции $Q(x)=\delta\left(x-\frac{1}{2}\right)$, не принадлежащей множеству A_α.

Если $1/2\leqslant\alpha<1$, то $m_\alpha=-\infty$, $M_\alpha=\pi^2$.

Если $1/3\leqslant\alpha<1/2$, то $m_\alpha=-\infty$, $M_\alpha\leqslant\pi^2$.

Если $0<\alpha<1/3$, то $m_\alpha=-\infty$, $M_\alpha<\pi^2$.

Если $\alpha<0$, то $m_\alpha=-\infty$, $M_\alpha<\pi^2$, причем существуют такие функции $u\in$ $\in H_0^1(0,1)$ и $Q(x)\in A_\alpha$, что $\inf_{y\in H_0^1(0,1)}R[Q,y]=R[Q,u]=M_\alpha$.

Доказательство некоторых результатов.

1. Отметим, что $M_\alpha\leqslant\pi^2$ при любом значении $\alpha\neq0$.

Рассмотрим при $\alpha\neq1$ функционал

$$G[y]=\frac{\int_0^1 y'^2dx-\left(\int_0^1|y|^pdx\right)^{2/p}}{\int_0^1 y^2dx},\quad p=\frac{2\alpha}{\alpha-1}. \tag{2.1}$$

Обозначим $m=C(\alpha)=\inf_{y\in H_0^1(0,1)}G[y]$.

2. Пусть $\alpha>1$. Используя неравенство Гельдера, имеем

$$\int_0^1 Q(x)y^2dx\leqslant\left(\int_0^1 Q^\alpha(x)dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\int_0^1|y|^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}dx\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}},$$

откуда, учитывая (1.2), получим

$$\inf_{y\in H_0^1(0,1)}R[Q,y]\geqslant\inf_{y\in H_0^1(0,1)}G[y]. \tag{2.2}$$

Из (2.2) следует, что $m_\alpha\geqslant m$ при $\alpha>1$.

3. Пусть $\alpha<0$. Используя неравенство Гельдера и условие (1.2), имеем

$$\int_0^1|y|^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}dx\leqslant\left(\int_0^1 Q(x)y^2dx\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\left(\int_0^1 Q^\alpha(x)dx\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

следовательно,

$$\int_0^1 Q(x)y^2dx\geqslant\left(\int_0^1|y|^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}dx\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}.$$

Таким образом,

$$\inf_{y\in H_0^1(0,1)}R[Q,y]\leqslant\inf_{y\in H_0^1(0,1)}G[y]. \tag{2.3}$$

Из (2.3) следует, что $M_\alpha \leqslant m$ при $\alpha < 0$.

Для доказательства равенств $m_\alpha = m$ при $\alpha > 1$ и $M_\alpha = m$ при $\alpha < 0$ используется следующая лемма.

Лемма 2.1. *Пусть* $\alpha > 1$ ($p = \frac{2\alpha}{\alpha-1}, p > 2$) *или* $\alpha < 0$ ($p = \frac{2\alpha}{\alpha-1}, 0 < p < 2$), *и* $m = C(\alpha) = \inf_{y \in H_0^1(0,1)} G[y]$. *Тогда существует положительная функция* $u \in H_0^1(0,1)$, *удовлетворяющая уравнению*

$$u'' + u^{p-1} + mu = 0 \tag{2.4}$$

и условиям

$$u(0) = u(1) = 0, \tag{2.5}$$

$$\int_0^1 u^p dx = 1, \tag{2.6}$$

для которой $m = G[u]$.

Было доказано, что в условиях леммы 2.1 существует единственное значение m, при котором задача (2.4) – (2.5) – (2.6) имеет решение, и это m является решением системы уравнений

$$\begin{cases} \int_0^H \frac{du}{\sqrt{mH^2 - mu^2 + \frac{2}{p}H^p - \frac{2}{p}u^p}} = \frac{1}{2}, \\ \int_0^H \frac{u^p du}{\sqrt{mH^2 - mu^2 + \frac{2}{p}H^p - \frac{2}{p}u^p}} = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

где $H = \max_{x \in [0,1]} u$.

Мы доказываем, что $m_\alpha = m$ при $\alpha > 1$. Имеем $m = G[u]$, где u удовлетворяет уравнению (2.4) и условиям (2.5) – (2.6). С другой стороны,

$$m_\alpha = \inf_{Q(x) \in A_\alpha} \inf_{y \in H_0^1(0,1)} R[Q, y] \geqslant m.$$

Так как $u \in H_0^1(0,1)$ и $u^{\frac{2}{\alpha-1}} \in A_\alpha$, то, подставив эти значения вместо y и $Q(x)$ в функционал $R[Q, y]$, получим $R[u^{\frac{2}{\alpha-1}}, u] = G[u] = m$. Таким образом, указана пара функций $Q(x)$ и y, на которых функционал $R[Q, y]$ принимает значение m. Следовательно, $m_\alpha = m$, $\alpha > 1$.

Аналогично доказывается, что $M_\alpha = m$ при $\alpha < 0$, и можно указать пару функций $Q(x)$ и y, на которых функционал $R[Q, y]$ принимает значение m.

4. Для доказательства $M_\alpha = \pi^2$ при $\alpha > 1$ и $m_\alpha = -\infty$ при $\alpha < 0$ можно построить конкретные функции y из $H_0^1(0,1)$ и $Q(x)$ из A_α.

Замечание 2.1. *Отметим, что в случае* $\alpha > 1$ *и* $\alpha < 0$ *эта задача равносильна задаче о минимальном собственном значении классической задачи Штурма — Лиувилля:*

$$y''(x) + Q(x)y + \lambda y = 0, \;\; y(0) = y(1) = 0$$

с интегральным условием (1.2).

Замечание 2.2. *В случае* $\alpha = 1$ *приведенная задача Штурма — Лиувилля сводится к задаче минимизации функционала:*

$$L[y] = \frac{\int_0^1 y'^2 dx - \max_{x \in [0,1]} y^2}{\int_0^1 y^2 dx}.$$

Замечание 2.3. *Оценки M_α и m_α для случаев $\alpha = 1$ и $0 < \alpha < 1$ опубликованы в* [7].

Литература

[1] Egorov Yu.V., Kondratiev V.A. On Spectral theory of elliptic operators – in Operator theory: Advances and Applications. Basel; Boston: Birkhäser Verlag, 1996. V. 89. P. 1–325.

[2] Егоров Ю.В., Кондратьев В.А. Об оценках первого собственного значения в некоторых задачах Штурма – Лиувилля // УМН. 1996. Т. 51. Вып. 3(309). С. 73–144.

[3] Егоров Ю.В., Кондратьев В.А. Об оценках первого собственного значения задачи Штурма — Лиувилля // УМН. 1984. Т. 39. Вып. 2(236). С. 151-–152.

[4] Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.

[5] Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.

[6] Ежак С.С. Экстремальные оценки минимального собственного значения задачи Штурма — Лиувилля с интегральным условием на потенциал // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. № 6. С. 856.

[7] Ежак С.С. Оценки первого собственного значения задачи Штурма – Лиувилля с условиями Дирихле // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа. М.: ЮНИТИ-ДАНА. 2012. С. 517–559.

[8] Ezhak S.S. On estimates for a the first eigenvalue of the Sturm - Liouville problem with Dirichlet boundary conditions and integral condition // Differential and Difference Equations with Applications, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. New York, 2013. V. 47. P. 387–394.

References

[1] Egorov Yu.V., Kondratiev V.A. On spectral theory of elliptic operators in *Operator theory: Advances and Applications.* Birkhäser Verlag, 1996, Vol. 89, pp. 1–325 [in Russian].

[2] Egorov Yu.V., Kondratiev V.A. Estimates for the first eigenvalue in some Sturm — Liouville problems. *UMN* [Advances of Mathematical Sciences], 1996, Vol. 51, no. 3(309), pp. 73–144 [in Russian].

[3] Egorov Yu.V., Kondratiev V.A. Estimates for the first eigenvalue of the Sturm — Liouville problems. *UMN* [Advances of Mathematical Sciences], 1984, Vol. 39, no. 2(236), pp. 151–152 [in Russian].

[4] Lyusternik L.A., Sobolev V.I. Elements of functional analysis. M., Nauka, 1965 [in Russian].

[5] Mikhlin S.G. Variational methods in mathematical physics. M., Nauka, 1970 [in Russian].

[6] Ezhak S.S. Extremal estimations for the minimum eigenvalue of the Sturm-Liouville problem with limited on potential. *Differents. Uravneniia* [Differential equations]. M., 2004, Vol. 40, № 6, p. 856 [in Russian].

[7] Ezhak S.S. On estimates for the first eigenvalue of the Sturm - Liouville problem with Dirichlet boundary conditions in *Kachestvennye svoistva reshenii differentsial'nykh uravnenii i smezhnye voprosy spektral'nogo analiza* [Qualitative properties of solutions to the differential equations and related topics of spectral analysis]. M., IuNITI-DANA, 2012, pp. 517–559 [in Russian].

[8] Ezhak S.S. On estimates for a the first eigenvalue of the Sturm — Liouville problem with Dirichlet boundary conditions and integral condition. *Differential and Difference Equations with Applications, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics.* Springer New York (New York, N.Y., United States), 2013, Vol. 47, pp. 387–394 [in English].

S.S. Ezhak[3]

ON A MINIMIZATION PROBLEM FOR A FUNCTIONAL GENERATED BY THE STURM – LIOUVILLE PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITION ON THE POTENTIAL

In this article we consider the minimization problem of the functional $R[Q,y] = \frac{\int_0^1 y'^2 dx - \int_0^1 Q(x) y^2 dx}{\int_0^1 y^2 dx}$ generated by a Sturm — Liouville problem with Dirichlet boundary conditions and with an integral condition on the potential. Estimation of the infimum of functional in some class of functions y and $Q(x)$ is reduced to estimation of a nonlinear functional non depending on the potential $Q(x)$. This leads to related parameterized nonlinear boundary value problem. Upper and lower estimates for $\inf_{y \in H_0^1(0,1)} R[Q,y]$ are obtained for different values of parameter.

Key words: variational problem, minimization of a functional, problem of Sturm – Liouville, extremal estimates, infimum, spectral theory.

Статья поступила в редакцию 16/ *VII*/2015.

The article received 16/ *VII*/2015.

[3] *Ezhak Svetlana Sergeevna* (svetlana.ezhak@gmail.com), Department of Higher Mathematics, Moscow State University of Economics, Statistics and Informatics, 7, Nezhinskaya Street, Moscow, 119501, Russian Federation.