УДК 517.925.54

Д.А. Безухов[1]

ОЦЕНКИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ НЕТРИВИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ[2]

В работе рассматриваются дифференциальные уравнения

$$y^{[n]} = r_n(x)\frac{d}{dx}\left(r_{n-1}(x)\frac{d}{dx}\left(\dots\left(r_0(x)y\right)\right)\dots\right) = (-1)^n p(x)|y|^k$$

и

$$y^{(n)} = (-1)^n p(x)|y|^k$$

с неотрицательной степенной нелинейностью. Рассматриваются правильные решения — решения, определенные в окрестности плюс бесконечности. Приведено интегральное соотношение для правильных решений уравнения. Доказана ограниченность сверху степенной функцией для правильных решений уравнения с квазипроизводной с максимальным интервалом существования на положительной полуоси, а также их квазипроизводных. Доказана ограниченность сверху и снизу степенными функциями для правильных решений уравнения с производной с максимальным интервалом существования на положительной полуоси, а также их производных.

Ключевые слова: уравнение типа Эмдена – Фаулера, оценки решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, квазипроизводная.

1. Предварительные сведения

В данной работе рассматриваются уравнения

$$r_n(x)\frac{d}{dx}\left(r_{n-1}(x)\frac{d}{dx}\left(\dots\left(r_0(x)y\right)\right)\dots\right) = (-1)^n p(x)|y|^k \tag{1}$$

и

$$y^{(n)} = (-1)^n p(x)|y|^k, \tag{2}$$

где $n > 1,\ k > 1$, непрерывная функция $p(x)$ удовлетворяет условиям

$$m_* x^\sigma \leqslant p(x) \leqslant m^* x^\sigma,\ \ \sigma \geqslant 0,\ \ 0 < m_* < m^* < \infty,$$

Безухов Дмитрий Александрович (`bezukhov_da@mail.ru`), кафедра дифференциальных уравнений, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 119991, Российская Федерация, г. Москва, ул. Ленинские горы, 1.

[2]Статья подготовлена по докладу конференции "СамДиф-2015".

а непрерывные функции $r_j(x)$ — условиям

$$0 < m_j \leqslant r_j(x) \leqslant M_j < +\infty, \;\; j = 0, \ldots, n.$$

Обозначим j-ю квазипроизводную функции $y(x)$ как

$$y^{[j]}(x) = r_j(x)\frac{d}{dx}\left(r_{j-1}(x)\frac{d}{dx}\left(\ldots\frac{d}{dx}\left(r_0(x)y\right)\right)\ldots\right),$$

а также введем обозначения

$$\alpha = \frac{n}{k-1}, \;\; \beta = \frac{\sigma}{k-1}.$$

Тогда уравнение (1) можно переписать в виде

$$y^{[n]} = (-1)^n p(x)|y|^k. \tag{1'}$$

В работах [1; 2] рассматривалось уравнение типа Эмдена–Фаулера, то есть уравнение вида:

$$y^{(n)} = p(x)|y|^k \operatorname{sign} y,$$

для которого были получены оценки решений. При этом в работе [1] предполагалось, что $\sigma = 0$, в работе [2] предполагалось, что $\sigma < -k(n-1)-1$.

В монографии [3] рассматривалось уравнение типа Эмдена–Фаулера с младшими производными с $\sigma \leqslant 0$:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = p(x)|y|^k \operatorname{sign} y,$$

для коротого были получены оценки решений и всех его производных.

Уравнение (2) рассматривалось в работе [4] в предположении, что $p(x) \equiv 1$.

Дадим определения.

Определение 1.1. Решения $y(x)$ уравнений (1) и (2) называются *правильными*, если они определены в некоторой окрестности плюс бесконечности.

Определение 1.2. Решение $y(x)$ уравнения (1) называется *квазикнезеровским*, если для любого $j = 0, \ldots, n-1$ верно $(-1)^j y^{[j]}(x) \geqslant 0$. Решение уравнения (2) называется *кнезеровским*, если, соответственно, для любого $j = 0, \ldots, n-1$ верно $(-1)^j y^{(j)}(x) \geqslant 0$.

2. Основные результаты

Приведем основные результаты для решений уравнения (1).

Теорема 2.1. Если $y(x)$ — правильное решение уравнения (1), то оно является квазикнезеровским и вместе со всеми своими квазипроизводными до $(n-1)$-го порядка включительно стремится к нулю при $x \to +\infty$.

С помощью теоремы 2.1 доказывается следующая лемма.

Основная лемма. Если $y(x)$ — правильное решение уравнения (1), то для него выполнено интегральное соотношение

$$y(x) = \frac{1}{r_0(x)}\int\limits_x^{+\infty}\frac{p(\xi)|y(\xi)|^k}{r_n(\xi)}\varphi_1(x,\xi)d\xi, \tag{3}$$

где $\varphi_i(x,\xi) = \int\limits_x^{\xi}\frac{\varphi_{i+1}(\xi_i,\xi)d\xi_i}{r_i(\xi_i)}$, $i = 1, \ldots n-1$, а $\varphi_n(x,\xi) \equiv 1$.

Далее с использованием интегрального представления (3) доказываются оценки для решений уравнения (1) и их квазипроизводных.

Теорема 2.2. Существуют такие положительные константы

$$C_0 = C_0(n, k, m_*, \sigma, M_0, \dots, M_n),\ C_j = C_j(n, k, m_*, m^*, \sigma, m_0, \dots, m_j, M_0, \dots, M_n),$$

$j = 1, \dots, n-1$ и $C = C(n, k, m_*, \sigma, m_0, M_0, \dots, M_n)$, что для любого положительного решения $y(x)$ уравнения (1) с максимальным интервалом существования $(0; +\infty)$ выполнены неравенства

$$(-1)^j y^{[j]}(x) \leqslant C_j x^{-\alpha-\beta-j},\ \ j = 0, 1, \dots n-1, \tag{4}$$

$$y(x) \leqslant C x^{-\alpha-\beta}. \tag{5}$$

Перейдем теперь к рассмотрению решений уравнения (2). Уравнение (2) получается из уравнения (1), если для любого j верно $r_j(x) \equiv 1$. Из теоремы 2.1 следует, что если $y(x)$ — правильное нетривиальное решение уравнения (2), то оно является кнезеровским и вместе со всеми своими производными до $(n-1)$-го порядка включительно стремится к нулю при $x \to +\infty$. Из основной леммы следует, что $y(x)$ удовлетворяет интегральному соотношению

$$y(x) = \int\limits_x^{+\infty} \frac{(\xi - x)^{n-1}}{(n-1)!} p(\xi) |y(\xi)|^k d\xi.$$

Для решений уравнения (2) доказана следующая теорема.

Теорема 2.3. Существуют такие положительные константы

$$C_{1j} = C_{1j}(n, k, m_*, m^*, \sigma), \quad C_{2j} = C_{2j}(n, k, m_*, m^*, \sigma), \quad j = 0, 1, \dots n-1,$$

что для любого положительного решения $y(x)$ уравнения (2) с максимальным интервалом существования $(0; +\infty)$ выполнены неравенства

$$C_{1j} x^{-\alpha-\beta-j} \leqslant (-1)^j y^{(j)}(x) \leqslant C_{2j} x^{-\alpha-\beta-j},\ \ j = 0, 1, \dots n-1. \tag{6}$$

Литература

[1] Кондратьев В.А., Самовол В.С. О некоторых асимптотических свойствах решений уравнения типа Эмдена – Фаулера // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 4. С. 749–750.

[2] Квиникадзе Г.Г. О сингулярных решениях нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Доклады семинара ИПМ имени И.Н. Векуа. 1983. Т. 17. С. 36–49.

[3] Асташова И.В. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа / под ред. И.В. Асташовой. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. С. 22–288.

[4] Kozlov V.A. On Kneser solutions of higher order nonlinear ordinary differential equations // Ark. Mat. 1999. V. 37. № 2. P. 305–322.

References

[1] Kondratiev V.A., Samovol V. S. On some asymptotic properties of solutions for the Emden-Fowler type equations. *Differents. uravneniia* [Differential equations], 1981, Vol. 17, No. 4, pp. 749-750 [in Russian].

[2] Kvinikadze G.G. On singular solutions to nonlinear ordinary differential equations in *Doklady seminara IPM imeni I.N. Vekua* [Proceedings of the Institute of Applied Mathematics named after I.N. Vekua seminar]. Tbilisi, TSU, 1983, Vol.17, pp. 36-49 [in Russian].

[3] Astashova I.V. Qualitative properties of solutions to quasilinear ordinary differential equations in: *Kachestvennye svoistva reshenii differentsial'nykh uravnenii i smezhnye voprosy spektral'nogo analiza: nauchnoe izdanie pod red. I.V. Astashovoi* [Qualitative properties of solutions to differential equations and related topics of spectral analysis: scientific edition]. I.V. Astashkina (Ed.) M., UNITY-DANA, 2012, pp. 22–290 [in Russian].

[4] Kozlov V.A. On Kneser solutions of higher order nonlinear ordinary differential equations. *Ark. Mat.*, 1999, Vol. 37, No. 2, p. 305-322 [in English].

D.A. Bezukhov[3]

ESTIMATES OF POSITIVE NONTRIVIAL SOLUTIONS OF A DIFFERENTIAL EQUATION WITH POWER NONLINEARITY

Differential equations

$$y^{[n]} = r_n(x)\frac{d}{dx}\left(r_{n-1}(x)\frac{d}{dx}\left(\ldots\left(r_0(x)y\right)\right)\ldots\right) = (-1)^n p(x)|y|^k$$

and

$$y^{(n)} = (-1)^n p(x)|y|^k$$

with power nonlinearity are considered. Solutions which are defined in some neighborhood of plus infinity are called proper solutions. It is proved that proper solution to the equation is kneser solution, which means that solution and it's quasiderivatives change their signs and tend to zero. The integral representation for proper solutions is proved. Upper estimates for solution and it's quasiderivatives for proper solutions with maximal interval of existence is positive semiaxis to the equation with quasiderivative are proved. Upper and lower estimates of solution and it's derivatives for proper solutions with maximal interval of existence is positive semiaxis to the equation with derivative are proved.

Key words: Emden — Fowler equation, estimates of solutions to the nonlinear defferential equation, quasiderivative.

Статья поступила в редакцию 8/*VII*/2015.

The article received 8/*VII*/2015.

[3] *Bezukhov Dmitry Aleksandrovich* (bezukhov_da@mail.ru), Department of Differential Equations, Lomonosov Moscow State University, 1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation.