УДК 517.956.223

Е.В. Бородачева, В.Б. Соколовский[1]

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РИКЬЕРА ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В N-МЕРНОМ ШАРЕ

Для $k+1$-гармонического уравнения в n-мерном шаре найден явный вид решения задачи Рикьера — задачи о нахождении в этом шаре решения этого уравнения по заданным на границе шара значениям искомого решения u и степеней лапласиана от первой до k-й включительно от u.

В первой части приводится точная постановка рассматриваемой задачи, формулируется основной результат (вид решения ее), а также указывается идея его доказательства.

Во второй части вводятся семейства некоторых дифференциальных и интегральных операторов в пространстве гармонических в шаре функций, используемые при доказательстве основного результата; устанавливается ряд свойств этих операторов.

Содержание третьей части составляет доказательство основного результата. Оно основано на использовании свойств операторов, введенных во второй части.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, полигармоническое уравнение, полигармонические функции, бигармоническое уравнение, краевые задачи, задача Рикьера для полигармонического уравнения.

1. Постановка задачи. Формулировка основного результата

Пусть $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство, Δ – n-мерный оператор Лапласа (n-мерный лапласиан), Δ^{k+1} – $(k+1)$-я степень его, определяемая индуктивно: $\Delta^{k+1} = \Delta(\Delta^k)$ $(k \in \mathbb{N})$.

Функцию $u \mid G \to \mathbb{R}$, являющуюся в области $G \subseteq \mathbb{R}^n$ решением уравнения $\Delta^{k+1}u = 0$ $(k \in \mathbb{N})$, называют $(k+1)$-гармонической в G, а это уравнение – полигармоническим, или, точнее, $(k+1)$-гармоническим уравнением. Полигармоническое уравнение и его частные случаи рассматривались в разное время с различных точек зрения многими авторами. Отметим лишь работы [1–9]. Задача Рикьера

Бородачева Елена Валериевна (elsolona@list.ru), кафедра уравнений математической физики, Самарский государственный университет, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Соколовский Валерий Борисович (elsolona@list.ru), кафедра функционального анализа и теории функций, Самарский государственный университет, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

для этого уравнения состоит в нахождении $(k+1)$-гармонической в области G функции по заданным на границе области значениям степеней лапласиана этой функции от нулевой до k-й включительно (за нулевую степень лапласиана принимается тождественный оператор).

Обозначим через Ω открытый шар в $\mathbb{R}^n$ единичного радиуса с центром в точке 0, через S – сферу, ограничивающую его; $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$ – замыкание шара Ω.

В настоящей работе найден явный вид решения в интегральной форме задачи Рикьера

$$\Delta^{k+1} u = 0 \ \text{ в } \Omega; \ \ u = f_0, \Delta u = f_1, \ldots, \Delta^k u = f_k \ \text{ на } S \tag{1}$$

(здесь $\Delta^p u(x)$ в точках $x \in S$ понимается как предел $\lim\limits_{y \to x} \Delta^p u(y), \ \ y \in \Omega$).

Через $h^*(x)$ обозначается далее решение задачи Дирихле $\Delta u = 0$ в Ω, $u = h$ на S;как известно, оно дается интегралом Пуассона.

Основной результат представляет следующая

Теорема. Пусть функции $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_k(x) \in C(S)$. Тогда решение задачи (1) записывается в виде:

$$u(x) = g_0^*(x) - \sum_{i=1}^{k} \frac{(1 - ||x||^2)^i}{4^i \cdot i!} \int\limits_0^1 \rho^{\frac{n}{2}-1} \frac{(\rho-1)^{i-1}}{(i-1)!} g_i^*(\rho x)\, d\rho; \tag{2}$$

здесь $g_k = f_k$, функции g_p с номерами $p = k-1, k-2, \ldots, l$ ($l = [\frac{k+1}{2}]$ – целая часть числа $\frac{k+1}{2}$) вычисляются по функциям $g_k, g_{k-1}, \ldots, g_{p+1}$ с помощью рекуррентных соотношений

$$g_p(x) = f_p(x) + \sum_{i=1}^{k-p} \frac{1}{4^i} \sum_{j=i-1}^{p-1} \frac{A_p^{j+1} A_j^{i-1}}{i!(i-1)!} \int\limits_0^1 \rho^{\frac{n}{2}-1} \frac{(\rho-1)^{i+j}}{(i+j)!} g_{p+i}^*(\rho x)\, d\rho, \tag{3}$$

а функции g_p с номерами $p = l-1, l-2, \ldots, 1$ – с помощью рекуррентных соотношений

$$g_p(x) = f_p(x) + \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{4^i} \sum_{j=i-1}^{p-1} \frac{A_p^{j+1} A_j^{i-1}}{i!(i-1)!} \int\limits_0^1 \rho^{\frac{n}{2}-1} \frac{(\rho-1)^{i+j}}{(i+j)!} g_{p+i}^*(\rho x)\, d\rho, \tag{4}$$

где $A_m^s = \frac{m!}{(m-s)!}$ – число размещений из m элементов по s $(0! = 1)$; за функцию $g_0(x)$ принимаем $f_0(x)$.

Доказательство теоремы состоит в проверке того, что функция (2) удовлетворяет в Ω уравнению задачи (1), а на S – граничным условиям ее. Для вычисления степеней лапласиана от $u(x)$ вводятся дифференциальные и интегральные операторы определенного вида.

2. О некоторых дифференциальных и интегральных операторах в пространстве гармонических функций

Пусть $H(\Omega)$ – линейное пространство гармонических в Ω функций. Нетрудно убедиться, что из гармоничности в Ω функции $h(x)$ следует гармоничность в Ω функции $(h'(x), x) = \sum\limits_{i=1}^{n} h'_i(x) x_i$ (здесь h' – производная функции h как отображения из Ω в $\mathbb{R}$). Поэтому для каждого целого m имеет смысл дифференциальный оператор $D_m \mid H(\Omega) \to H(\Omega)$, задаваемый условием:

$$D_m h = (h^{'}(x), x) + \Big(\frac{n}{2} + m - 1\Big) h(x) \quad \forall \ h(x) \in H(\Omega). \tag{5}$$

Далее, из гармоничности в Ω функции $h(x)$ следует гармоничность в Ω функции

$$\int_0^1 \rho^{\frac{n}{2}-1} \cdot \frac{(\rho-1)^l}{l!} h(\rho x)\, d\rho$$

при каждом целом неотрицательном l. Поэтому для каждого $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ имеет смысл интегральный оператор $J_l \mid H(\Omega) \to H(\Omega)$, задаваемый условием:

$$J_l h(x) = \int_0^1 \rho^{\frac{n}{2}-1} \cdot \frac{(\rho-1)^l}{l!} h(\rho x)\, d\rho \qquad \forall \ h(x) \in H(\Omega). \tag{6}$$

Введем также оператор $J_{-1} \mid H(\Omega) \to H(\Omega)$ условием:

$$J_{-1} h \equiv -h(x) \qquad \forall \ h(x) \in H(\Omega). \tag{7}$$

Замечание. Если $h \in H(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, то $J_l h \in H(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Операторы D_m ($m \in \mathbb{Z}$) и J_l ($l \in \mathbb{N} \cup \{0, -1\}$) обладают рядом любопытных свойств. Для решения задачи (1) используются лишь свойства, выражаемые следующими леммами.

Лемма 1. Пусть $m \in \mathbb{N}$, и $u(x) = (1 - ||x||^2)^m h(x)$, где $h \in H(\Omega)$. Тогда

$$\Delta u = -4m(1 - ||x||^2)^{m-1} D_m h + 4m(m-1)(1 - ||x||^2)^{m-2} h(x). \tag{8}$$

Доказательство проводится непосредственным вычислением лапласиана от $u(x)$. А именно имеем:

$$u_i^{'} = m(1 - ||x||^2)^{m-1}(-2x_i)h(x) + (1 - ||x||^2)^m h_i^{'}(x),$$

$$u_{ii}^{''} = m(m-1)(1 - ||x||^2)^{m-2} 4x_i^2 h(x) - 2m(1 - ||x||^2)^{m-1} h(x) +$$

$$+ m(1 - ||x||^2)^{m-1}(-2x_i)h_i^{'}(x) + m(1 - ||x||^2)^{m-1}(-2x_i)h_i^{'} + (1 - ||x||^2)^m h_{ii}^{''},$$

$$\Delta u = -4m(1 - ||x||^2)^{m-1}(h^{'}(x), x) - 2mn(1 - ||x||^2)^{m-1} h -$$

$$-4m(m-1)(1 - ||x||^2)^{m-2}(1 - ||x||^2 - 1)h(x) =$$

$$= -4m(1 - ||x||^2)^{m-1}((h^{'}, x) + (\frac{n}{2} + m - 1)h) + 4m(m-1)(1 - ||x||^2)^{m-2} h,$$

откуда в силу (5) следует (8), что и требовалось доказать.

Лемма 2. Пусть $h(x) \in H(\Omega)$. Тогда для любого $m \in \mathbb{Z}$ и для любого $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$D_m(J_l h) = -J_{l-1} h + (m - l - 1) J_l h = J_l(D_m h). \tag{9}$$

Доказательство. I. Сначала докажем первое из равенств (9) для $l = 0$. В этом случае в силу (7) оно принимает вид:

$$D_m(J_0 h) = h + (m-1) J_0 h.$$

Чтобы найти $D_m(J_0 h)$, предварительно находим $((J_0 h)^{'}, x)$. Имеем:

$$J_0 h(x) = \int_0^1 \rho^{\frac{n}{2}-1} h(\rho x)\, d\rho,$$

$$((J_0h)', x) = \int_0^1 \rho^{\frac{n}{2}-1}(h'(\rho x), x)\rho\, d\rho = \int_0^1 \rho^{\frac{n}{2}} \frac{d}{d\rho} h(\rho x)\, d\rho = \rho^{\frac{n}{2}} h(\rho x)|_0^1 -$$

$$-\frac{n}{2}\int_0^1 \rho^{\frac{n}{2}-1} h(\rho x)\, d\rho = h(x) - \frac{n}{2} J_0 h.$$

Отсюда, согласно (5), находим:

$$D_m(J_0h) = h(x) - \frac{n}{2}J_0h + \left(\frac{n}{2} + m - 1\right) J_0h = h(x) + (m-1)J_0h,$$

что и требовалось доказать. Аналогично доказывается второе из равенств (9) для $l = 0$.

II. Теперь докажем первое из равенств (9) для $l \geqslant 1$. Имеем в этом случае:

$$J_lh = \int_0^1 \rho^{\frac{n}{2}-1} \frac{(\rho-1)^l}{l!} h(\rho x)\, d\rho,$$

$$((J_lh)', x) = \int_0^1 \rho^{\frac{n}{2}-1} \frac{(\rho-1)^l}{l!} \rho(h'(\rho x), x)\, d\rho = \int_0^1 \rho^{\frac{n}{2}} \frac{(\rho-1)^l}{l!} \frac{d}{d\rho} h(\rho x)\, d\rho =$$

$$= \rho^{\frac{n}{2}} \frac{(\rho-1)^l}{l!} h(\rho x)|_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{n}{2}\rho^{\frac{n}{2}-1} \frac{(\rho-1)^l}{l!} + \rho^{\frac{n}{2}} \frac{(\rho-1)^{l-1}}{(l-1)!}\right) h(\rho x)\, d\rho =$$

$$= -\int_0^1 \rho^{\frac{n}{2}-1} \frac{(\rho-1)^{l-1}}{l!} \left(\frac{n}{2}(\rho-1) + l(\rho-1) + l\right) h(\rho x)\, d\rho =$$

$$= -\left(\frac{n}{2} + l\right) J_lh - J_{l-1}h,$$

$$D_m(J_lh) = ((J_lh)', x) + \left(\frac{n}{2} + m - 1\right) J_lh =$$

$$= -\left(\frac{n}{2} + l\right) J_lh - J_{l-1}h + \left(\frac{n}{2} + m - 1\right) J_lh = -J_{l-1}h + (m-l-1)J_lh.$$

Аналогично доказывается второе из равенств (9) для $l \geqslant 1$. Лемма доказана.

Следствие. Если $h \in H(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, то $D_m(J_lh)$ допускает продолжение по непрерывности на $\bar{\Omega}$.

Пусть $h(x) \in H(\Omega), m \in \mathbb{N}$. Для каждого целого неотрицательного p, не превосходящего m, введем семейство из $p+1$ гармонических в Ω функций $h_0^{m,p}, h_1^{m,p}, \ldots, h_p^{m,p}$ условиями:

$$h_0^{m,p}(x) = J_{m-p-1}h, \tag{10}$$

$$h_i^{m,p}(x) = \sum_{j=i-1}^{p-1} \frac{A_p^{j+1} A_j^{i-1}}{i!(i-1)!} J_{m-p+j}h \qquad (i = \overline{1,p}); \tag{11}$$

здесь $A_m^s = \frac{m!}{(m-s)!}$ – число размещений из m по s. Например, если $m = 1$, то для $p = 0$ это семейство состоит из одной функции $h_0^{1,0} = J_0h$; для $p = 1$ оно состоит из двух функций: $h_0^{1,1} = J_{-1}h = -h$ и $h_1^{1,1} = J_0h$.

Лемма 3. Пусть $m \in \mathbb{N}$. Тогда для каждого целого $p = \overline{0, m-1}$

$$-D_{m-p}h_0^{m,p} = h_0^{m,p+1}, \tag{12}$$

$$-D_{m-p-i}h_i^{m,p} + h_{i-1}^{m,p} = h_i^{m,p+1} \qquad (i = \overline{1,p}), \tag{13}$$

$$h_p^{m,p} = h_{p+1}^{m,p+1}. \tag{14}$$

Доказательство основано на использовании (9):

$$-D_{m-p}h_0^{m,p} = -D_{m-p}(J_{m-p-1}h) = J_{m-p-2}h = h_0^{m,p+1},$$

то есть проверено равенство (12). Равенство (14) следует из (11):

$$h_p^{m,p} = J_{m-1}h \quad \forall \ p = \overline{0,m}.$$

Проверяя равенство (13), рассмотрим его сначала для $i = 1$. В этом случае оно принимает вид:

$$-D_{m-p-1}h_1^{m,p} + h_0^{m,p} = h_1^{m,p+1}.$$

Укажем преобразования, приводящие левую часть этого равенства к правой. Используя (10) и (11), получим:

$$-D_{m-p-1}h_1^{m,p} + h_0^{m,p} = -\sum_{j=0}^{p-1} \frac{A_p^{j+1}A_j^0}{1!0!} D_{m-p-1}(J_{m-p+j}h) + J_{m-p-1}h =$$

$$= \sum_{j=0}^{p-1} \frac{A_p^{j+1}A_j^0}{1!0!} J_{m-p+j-1}h - \sum_{j=0}^{p-1} \frac{A_p^{j+1}A_j^0}{1!0!}(-2-j)J_{m-p+j}h + J_{m-p-1}h =$$

$$= \sum_{j=0}^{p-1} \frac{A_p^{j+1}A_j^0}{1!0!} J_{m-(p+1)+j}h + \sum_{j=0}^{p-1} \frac{A_p^{j+1}A_j^0}{1!0!}(2+j)J_{m-(p+1)+j+1}h + J_{m-(p+1)}h.$$

Располагая слагаемые правой части последнего равенства по возрастанию индекса оператора J, приводим ее к виду:

$$(A_p^1 + 1)J_{m-(p+1)}h + \sum_{j=1}^{p-1}(A_p^{j+1} + A_p^j(1+j))J_{m-(p+1)+j}h + A_p^p(1+p)J_{m-1}h.$$

Используя легко проверяемое тождество $A_p^{j+1} + A_p^j(1+j) = A_{p+1}^{j+1}$, окончательно получаем:

$$-D_{m-p-1}h_1^{m,p} + h_0^{m,p} = A_{p+1}^1 J_{m-(p+1)}h + \sum_{j=1}^{p-1} A_{p+1}^{j+1} J_{m-(p+1)+j}h + A_{p+1}^{p+1} J_{m-1}h =$$

$$= \sum_{j=0}^{p} \frac{A_{p+1}^{j+1}A_j^0}{1!0!} J_{m-(p+1)+j}h,$$

что, согласно (11), и есть $h_1^{m,p+1}$. Тем самым равенство (13) для $i = 1$ доказано.

Теперь проверим (13) для $i > 1$. Преобразования, приводящие левую часть к правой, в этом случае таковы:

$$-D_{m-p-i}h_i^{m,p} + h_{i-1}^{m,p} = -\sum_{j=i-1}^{p-1} \frac{A_p^{j+1}A_j^{i-1}}{i!(i-1)!} D_{m-p-i}(J_{m-p+j}h)+$$

$$+\sum_{j=i-2}^{p-1} \frac{A_p^{j+1}A_j^{i-2}}{(i-1)!(i-2)!} J_{m-p+j}h = \sum_{j=i-1}^{p-1} \frac{A_p^{j+1}A_j^{i-1}}{i!(i-1)!} J_{m-(p+1)+j}h+$$

$$+\sum_{j=i-1}^{p-1} \frac{A_p^{j+1}A_j^{i-1}}{i!(i-1)!}(i+j+1)J_{m-(p+1)+j+1}h + \sum_{j=i-2}^{p-1} \frac{A_p^{j+1}A_j^{i-2}}{(i-1)!(i-2)!} J_{m-(p+1)+j+1}h.$$

Располагая слагаемые правой части последнего равенства по возрастанию индекса оператора J, приведем ее к виду:

$$\left(\frac{A_p^i A_{i-1}^{i-1}}{i!(i-1)!}+\frac{A_p^{i-1}A_{i-2}^{i-2}}{(i-1)!(i-2)!}\right)J_{m-(p+1)+i-1}h+$$

$$+\sum_{j=i}^{p-1}\left(\frac{A_p^{j+1}A_j^{i-1}}{i!(i-1)!}+\frac{A_p^j A_{j-1}^{i-1}}{i!(i-1)!}(i+j)+\frac{A_p^j A_{j-1}^{i-2}}{(i-1)!(i-2)!}\right)J_{m-(p+1)+j}h+$$

$$+\left(\frac{A_p^p A_{p-1}^{i-1}}{i!(i-1)!}(i+p)+\frac{A_p^p A_{p-1}^{i-2}}{(i-1)!(i-2)!}\right)J_{m-(p+1)+p}h.$$

Учитывая устанавливаемые непосредственно тождества

$$\frac{A_p^i}{i!}+\frac{A_p^{i-1}}{(i-1)!}=\frac{A_{p+1}^i}{i!},$$

$$\frac{A_p^{j+1}A_j^{i-1}}{i!(i-1)!}+\frac{A_p^j A_{j-1}^{i-1}}{i!(i-1)!}(i+j)+\frac{A_p^j A_{j-1}^{i-2}}{(i-1)!(i-2)!}=\frac{A_{p+1}^{j+1}A_j^{i-1}}{i!(i-1)!},$$

$$\frac{A_p^p A_{p-1}^{i-1}}{i!(i-1)!}(i+p)+\frac{A_p^p A_{p-1}^{i-2}}{(i-1)!(i-2)!}=\frac{A_{p+1}^{p+1}A_p^{i-1}}{i!(i-1)!},$$

окончательно получим:

$$-D_{m-p-i}h_i^{m,p}+h_{i-1}^{m,p}=\frac{A_{p+1}^i}{i!}J_{m-(p+1)+i-1}h+\sum_{j=i}^{p-1}\frac{A_{p+1}^{j+1}A_j^{i-1}}{i!(i-1)!}J_{m-(p+1)+j}h+$$

$$+\frac{A_{p+1}^{p+1}A_p^{i-1}}{i!(i-1)!}J_{m-(p+1)+p}h=\sum_{j=i-1}^{p}\frac{A_{p+1}^{j+1}A_j^{i-1}}{i!(i-1)!}J_{m-(p+1)+j}h,$$

а это выражение согласно (11) и есть $h_i^{m,p+1}$. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть $m\in\mathbb{N}$, $l=\left[\frac{m+1}{2}\right]$, $h_0^{m,0}=J_{m-1}h$. Тогда p-я степень лапласиана с $p=0,1,\ldots,l-1$ от функции

$$u_m(x)=-\frac{1}{4^m}\cdot\frac{(1-||x||^2)^m}{m!}h_0^{m,0}$$

вычисляется по формуле

$$\Delta^p u_m=-\frac{1}{4^{m-p}}\sum_{i=0}^{p}\frac{(1-||x||^2)^{m-p-i}}{(m-p-i)!}h_i^{m,p}(x). \tag{15}$$

Доказательство. При $p=0$ формула (15) тривиальна для любого $m\in\mathbb{N}$.

Если $m=1$ или $m=2$, то $l-1=0$. В этом случае значений p, для которых $\Delta^p u_m$ вычисляется по (15), только одно: $p=0$, а для него (15), как отмечалось, тривиальна. Следовательно, лемма верна для $m=1$ и $m=2$.

Если $m>2$, то лемма доказывается индукцией по p от 1 до $l-1$.

I. База индукции. Она устанавливается вычислением Δu_m с помощью лемм 1 и 3:

$$\Delta u_m=-\frac{1}{4^m}\left(4m\frac{(1-||x||^2)^{m-1}}{m!}(-D_m h_0^{m,0})+4m(m-1)\frac{(1-||x||^2)^{m-2}}{m!}h_0^{m,0}\right)=$$

$$=-\frac{1}{4^{m-1}}\left(\frac{(1-||x||^2)^{m-1}}{(m-1)!}h_0^{m,1}+\frac{(1-||x||^2)^{m-2}}{(m-2)!}h_1^{m,1}\right),$$

что совпадает с (15) при $p=1$. Тем самым база индукции установлена. Заметим, что отсюда следует также справедливость леммы для $m=3$ и $m=4$.

II. Индуктивный шаг. Допустим, что (15) верна для $p=q$ ($q=\overline{1,l-2}$), и докажем, что тогда она верна и для $p=q+1$. Используя предположение индукции, линейность лапласиана и лемму 1, находим:

$$\Delta^{q+1}u_m = \Delta(\Delta^q u_m) = -\frac{1}{4^{m-q}}\sum_{i=0}^{q}\Delta\left(\frac{(1-||x||^2)^{m-q-i}}{(m-q-i)!}h_i^{m,q}(x)\right) =$$

$$= -\frac{1}{4^{m-q}}\sum_{i=0}^{q}\left(4(m-q-i)\frac{(1-||x||^2)^{m-q-i-1}}{(m-q-i)!}(-D_{m-q-i}h_i^{m,q})+\right.$$

$$\left.+4(m-q-i)(m-q-i-1)\frac{(1-||x||^2)^{m-q-i-2}}{(m-q-i)!}h_i^{m,q}\right).$$

Располагая слагаемые в правой части последнего равенства по убыванию степеней бинома $(1-||x||^2)$, получим:

$$\Delta^{q+1}u_m = -\frac{1}{4^{m-q-1}}\left\{\frac{(1-||x||^2)^{m-q-1}}{(m-q-1)!}(-D_{m-q}h_0^{m,q})+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{q}\frac{(1-||x||^2)^{m-q-1-i}}{(m-q-1-i)!}(-D_{m-q-i}h_i^{m,q}+h_{i-1}^{m,q})+\frac{(1-||x||^2)^{m-2q-2}}{(m-2q-2)!}h_q^{m,q}\right\}.$$

Применяя теперь лемму 3, окончательно будем иметь:

$$\Delta^{q+1}u_m = -\frac{1}{4^{m-q-1}}\left\{\frac{(1-||x||^2)^{m-(q+1)}}{(m-q-1)!}h_0^{m,q+1}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{q}\frac{(1-||x||^2)^{m-(q+1)-i}}{(m-q-1-i)!}h_i^{m,q+1}+\frac{(1-||x||^2)^{m-2q-2}}{(m-2q-2)!}h_{q+1}^{m,q+1}\right\},$$

что совпадает с (15) при $p=q+1$. Таким образом, индуктивный шаг выполним, и, значит, формула (15) верна для всех $p=1,2,\ldots,l-1$.

Лемма доказана.

Следствие. Пусть $h(x)\in H(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ и $p=\overline{0,l-1}$. Тогда на S $\Delta^p u_m = 0$.

Лемма 5. Пусть $m\in\mathbb{N}, l=[\frac{m+1}{2}], h_0^{m,0}=J_{m-1}h$. Тогда p-я степень лапласиана с $p=l,l+1,\ldots,m$ от функции

$$u_m(x) = -\frac{1}{4^m}\cdot\frac{(1-||x||^2)^m}{m!}h_0^{m,0}$$

вычисляется по формуле

$$\Delta^p u_m = -\frac{1}{4^{m-p}}\sum_{i=0}^{m-p}\frac{(1-||x||^2)^{m-p-i}}{(m-p-i)!}h_i^{m,p}(x). \tag{16}$$

Доказательство. Если $m=1$ или $m=2$, то $l=1$. В этом случае утверждение леммы доказывается непосредственным вычислением степеней лапласиана с помощью формул (8), (12), (14). А именно

$$\Delta u_1 = \Delta\left(-\frac{1}{4}(1-||x||^2)h_0^{1,0}\right) = -\frac{1}{4}(4(-D_1h_0^{1,0})) = -h_0^{1,1};$$

это значит, что утверждение леммы выполняется для $m=1$. Далее,

$$\Delta u_2 = \Delta\left(-\frac{1}{4^2}\cdot\frac{(1-||x||^2)^2}{2!}h_0^{2,0}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4^2}\left(4\cdot 2\frac{(1-||x||^2)}{2!}(-D_2 h_0^{2,0}) + 4\cdot 2\frac{1}{2!}h_0^{2,0}\right) = -\frac{1}{4}\left((1-||x||^2)h_0^{2,1} + h_1^{2,1}\right),$$

$$\Delta^2 u_2 = \Delta(\Delta u_2) = -\frac{1}{4}\Delta\left((1-||x||^2)h_0^{2,1} + h_1^{2,1}\right) = -\frac{1}{4}\Delta\left((1-||x||^2)h_0^{2,1}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(-4D_1 h_0^{2,1}\right) = -h_0^{2,2};$$

это значит, что утверждение леммы выполняется для $m = 2$.

Для $m > 2$ и $p = \overline{l, m-1}$ утверждение леммы доказывается индукцией по p от l до $m-1$.

I. База индукции. При $p = l$ формула (16) для $m = 2l$ и $m = 2l-1$ принимает соответственно вид:

$$\Delta^l u_{2l} = -\frac{1}{4^l}\sum_{i=0}^{l}\frac{(1-||x||^2)^{l-i}}{(l-i)!}h_i^{2l,l}(x), \tag{17}$$

$$\Delta^l u_{2l-1} = -\frac{1}{4^{l-1}}\sum_{i=0}^{l-1}\frac{(1-||x||^2)^{l-1-i}}{(l-1-i)!}h_i^{2l-1,l}(x). \tag{18}$$

Используя доказанную для $\Delta^{l-1}u_m$ формулу (15), вычисляем $\Delta^l u_m$ с помощью (8):

$$\Delta^l u_m = \Delta(\Delta^{l-1}u_m) = -\frac{1}{4^{m-l+1}}\sum_{i=0}^{l-1}\Delta\left(\frac{(1-||x||^2)^{m-l+1-i}}{(m-l+1-i)!}h_i^{m,l-1}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4^{m-l+1}}\sum_{i=0}^{l-1}\left(-4(m-l+1-i)\frac{(1-||x||^2)^{m-l-i}}{(m-l+1-i)!}D_{m-l+1-i}h_i^{m,l-1} + \right.$$

$$\left. +4(m-l+1-i)(m-l-i)\frac{(1-||x||^2)^{m-l-i-1}}{(m-l+1-i)!}h_i^{m,l-1}\right).$$

Располагая слагаемые в правой части последнего равенства по убыванию степеней бинома $(1-||x||^2)$, получим:

$$\Delta^l u_m = -\frac{1}{4^{m-l}}\left\{\frac{(1-||x||^2)^{m-l}}{(m-l)!}(-D_{m-l+1}h_0^{m,l-1}) + \right.$$

$$+\sum_{i=1}^{l-1}\frac{(1-||x||^2)^{m-l-i}}{(m-l-i)!}(-D_{m-l+1-i}h_i^{m,l-1} + h_{i-1}^{m,l-1}) +$$

$$\left. +(m-2l+2)(m-2l+1)\frac{(1-||x||^2)^{m-2l}}{(m-2l+2)!}h_{l-1}^{m,l-1}\right\}.$$

Преобразуя полученное выражение с помощью (12)–(14), окончательно находим:

$$\Delta^l u_m = -\frac{1}{4^{m-l}}\left\{\frac{(1-||x||^2)^{m-l}}{(m-l)!}h_0^{m,l} + \sum_{i=1}^{l-1}\frac{(1-||x||^2)^{m-l-i}}{(m-l-i)!}h_i^{m,l} + \right.$$

$$\left. +(m-2l+2)(m-2l+1)\frac{(1-||x||^2)^{m-2l}}{(m-2l+2)!}h_l^{m,l}\right\},$$

что совпадает с (17) для $m = 2l$ и с (18) для $m = 2l-1$.

Тем самым формула (16) для $p = l$ доказана.

II. Индуктивный шаг. Допустим, что формула (16) верна для $p = q$ ($q = \overline{l, m-2}$) и докажем, что тогда она верна и для $p = q+1$. Используя предположение индукции и (8), находим:

$$\Delta^{q+1}u_m = \Delta(\Delta^q u_m) = -\frac{1}{4^{m-q}}\sum_{i=0}^{m-q}\Delta\left(\frac{(1-||x||^2)^{m-q-i}}{(m-q-i)!}h_i^{m,q}(x)\right) =$$

$$= -\frac{1}{4^{m-q}}\sum_{i=0}^{m-q-1}\left(-4(m-q-i)\frac{(1-||x||^2)^{m-q-i-1}}{(m-q-i)!}D_{m-q-i}h_i^{m,q} + \right.$$

$$\left. +4(m-q-i)(m-q-i-1)\frac{(1-||x||^2)^{m-q-i-2}}{(m-q-i)!}h_i^{m,q}\right).$$

Располагая слагаемые в правой части равенства по убыванию степеней бинома $(1-||x||^2)$, получим:

$$\Delta^{q+1}u_m = -\frac{1}{4^{m-q-1}}\left\{\frac{(1-||x||^2)^{m-q-1}}{(m-q-1)!}(-D_{m-q}h_0^{m,q}) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{m-q-1}\frac{(1-||x||^2)^{m-q-1-i}}{(m-q-1-i)!}(-D_{m-q-i}h_i^{m,q} + h_{i-1}^{m,q})\right\}.$$

Преобразуя полученное выражение с помощью (12)–(14), окончательно будем иметь:

$$\Delta^{q+1}u_m = -\frac{1}{4^{m-q-1}}\left\{\frac{(1-||x||^2)^{m-q-1}}{(m-q-1)!}h_0^{m,q+1} + \sum_{i=1}^{m-q-1}\frac{(1-||x||^2)^{m-q-1-i}}{(m-q-1-i)!}h_i^{m,q+1}\right\},$$

что совпадает с (16) при $p = q+1$. Тем самым установлено, что индуктивный шаг выполним, и (16) доказана для $p = \overline{l, m-1}$. Отсюда следует справедливость (16) и для $p = m$:

$$\Delta^m u_m = \Delta(\Delta^{m-1}u_m) = \Delta\left(-\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{1}\frac{(1-||x||^2)^{1-i}}{(1-i)!}h_i^{m,m-1}\right) =$$

$$= \Delta\left(-\frac{1}{4}(1-||x||^2)h_0^{m,m-1}\right) = -\frac{1}{4}\left(-4D_1 h_0^{m,m-1}\right) = -h_0^{m,m}.$$

Лемма доказана.

Следствие 1. Для $p = m$ $\Delta^p u_m = h$ в Ω, для $p > m$ $\Delta^p u_m = 0$ в Ω.

Действительно, согласно (16), $\Delta^m u_m = -h_0^{m,m} = -J_{-1}h = h$ в Ω. Так как $h(x)$ гармоническая в Ω функция, то при $p > m$ $\Delta^p u_m = \Delta^{p-m}(\Delta^m u_m) = \Delta^{p-m}h = 0$ в Ω.

Следствие 2. Пусть $h(x) \in H(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, и $p = \overline{l, m}$. Тогда на S

$$\Delta^p u_m = -\frac{1}{4^{m-p}}h_{m-p}^{m,p}.$$

3. Доказательство основного результата

Покажем, что функция (2) удовлетворяет в Ω уравнению $\Delta^{k+1}u = 0$. Так как $g_0 = f_0$, то эта функция $u(x)$ есть сумма $f_0^*(x)$ и функций

$$u_i(x) = -\frac{1}{4^i}\cdot\frac{(1-||x||^2)^i}{i!}J_{i-1}g_i^* \quad (i = \overline{1, k}).$$

Напомним, что через f^* условились обозначать решение задачи Дирихле $\Delta u = 0$ в Ω, $u = f$ на S; функции g_i^* $(i = \overline{1,k})$ определяются через функции g_i, задаваемые рекуррентными соотношениями (3), (4). Итак, в Ω

$$u(x) = f_0^*(x) + \sum_{i=1}^{k} u_i(x).$$

Учитывая, что по следствию 1 из леммы 5 $\Delta^{k+1}u_i = 0$ в Ω для любого $i = \overline{1,k}$, отсюда находим:

$$\Delta^{k+1}u = \Delta^{k+1}f_0^* + \sum_{i=1}^{k} \Delta^{k+1}u_i = 0 \quad \text{в} \quad \Omega,$$

то есть функция (2) удовлетворяет уравнению задачи (1).

Теперь покажем, что она удовлетворяет и граничным условиям этой задачи. Для этого вычислим $\Delta^p u$ $\forall\ p = \overline{1,k}$. Через l далее будем обозначать целую часть числа $\frac{k+1}{2}$.

1. Случай $p < l$. В этом случае для $i = 2p+1, 2p+2, \dots, k$ $\Delta^p u_i = 0$ на S по следствию из леммы 4. Для $i = 1, \dots, p-1$ $\Delta^p u_i = 0$ в Ω по следствию 1 из леммы 5. Так как для $x \in S$ $\Delta^p u_i(x) = \lim\limits_{y \to x} \Delta^p u_i(y)$ $(y \in \Omega)$, то и на S $\Delta^p u_i = 0$ для $i = 1, \dots, p-1$. Поэтому на S будем иметь:

$$\Delta^p u = \sum_{i=1}^{k} \Delta^p u_i = \sum_{i=p}^{2p} \Delta^p u_i.$$

Для $i = p, p+1, \dots, 2p$, по следствию 2 из леммы 5 на S

$$\Delta^p u_i = -\frac{1}{4^{i-p}} (g_i^*)_{i-p}^{i,p}.$$

Следовательно, на S

$$\Delta^p u = \sum_{i=p}^{2p} \Big(-\frac{1}{4^{i-p}} (g_i^*)_{i-p}^{i,p}\Big) = \sum_{i=0}^{p} \Big(-\frac{1}{4^{i}} (g_{i+p}^*)\Big)_i^{i+p,p} = -(g_p^*)_0^{p,p} - \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{4^i} (g_{i+p}^*)_i^{i+p,p}.$$

Для дальнейшего преобразования полученного выражения используются имеющие место в Ω равенства, полученные с помощью (4), (10) и (11):

$$-(g_p^*)_0^{p,p} = -J_{-1} g_p^* = g_p^* = f_p^* + \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{4^i} \sum_{j=i-1}^{p-1} \frac{A_p^{j+1} A_j^{i-1}}{i!(i-1)!} J_{i+j} g_{p+i}^*,$$

$$(g_{p+i}^*)_i^{i+p,p} = \sum_{j=i-1}^{p-1} \frac{A_p^{j+1} A_j^{i-1}}{i!(i-1)!} J_{i+j} g_{p+i}^*. \tag{19}$$

Так как $g_0^*, \dots, g_k^* \in C(\bar{\Omega})$, то эти равенства имеют место и на S. Поэтому на S

$$\Delta^p u = f_p^* + \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{4^i} (g_{p+i}^*)_i^{i+p,p} - \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{4^i} (g_{p+i}^*)_i^{i+p,p} = f_p^* = f_p.$$

2. Случай $p \geqslant l$. В этом случае по следствию 1 из леммы 5 $\Delta^p u_i = 0$ для $i = 1, \dots, p-1$ в Ω, а, значит, и на S. Поэтому на S

$$\Delta^p u = \sum_{i=1}^{k} \Delta^p u_i = \sum_{i=p}^{k} \Delta^p u_i.$$

Но для $i = p, p+1, p+2, \ldots, k$ по следствию 2 из леммы 5 на S

$$\Delta^p u_i = -\frac{1}{4^{i-p}} (g_i^*)_{i-p}^{i,p}.$$

Следовательно, на S

$$\Delta^p u = \sum_{i=p}^{k} \left(-\frac{1}{4^{i-p}} (g_i^*)_{i-p}^{i,p} \right) = -\sum_{i=0}^{k-p} \frac{1}{4^i} (g_{i+p}^*)_i^{i+p,p} = -(g_p^*)_0^{p,p} - \sum_{i=1}^{k-p} \frac{1}{4^i} (g_{p+i}^*)_i^{i+p,p}.$$

Далее используется вытекающее из (3), (10) равенство

$$-(g_p^*)_0^{p,p} = -J_{-1} g_p^* = g_p^* = f_p^* + \sum_{i=1}^{k-p} \frac{1}{4^i} \sum_{j=i-1}^{p-1} \frac{A_p^{j+1} A_j^{i-1}}{i!(i-1)!} J_{i+j} g_{p+i}^*,$$

а также равенство (19), вытекающее из (11). С их помощью находим на S :

$$\Delta^p u = f_p^* + \sum_{i=1}^{k-p} \frac{1}{4^i} (g_{p+i}^*)_i^{i+p,p} - \sum_{i=1}^{k-p} \frac{1}{4^i} (g_{p+i}^*)_i^{i+p,p} = f_p^* = f_p.$$

Тем самым доказано, что $\Delta^p u = f_p$ на S при каждом $p = \overline{1,k}$; равенство $u(x) = f_0(x)$ на S очевидно. Следовательно, функция (2) удовлетворяет граничным условиям задачи (1). Теорема доказана.

Замечание 1. Найденное решение $u(x)$ задачи (1) принадлежит классу $\Delta_k(\bar{\Omega})$ функций $v(x)$ таких, что $v, \Delta v, \ldots, \Delta^k v \in C(\bar{\Omega})$. Действительно, из (2) видно, что оно представлено в виде линейной комбинации функций

$$(1 - ||x||^2)^i J_j g_p^* \ \ (i = \overline{0,k}, \ \ j = \overline{-1, k-1}, \ \ p = \overline{0,k}).$$

В силу лемм 1 и 2 степени лапласиана от первой до k-й включительно от $u(x)$ также представимы в виде линейной комбинации этих функций. Из принадлежности функций $f_0, f_1, \ldots, f_k$ классу $C(S)$ следует принадлежность классу $C(\bar{\Omega})$ функций $f_0^*, \ldots, f_0^*$, что влечет принадлежность классу $C(\bar{\Omega})$ функций g_p^* $(p = \overline{0,k})$ и, значит, принадлежность классу $C(\bar{\Omega})$ функций $J_j g_p^*$ $(j = \overline{-1, k-1}, \ p = \overline{0,k})$. Отсюда и следует, что $u, \Delta u, \ldots, \Delta^k u \in C(\bar{\Omega})$.

Аналогично устанавливается, что если $f_0, f_1, \ldots, f_k \in C^{l,\alpha}(S)$ $(l \geqslant 2, 0 < \alpha \leqslant 1)$, то решение (2) задачи (1) принадлежит классу $\Delta_k^{l,\alpha}(\bar{\Omega})$ функций $v(x)$ таких, что $v, \Delta v, \ldots, \Delta^k v \in C^{l,\alpha}(\bar{\Omega})$.

Замечание 2. Нетрудно доказать, что найденное решение (2) задачи (1) — единственное в классе $\Delta_k(\bar{\Omega})$. Для этого, очевидно, достаточно доказать, что единственным в этом классе решением однородной задачи

$$\Delta^{k+1} u = 0 \ \text{ в } \Omega; \ \ u = 0, \Delta u = 0, \ldots, \Delta^k u = 0 \ \text{ на } S \tag{20}$$

является функция, тождественно равная 0 в $\bar{\Omega}$. Это можно установить индукцией по k.

Пусть $u_0(x) \in \Delta_1(\bar{\Omega})$ — решение задачи (20) с $k = 1$. Тогда $v_0 = \Delta u_0 \in C(\bar{\Omega})$ — решение задачи Дирихле $\Delta v = 0$ в Ω; $v = 0$ на S. Поэтому $v_0(x) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$. Это значит, что u_0 — решение задачи Дирихле $\Delta u = 0$ в Ω; $u = 0$ на S. Следовательно, $u_0(x) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$. Допустим теперь, что единственным в классе $\Delta_p(\bar{\Omega})$ решением задачи (20) с $k = p$ является функция, тождественно равная нулю в $\bar{\Omega}$, и пусть $u_0(x) \in \Delta_{p+1}(\bar{\Omega})$ — решение задачи (20) с $k = p+1$. Тогда $v_0 = \Delta^{p+1} u_0 \in C(\bar{\Omega})$ — решение задачи Дирихле $\Delta v = 0$ в Ω, $v = 0$ на S. Поэтому $v_0 \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$. Следовательно, u_0 — решение из класса $\Delta_p(\bar{\Omega})$ задачи (20) с $k = p$. В силу предположения индукции тогда $u_0(x) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$.

Литература

[1] Nicolesco M. Les fonctions polyharmoniques. P., 1936.

[2] Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М.; Л. 1948. 296 с.

[3] Дезин А.А. Вторая краевая задача для полигармонического уравнения в пространстве $W_2^{(m)}$ // Доклады АН СССР. 1954. Т. 96. № 5. С. 901–903.

[4] Бицадзе А.В. О некоторых свойствах полигармонических функций // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24. № 5. С. 825–831.

[5] Карачик В.В. Об одной задаче для полигармонического уравнения в шаре // Сибирский математический журнал. 1991. Т. 32. № 5. С. 51–58.

[6] Mouctafa K. Damlakhi. Riquier problem in a biharmonic space // Tamkang Journal of mathematics. 2003. V. 34. № 2. P. 99–104.

[7] Карачик В.В. Решение задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре // Вестник Национального исследовательского ядерного университета МИФИ. 2014. 3:6. С. 649–655.

[8] Карачик В.В. Построение полиномиальных решений задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре // Журнал вычислительной и математической физики. 2014. 54:7. С. 1149–1170.

[9] Гулящих И.А. Задача Неймана для полигармонического уравнения в единичном шаре // Вестн. Южно-Урал. ун-та. Сер.: Матем. Мех. Физ. 2015. 7:2. С. 70–72.

References

[1] Nicolesco M. Les fonctions polyharmoniques. P., 1936 [in French].

[2] Vekua I.N. New methods for solving elliptic equations. M.-L., 1948, 296 p. [in Russian].

[3] Dezin A.A. Second boundary value problem for a polyharmonic equation in the space of $W_2^{(m)}$. *Doklady AN SSSR* [Reports of the Academy of Sciences of the USSR], 1954, Vol. 96, no. 5, pp. 901–903 [in Russian].

[4] Bitsadze A.V. On some properties of polyharmonic functions. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential equations], 1988, Vol.24, no. 5, pp. 825–831 [in Russian].

[5] Karachik V.V. On a problem for polyharmonic equation in a ball. *Sibirskii matematicheskii zhurnal* [Siberian Mathematical Journal], 1991, Vol. 32, no. 5, pp. 51–58 [in Russian].

[6] Mouctafa K. Damlakhi. Riquier problem in a biharmonic space. *Tamkang Journal of mathematics*, 2003, Vol. 34, no. 2, pp. 99–104 [in English].

[7] Karachik V.V. Solution of the Dirichlet problem for polyharmonic equation in a ball. *Vestnik Natsional'nogo issledovatel'skogo iadernogo universiteta "MIFI"* [Bulletin of the National Nuclear Research University "MEPhI"], 3:6 (2014), pp. 649–655 [in Russian].

[8] Karachik V.V. Construction of polynomial solutions of the Dirichlet problem for polyharmonic equations in a ball. *Zhurnal vychislitel'noi i matematicheskoi fiziki* [Journal of computational and mathematical physics], 54:7 (2014), pp. 1149–1170 [in Russian].

[9] Gulayshih I.A. Neumann problem for a polyharmonic equation in unit ball. *Vestn. Iuzhno-Ur. un-ta. Ser. Matem. Mekh. Fiz.* [Vestnik of South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics], 2015, 7:2, pp. 70–72 [in Russian].

E.V. Borodacheva, V.B. Sokolovskiy[2]

INTEGRAL REPRESENTATIONS OF SOLUTIONS OF RIQUIER FOR POLYHARMONIC EQUATIONS IN N-DIMENSIONAL BALL

The solution of Riquier's problem — the problem of finding in n-dimensional ball of solving $k+1$ - harmonic equation for given values on the boundary of the desired solution u and powers of the Laplacian from one to k inclusive of this decision is obtained. The first part provides an exact statement of the problem, the main result (form of the solution of it), and the idea of this proof is stated. The second part introduces a family of some differential and integral operators in the space of harmonic functions in the ball used in the proof of the main result; some properties of these operators are set. The content of the third part is the proof of the main result. It is based on the properties of operators introduced in the second part.

Key words: differential equations, polyharmonic equation, polyharmonic functions, biharmonic equation, boundary value problems, the problem of Riquier for a polyharmonic equation.

Статья поступила в редакцию 28/ V/2015.

The article received 28/ V/2015.

[2]*Borodacheva Elena Valerievna* (elsolona@list.ru), Department of Equations of Mathematical Physics, Samara State University, 1, Acad. Pavlov Street, Samara, 443011, Russian Federation.

Sokolovskiy Valeriy Borisovich (elsolona@list.ru), Department of Functional Analysis and the Theory of Functions, Samara State University, 1, Acad. Pavlov Street, Samara, 443011, Russian Federation.