УДК 517.925.44

К.М. Дулина, Т.А. Корчемкина[1]

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ТИПА ЭМДЕНА — ФАУЛЕРА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ[2]

Рассматривается дифференциальное уравнение типа Эмдена – Фаулера второго порядка с отрицательным потенциалом $y'' - p\,(x,\,y,\,y')\,|y|^k \operatorname{sgn} y = 0$. Предполагается, что функция $p\,(x,\,y_0,\,y_1)$ положительна, непрерывна по совокупности переменных и липшицева по последним двум аргументам. В случае сингулярной нелинейности $(0 < k < 1)$ решения рассматриваемого уравнения могут иметь особое поведение не только вблизи границ, но и во внутренней точке области определения. Поэтому рассматриваются так называемые максимально продолженные единственным образом решения. Получена асимптотическая классификация всех максимально продолженных решений рассматриваемого уравнения в случае регулярной нелинейности $(k > 1)$ и всех максимально продолженных единственным образом решений уравнения в случае сингулярной нелинейности $(0 < k < 1)$.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка, уравнения типа Эмдена — Фаулера, максимально продолженные решения, максимально продолженные единственным образом решения, асимптотическая классификация, регулярная нелинейность, сингулярная нелинейность.

1. Предварительные сведения

Рассмотрим уравнение типа Эмдена — Фаулера n-го порядка

$$y^{(n)} + p\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)\ |y|^k \operatorname{sgn} y = 0.$$

И.Т. Кигурадзе и Т.А. Чантурией в монографии [1] получена классификация всех максимально продолженных решений уравнения типа Эмдена — Фаулера в случае $n = 2,\ k > 1,\ p = p(x)$.

Дулина Ксения Михайловна (sun-ksi@mail.ru), кафедра дифференциальных уравнений, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 119991, Российская Федерация, г. Москва, ул. Ленинские горы, 1.

Корчемкина Татьяна Александровна (krtaalex@gmail.com), кафедра дифференциальных уравнений, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 119991, Российская Федерация, г. Москва, ул. Ленинские горы, 1.

[2]Статья подготовлена по докладу конференции "СамДиф-2015".

В.А. Кондратьевым и В.А. Никишкиным в работе [2] в случае $n = 2$, $k > 1$, и $p = p(x) < 0$ — достаточно гладкой, для положительных решений рассматриваемого уравнения найдено большее количество членов асимптотики.

И.В. Асташовой в монографии [3] для $n = 3$, $p = p(x)$ и $n = 4$, $p \equiv p_0$ получена асимптотическая классификация всех максимально продолженных решений в случае регулярной нелинейности ($k > 1$). Асимптотическая классификация решений сингулярного уравнения ($0 < k < 1$) приведена в [4; 5] для уравнений третьего и четвертого порядков. В случае сингулярной нелинейности решения рассматриваемого уравнения могут иметь особое поведение не только вблизи границ, но и во внутренней точке области определения. Поэтому мы будем рассматривать так называемые максимально продолженные единственным образом решения, введенные И.В. Асташовой (см. [6]).

Определение 1.1. Решение обыкновенного дифференциального уравнения $y\colon (a, b) \to \mathbb{R}$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ называется *максимально продолженным единственным образом,* если:

1) уравнение не имеет других решений, равных y на некотором подынтервале $(a,\, b)$ и не равных y в некоторой точке из $(a,\, b)$;

2) уравнение либо не имеет решений, определенных на другом интервале, содержащем $(a,\, b)$, и равных y на $(a,\, b)$, либо имеет, по крайней мере, два таких решения, не равных друг другу в точках, сколь угодно близких к границе $(a,\, b)$.

Заметим, что в случае $0 < k < 1$ условия классической теоремы существования и единственности решения задачи Коши для рассматриваемого уравнения не выполняются. Тем не менее, справедливо следующее утверждение:

Теорема 1.1 [3, с. 201]. Пусть функция $p\,(x,\, y_0, \ldots,\, y_{n-1})$ непрерывна по x и липшицева по $y_0,\, \ldots,\, y_{n-1}$. Тогда для любого набора чисел $x_0,\, y_0,\, \ldots,\, y^0_{n-1}$, у которого не все y^0_i равны нулю, соответствующая задача Коши имеет единственное решение.

В настоящей работе рассматривается уравнение следующего вида:

$$y'' - p\,(x,\, y,\, y')\, |y|^k \operatorname{sgn} y = 0, \tag{1}$$

где $k \in (0,\, 1) \cup (1,\, +\infty)$, и $p\,(x,\, y,\, y') > 0$.

В [7] при $k > 1$ показана непрерывная зависимость положения асимптот максимально продолженных решений уравнения (1) от начальных условий, доказано существование максимально продолженных решений уравнения (1) с наперед заданной областью определения.

Для формулировки основных результатов нам понадобится ряд определений.

Определение 1.2. Решение уравнения (1) называется *положительным кнезеровским на интервале* $[x_0;\, +\infty)$, если оно удовлетворяет условиям $y(x) > 0$, $y'(x) < 0$ при $x \geqslant x_0$.

Определение 1.3. Решение уравнения (1) называется *положительным кнезеровским при убывании аргумента на интервале* $(-\infty;\, x_0]$, если оно удовлетворяет условиям $y(x) > 0$, $y'(x) > 0$ при $x \leqslant x_0$.

Определение 1.4. Решение уравнения (1) называется *отрицательным кнезеровским на интервале* $[x_0;\, +\infty)$, если оно удовлетворяет условиям $y(x) < 0$, $y'(x) > 0$ при $x \geqslant x_0$.

Определение 1.5. Решение уравнения (1) называется *отрицательным кнезеровским при убывании аргумента на интервале* $(-\infty;\, x_0]$, если оно удовлетворяет условиям $y(x) < 0$, $y'(x) < 0$ при $x \leqslant x_0$.

Определение 1.6. Пусть $y(x)$ — максимально продолженное единственным образом решение уравнения (1), a — граничная точка его области определения.

Решение $y(x)$ называется *влипающим в нуль в точке a*, если

$$\lim_{x\to a} y(x) = \lim_{x\to a} y'(x) = 0.$$

2. Основные результаты

Введем обозначения

$$\alpha = \frac{2}{k-1}\,,$$

$$C(\tilde p) = \left(\frac{\alpha(\alpha+1)}{\tilde p}\right)^{\frac{1}{k-1}} = \left(\frac{\tilde p(k-1)^2}{2(k+1)}\right)^{\frac{1}{1-k}}.$$

Теорема 2.1. Пусть $k>1$, функция $p(x,\,y_0,\,y_1)$ непрерывна по совокупности переменных, липшицева по последним двум аргументам равномерно по x, удовлетворяет неравенствам

$$0 < m \leqslant p(x,\,y_0,\,y_1) \leqslant M < +\infty \tag{2}$$

и имеет следующие пределы функции:

1) P_+ при $x\to+\infty$, $y_0\to 0$, $y_1\to 0$,

2) P_- при $x\to-\infty$, $y_0\to 0$, $y_1\to 0$,

а также при любом $c\in\mathbb{R}$,

3) P_c^+ при $x\to c$, $y_0\to+\infty$, $y_1\to\pm\infty$,

4) P_c^- при $x\to c$, $y_0\to-\infty$, $y_1\to\pm\infty$.

Тогда все максимально продолженные решения уравнения (1) в соответствии со своим асимптотическим поведением делятся на следующие девять типов:

0. Заданное на всей числовой прямой тривиальное решение $y_0(x)\equiv 0$.

1-2. Заданные на $(b,+\infty)$ положительные и отрицательные кнезеровские решения со степенной асимптотикой вблизи обеих границ области определения:

$$y_1(x) = C(P_b^+)\,(x-b)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x\to b+0,$$
$$y_1(x) = C(P_+)x^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x\to+\infty,$$

и

$$y_2(x) = -C(P_b^-)\,(x-b)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x\to b+0,$$
$$y_2(x) = -C(P_+)x^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x\to+\infty.$$

3-4. Заданные на $(-\infty,a)$ положительные и отрицательные кнезеровские при убывании аргумента решения со степенной асимптотикой вблизи обеих границ области определения:

$$y_3(x) = C(P_a^+)\,(a-x)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x\to a-0,$$
$$y_3(x) = C(P_-)|x|^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x\to-\infty,$$

и

$$y_4(x) = -C(P_a^-)\,(a-x)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x\to a-0,$$
$$y_4(x) = -C(P_-)|x|^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\quad x\to-\infty.$$

5-6. Заданные на (a,b) знакопостоянные решения со степенной асимптотикой вблизи обеих границ области определения:

$$y_5(x) = C(P_a^+)\,(x-a)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x\to a+0,$$

$$y_5(x) = C(P_b^+)\,(b-x)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to b-0,$$

и

$$y_6(x) = -C(P_a^-)\,(x-a)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to a+0,$$
$$y_6(x) = -C(P_b^-)\,(b-x)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to b-0.$$

7-8. Заданные на (a,b) решения со степенной асимптотикой и разными знаками вблизи обеих границ области определения:

$$y_7(x) = C(P_a^+)\,(x-a)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to a+0,$$
$$y_7(x) = -C(P_b^-)\,(b-x)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to b-0,$$

и

$$y_8(x) = -C(P_a^-)\,(x-a)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to a+0,$$
$$y_8(x) = C(P_b^+)\,(b-x)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\ x \to b-0.$$

Теорема 2.2. Пусть $0<k<1$, функция $p(x,\,y_0,\,y_1)$ непрерывна по совокупности переменных, липшицева по последним двум аргументам равномерно по x, удовлетворяет неравенствам (2) и имеет следующие пределы:

1) P_{++} при $x \to +\infty,\ y_0 \to +\infty,\ y_1 \to +\infty$,
2) P_{+-} при $x \to +\infty,\ y_0 \to -\infty,\ y_1 \to -\infty$,
3) P_{-+} при $x \to -\infty,\ y_0 \to +\infty,\ y_1 \to -\infty$,
4) P_{--} при $x \to -\infty,\ y_0 \to -\infty,\ y_1 \to +\infty$,

а также при любом $c \in \mathbb{R}$,

5) P_c при $x \to c,\ y_0 \to 0,\ y_1 \to 0$.

Тогда все максимально продолженные единственным образом решения уравнения (1) в соответствии со своим асимптотическим поведением делятся на следующие восемь типов.

1-2. Заданные на полупрямой $(b,+\infty)$ положительные и отрицательные влипающие в нуль в точке b решения со степенной асимптотикой вблизи обеих границ области определения:

$$y_1(x) = C(P_b)\,(x-b)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\quad x \to b+0,$$
$$y_1(x) = C(P_{++})x^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\quad x \to +\infty,$$

и

$$y_2(x) = -C(P_b)\,(x-b)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\quad x \to b+0,$$
$$y_2(x) = -C(P_{+-})x^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\quad x \to +\infty.$$

3-4. Заданные на полупрямой $(-\infty,a)$ положительные и отрицательные влипающие в нуль в точке a решения со степенной асимптотикой вблизи обеих границ области определения:

$$y_3(x) = C(P_a)\,(a-x)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\quad x \to a-0,$$
$$y_3(x) = C(P_{-+})|x|^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\quad x \to -\infty,$$

и

$$y_4(x) = -C(P_a)\,(a-x)^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\quad x \to a-0,$$
$$y_4(x) = -C(P_{--})|x|^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\quad x \to -\infty.$$

5-6. Заданные на всей числовой прямой знакопостоянные решения со степенной асимптотикой вблизи обеих границ области определения:

$$y_5(x) = C(P_{++})x^{-\alpha}\,(1+o(1))\,,\quad x \to +\infty,$$

$$y_5(x) = C(P_{-+})|x|^{-\alpha}\left(1 + o(1)\right), \quad x \to -\infty,$$

и

$$y_6(x) = -C(P_{+-})x^{-\alpha}\left(1 + o(1)\right), \quad x \to +\infty,$$
$$y_6(x) = -C(P_{--})|x|^{-\alpha}\left(1 + o(1)\right), \quad x \to -\infty.$$

7-8. Заданные на всей числовой прямой решения со степенной асимптотикой и разными знаками вблизи обеих границ области определения:

$$y_7(x) = C(P_{++})x^{-\alpha}\left(1 + o(1)\right), \quad x \to +\infty,$$
$$y_7(x) = -C(P_{--})|x|^{-\alpha}\left(1 + o(1)\right), \quad x \to -\infty,$$

и

$$y_8(x) = -C(P_{+-})x^{-\alpha}\left(1 + o(1)\right), \quad x \to +\infty,$$
$$y_8(x) = C(P_{-+})|x|^{-\alpha}\left(1 + o(1)\right), \quad x \to -\infty.$$

Литература

[1] Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990. 432 с.

[2] Кондратьев В.А., Никишкин В.А. О положительных решениях уравнения $y'' = p(x)y^k$// Некоторые вопросы качественной теории дифференциальных уравнений и теории управления движением. Саранск, 1980. С. 134–141.

[3] Асташова И.В. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа / под ред. И.В. Асташовой. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. С. 22–288.

[4] Astashova I.V. On asymptotic classification of solutions to the singular third- and fourth-order Emden–Fowler Equations // Czech-Georgian Workshop on Boundary Value Problems. Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Czech Republic, 2015. URL: http://users.math.cas.cz/ sremr/wbvp2015/abstracts/astashova.pdf.

[5] Astashova I.V. On existence of quasi-periodic solutions to a nonlinear singular higher-order differential equation and asymptotic classifcation of its solutions for the forth order // International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations (QUALITDE-2014), 2014. URL: http://rmi.tsu.ge/eng/QUALITDE-2014.

[6] Асташова И.В. Об асимптотическом поведении решений нелинейных дифференциальных уравнений с сингулярной нелинейностью // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 11. С. 1551–1552.

[7] Дулина К.М., Корчемкина Т.А. О существовании решений с заданной областью определения уравнений типа Эмдена – Фаулера второго порядка // Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения: сб. науч. тр. М.: МЭСИ, 2014. С. 19–27.

References

[1] Kiguradze I. T., Chanturia T. A. Asymptotic properties of solutions of nonautonomous ordinary differential equations. M., Nauka, 1990, 432 p. [in Russian].

[2] Kondrat'ev V. A., Nikishkin V. A. On the positive solutions of the equation $y'' = = p(x)y^k$ in *Nekotorye voprosy kachestvennoi teorii differentsial'nykh uravnenii i teorii upravleniia dvizheniem* [Some problems of qualitative theory of differential equations and the theory of motion control]. Saransk, 1980, pp. 134–141 [in Russian].

[3] Astashova I. V. Qualitative properties of solutions to quasilinear ordinary differential equations in: *Kachestvennye svoistva reshenii differentsial'nykh uravnenii i smezhnye voprosy spektral'nogo analiza: nauchnoe izdanie pod red. I.V. Astashovoi* [Qualitative properties of solutions to the differential equations and related topics of spectral analysis: scientific edition]. I.V. Astashova (Ed.). M., IuNITI-DANA, 2012, pp. 22–288 [in Russian].

[4] Astashova I. V. On asymptotic classification of solutions to the singular third- and fourth-order Emden–Fowler equations. *Czech-Georgian Workshop on Boundary Value Problems*. Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Czech Republic, 2015. Retrieved from: http://users.math.cas.cz/ sremr/wbvp2015/abstracts/astashova.pdf. [in English].

[5] *Astashova I. V.* On existence of quasi-periodic solutions to the nonlinear singular higher-order differential equation and asymptotic classifcation of its solutions for the forth order. *International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations (QUALITDE-2014)*, 2014. Retrieved from: http://rmi.tsu.ge/eng/QUALITDE-2014 [in English].

[6] Astashova I. V. On the asymptotic behavior of solutions of differential equations with a singular nonlinearity. *Differents. Uravneniia* [Differential equations], 2014, Vol. 50, no. 11, pp. 1551–1552 [in Russian].

[7] Dulina K. M., Korchemkina T. A. On existence of solutions to second-order Emden–Fowler type differential equations with prescribed domain in: *Sbornik trudov minikonferentsii «Kachestvennaia teoriia differentsial'nykh uravnenii i prilozheniia»* [Proceedings of International miniconference "Qualitative theory of differential equations and applications"]. M., MESI, 2014, pp. 19–27 [in Russian].

K.M. Dulina, T.A. Korchemkina[3]

ASYMPTOTIC CLASSIFICATION OF SOLUTIONS TO THE SECOND-ORDER EMDEN – FOWLER TYPE DIFFERENTIAL EQUATION WITH NEGATIVE POTENTIAL

Consider the second-order differential equation of Emden – Fowler type with negative potential $y'' - p\,(x,\, y,\, y')\,|y|^k \operatorname{sgn} y = 0$. The function $p\,(x,\, y,\, y')$ is assumed positive, continuous, and Lipschitz continuous in y, y'. In the case of singular nonlinearity $(0 < k < 1)$ the solutions to above equation can behave in a special way not only near the boundaries of their domains but also near internal points of the domains. This is why a notion of maximally uniquely extended solutions is introduced. Asymptotic classification of non-extensible solutions to above equation in case of regular nonlinearity $(k > 1)$ and classification of maximally uniquely extended solutions to above equation in case of singular nonlinearity $(0 < k < 1)$ are obtained.

Key words: second-order ordinary differential equations, equations of Emden – Fowler type, non-extensible solutions, maximally uniquely extended solutions, asymptotic classification, regular nonlinearity, singular nonlinearity.

Статья поступила в редакцию 8/ *VII*/2015.

The article received 8/ *VII*/2015.

[3] *Dulina Kseniya Mihailovna* (sun-ksi@mail.ru), Department of Differential Equations, Lomonosov Moscow State University, 1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation.

Korchemkina Tatiana Aleksandrovna (krtaalex@gmail.com), Department of Differential Equations, Lomonosov Moscow State University, 1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation.