

В.В. Зайцев, И.В. Стулов, А.Н. Шилин¹

СУБГАРМОНИЧЕСКАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ АВТОКОЛЕБАНИЙ В ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ

Исследованы автоколебания в системе, осциллирующей в дискретном времени и находящейся под действием внешнего гармонического сигнала. В качестве объекта выбрано предложенное ранее авторами дискретное отображение осциллятора Ван дер Поля. Режимы синхронизации автоколебаний исследованы методами численного эксперимента, гармонического баланса и медленно меняющихся амплитуд. Установлено, что эффект субгармонической синхронизации в дискретном времени можно реализовать при произвольном отношении частот свободных автоколебаний и внешнего сигнала.

Ключевые слова: автоколебательная система, дискретное время, подмена частот, синхронизация, захват частоты.

1. Предварительные сведения

В физике колебаний известно явление субгармонической синхронизации (субгармонического захвата) [1]. Оно возникает при воздействии на автоколебательную систему с частотой свободных автоколебаний Ω_0 внешнего гармонического сигнала с частотой Ω_s , лежащей в окрестности $M\Omega_0$, где M — целое число. При выполнении определенных условий автоколебания меняют свою частоту Ω_0 на частоту $\Omega_a = \Omega_s/M$, т. е. происходит захват частоты автоколебаний. Механизм захвата — это взаимодействие между вынужденными колебаниями с частотой внешнего воздействия и гармониками автоколебаний [1].

В настоящем сообщении показано, что это же явление в системах, осциллирующих в дискретном времени, имеет свою специфику, обусловленную эффектом подмены частот (наложения). Эффект имеет место для гармоник автоколебаний, не удовлетворяющих теореме Котельникова. Они воспринимаются автоколебательной системой как подмененные [2]. Частота ω' подмененной гармоники с номером M определяется выражением

$$\Omega' = F_t(M\Omega_a - \text{floor}(M\Omega_a)), F_t(\Omega) = \begin{cases} \Omega, & 0 \leq \Omega < 0.5 \\ 1 - \Omega, & 0.5 \leq \Omega < 1 \end{cases}, \quad (1)$$

¹© Зайцев В.В., Стулов И.В., Шилин А.Н., 2015

Зайцев Валерий Васильевич (zaitsev@ssu.samara.ru), Стулов Игорь Валерьевич (stulov@mail.ru), кафедра радиоп физики и полупроводниковой микро- и нанoeлектроники, Самарский государственный университет, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Шилин Александр Николаевич (Shilax@yandex.ru), АО "РКЦ"Прогресс", 443009, Российская Федерация, г. Самара, ул. Земена, 18.

где $\Omega' = \omega'/\omega_d$, $\Omega_a = \omega_a/\omega_d$, ω_a — частота автоколебаний, ω_d — частота дискретизации. В результате такой подмены субгармонический захват может наблюдаться и для частот, не находящихся в целочисленном отношении с частотой свободных автоколебаний. Эффект с участием подменной M -й гармоники имеет место для автоколебаний с частотами $\Omega_a > 1/2M$. На более низких частотах имеет место классический вариант субгармонической синхронизации.

2. Численный эксперимент с дискретным осциллятором Ван дер Поля

Для демонстрации субгармонической синхронизации в дискретном времени используем дискретное отображение осциллятора Ван дер Поля вида [3; 4]

$$y[n] - 2\alpha \cos(2\pi\Omega_0)y[n-1] + \alpha^2 y[n-2] = \gamma F(y[n-1], y[n-2]) + x[n-1]. \quad (2)$$

Здесь Ω_0 — нормированная на частоту дискретизации собственная частота линейного контура аналогового прототипа, $\gamma > 0$ — параметр глубины положительной обратной связи, α — параметр диссипации, связанный добротностью Q прототипа: $\alpha = \exp(-\pi\Omega_0/Q)$. Внешнее гармоническое воздействие на осциллятор

$$x[n] = E \cos(2\pi\Omega_s n)$$

характеризуется амплитудой и нормированной частотой Ω_s . Функция кубической нелинейности в правой части отображения (2) имеет вид

$$F(y[n-1], y[n-2]) = \cos(2\pi\Omega_0)g(y[n-1]) - g(y[n-2]), g(y) = y - y^3/3.$$

При превышении параметром γ порога самовозбуждения $\gamma_{st} = 1 - \alpha^2$ ДВ-осцилля-

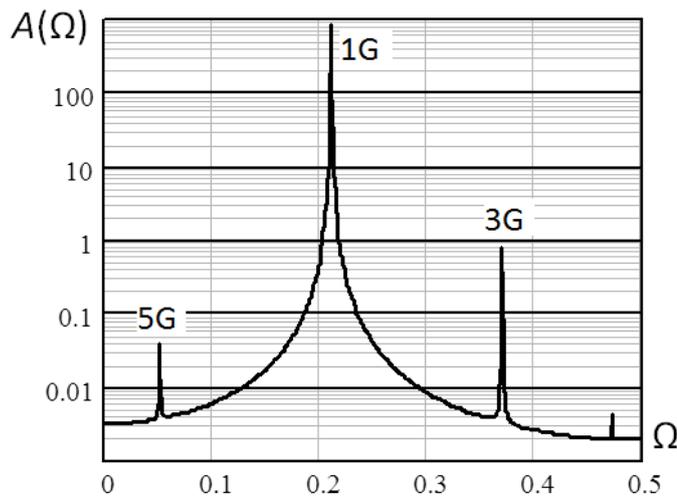


Рис. 1. Амплитудный спектр автоколебаний

тор (2) генерирует свободные автоколебания $y[n]$ с амплитудным спектром $A(\Omega)$, изображенным на рис. 1 (для $\Omega_0 = 0.21$, $Q = 20$ и $\gamma = 0.15$). При частоте автоколебаний $\Omega_a = 0.21$ спектральные линии подменных третьей (3G) и пятой

(5G) гармоник в полном соответствии с формулой (1) расположены на частотах $\Omega'_3 = 0.37$ и $\Omega'_5 = 0.05$.

Приведенные ниже рисунки отображают результаты численного эксперимента в дискретной автоколебательной системе с параметрами $\Omega_0 = 0.21$, $Q = 20$ и $\gamma = 0.15$. Подменная частота третьей гармоники в этом случае $\Omega'_3 = 0.37$. Значение амплитуды сигнала синхронизации фиксировано $E = 0.25$, а его частота Ω_s медленно возрастает в диапазоне $\Omega_L < \Omega_s < \Omega_H$, содержащем Ω'_3 . Генерируемый сигнал подвергнут полосовой фильтрации на центральной частоте Ω_0 , и затем методом аналитического сигнала выделены огибающая и фаза основной гармоники автоколебаний. Полученные таким образом частото-частотная и амплитудно-

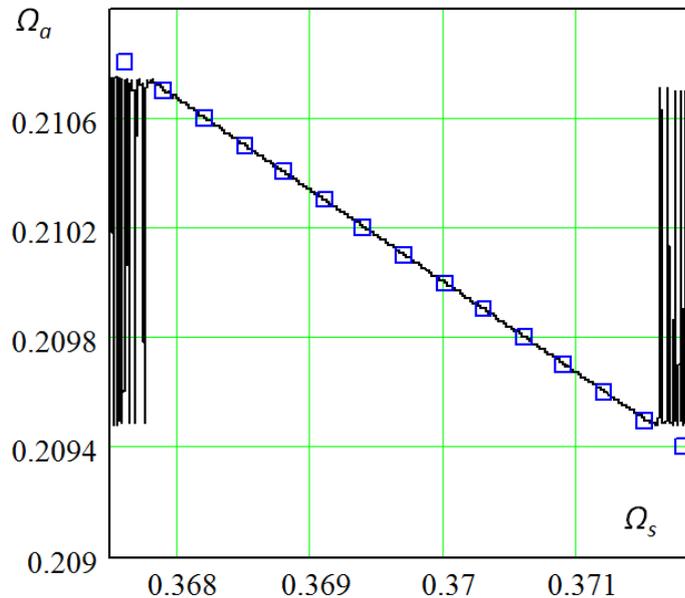


Рис. 2. Частото-частотная характеристика

частотная характеристики показаны на рис. 2 и 3 непрерывными линиями. В центре характеристик расположена область захвата частоты, а по краям — области биений. В целом характеристики типичны для явления захвата частоты. Но они зеркальны по отношению к характеристикам захвата на основном тоне.

3. Статические характеристики субгармонического захвата частоты

Детали механизма захвата частоты в исследуемой системе можно выяснить, записав установившееся решение разностного уравнения (2) в виде суммы

$$y[n] = y_a[n] + y_s[n]. \quad (3)$$

Здесь первое слагаемое

$$y_a[n] = \frac{1}{2} A \exp(j2\pi\Omega_a n) + k.c. = \frac{1}{2} A Z_a^n + k.c.$$

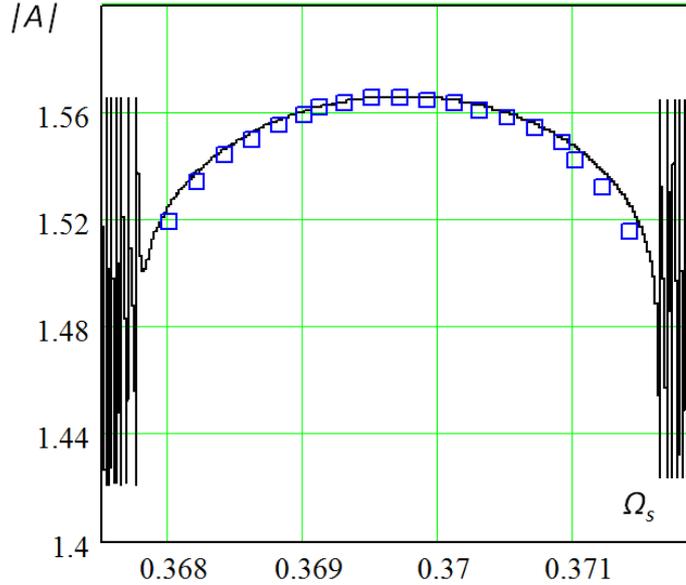


Рис. 3. Амплитудно-частотная характеристика

— это автоколебания с комплексной амплитудой A и частотой Ω_a , удовлетворяющей уравнению (см. (1))

$$F_t(3\Omega_a - \text{floor}(3\Omega_a)) = \Omega_s, \quad (4)$$

а второе

$$y_s[n] = \frac{1}{2} B \exp(j2\pi\Omega_s n) + k.c. = \frac{1}{2} B Z_s^n + k.c.$$

— вынужденные колебания с частотой Ω_s и комплексной амплитудой B в линейном контуре с частотной характеристикой $H(\Omega)$:

$$B = H(\Omega_s)E = \frac{Z_s}{Z_s^2 - 2\alpha \cos(2\pi\Omega_0)Z_s + \alpha^2} E.$$

С учетом суммы (3) уравнение (2) принимает вид

$$y_a[n] - 2\alpha \cos(2\pi\Omega_0)y_a[n-1] + \alpha^2 y_a[n-2] = \gamma F(y[n-1], y[n-2]). \quad (5)$$

Методом гармонического баланса разностное уравнение (5) сведено к комплексному алгебраическому уравнению

$$H(\Omega_0) \left(1 - \frac{1}{4} A_0^2\right) A = H(\Omega_a) \left(1 - \frac{1}{4} |A|^2 - \frac{1}{2} |B|^2 - \frac{1}{4} \frac{(A^*)^2 B}{A}\right) A, \quad (6)$$

где A_0 — амплитуда свободных автоколебаний с частотой Ω_0 . Помимо очевидного нулевого решения $A = 0$, уравнение (6) имеет два решения вида

$$|A(\Omega_a)|^2 = 4 - \beta_r(\Omega_a) (4 - A_0^2) - \frac{3}{2} |B|^2 \pm \sqrt{D(\Omega_a, B)}. \quad (7)$$

Здесь

$$D(\Omega_a, B) = \left(4 - \beta_r(\Omega_a)(4 - A_0^2) - \frac{7}{4}|B|^2\right) |B|^2 - (\beta_i(\Omega_a)(4 - A_0^2))^2 \quad (8)$$

и введены обозначения

$$\beta(\Omega_a) = H(\Omega_0)/H(\Omega_a), \quad \beta_r = \text{Re}(\beta), \quad \beta_i = \text{Im}(\beta).$$

При малой расстройке частот $-2\pi|\Omega_a - \Omega_0| \ll 1$ функция $\beta(\Omega_a)$ приобретает простой вид:

$$\beta(\Omega_a) = 1 + j2Q \frac{\Omega_a - \Omega_0}{\Omega_0} = 1 + j\eta(\Omega_a). \quad (9)$$

Для этого приближения решения (7) записываются как

$$|A(\Omega_a, B)|^2 = A_0^2 - \frac{3}{2}|B|^2 \pm \sqrt{\left(A_0^2 - \frac{7}{4}|B|^2\right) |B|^2 - \eta^2(4 - A_0^2)^2}. \quad (10)$$

Анализ динамики процесса субгармонического захвата (см. ниже) показывает, что устойчивому решению соответствует знак плюс в формуле (10). График амплитудно-частотной характеристики, построенный по (10), показан на рис. 3 точками. Теоретическая зависимость $|A(\Omega_a)|$ количественно хорошо согласуется с экспериментальной. При этом точечный график зависимости $\Omega_a(\Omega_s)$, построенный по уравнению (4), на рис. 2 совпадает с прямолинейным участком экспериментального графика. Тем самым подтверждается адекватность механизма с участием подмененных гармоник автоколебаний исследуемому явлению захвата частоты в дискретном времени.

Режим субгармонического захвата может реализоваться при положительных значениях выражения (8). Граница области захвата определяется решением нелинейного уравнения $D(\Omega_a, B) = 0$. При использовании приближения (9) для нее нетрудно получить простое выражение

$$\Omega_a(|B|) = \Omega_0 \left(1 \pm \frac{|B|}{2Q(4 - A_0^2)} \sqrt{A_0^2 - \frac{7}{4}|B|^2}\right), \quad \Omega_s = F_t(3\Omega_a - \text{floor}(3\Omega_a)). \quad (11)$$

На рис. 4 граница (11) показана непрерывной линией. Зона режима субгармонического захвата — это область I.

4. Динамика субгармонического захвата частоты в приближении ММА

Для исследования динамики процесса субгармонической синхронизации воспользуемся методом медленно меняющихся амплитуд (ММА), адаптированным для применения к нелинейным системам с дискретным временем [4]. Комплексную амплитуду автоколебаний $y_a[n]$ в суперпозиции (3) будем считать медленной по сравнению с Z_a^n функцией дискретного времени:

$$y_a[n] = \frac{1}{2}A[n]Z_a^n + k.c.$$

При этом комплексная амплитуда вынужденных колебаний $y_s[n]$ по-прежнему считается постоянной. С физической точки зрения это означает, что обратная связь в системе включается после установления вынужденных колебаний в "холодном" контуре.

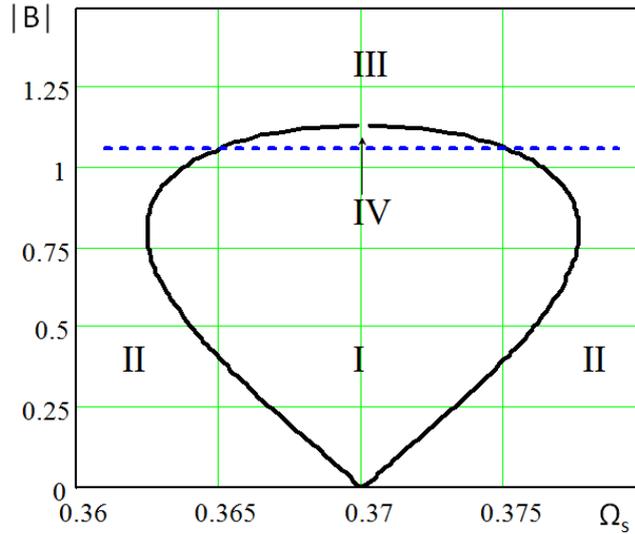


Рис. 4. Границы режимов автоколебаний

Методом ММА уравнение (5) преобразуется в укороченное уравнение для комплексной амплитуды:

$$A[n] = A[n-1] - \pi \frac{\Omega_0}{Q} (1 + j\eta) A[n-1] + \frac{\gamma}{2} \left(1 - \frac{1}{4} |A[n-1]|^2 - \frac{1}{2} |B|^2 - \frac{1}{4} \frac{(A^*[n-1])^2 B}{A[n-1]} \right) A[n-1]. \quad (12)$$

Линеаризация уравнения (12) в окрестности одного из решений уравнения (6) приводит к следующему уравнению для отклонений комплексных амплитуд от их стационарных значений:

$$\Delta A[n] = \Delta A[n-1] - \pi \frac{\Omega_0}{Q} (1 + j\eta) \Delta A[n-1] + \frac{\gamma}{2} \left(1 - \frac{1}{2} |A|^2 - \frac{1}{2} |B|^2 \right) \Delta A[n-1] - \frac{\gamma}{4} (A^* B + \frac{1}{2} A^2) \Delta A^*[n-1]. \quad (13)$$

Основное назначение этого линейного уравнения — исследование устойчивости различных режимов автоколебаний.

Устойчивому решению $A = 0$ соответствует режим захвата на основном тоне. При этом автоколебания с частотой Ω_0 подавляются, и в системе происходят лишь вынужденные колебания с частотой Ω_s . Уравнение (13) в этом случае имеет наиболее простой вид:

$$\Delta A[n] = P(\Omega_a, |B|) \Delta A[n-1],$$

где

$$P(\Omega_a, |B|) = 1 - \pi \frac{\Omega_0}{Q} (1 + j\eta) + \frac{\gamma}{2} \left(1 - \frac{1}{2} |B|^2 \right).$$

Отсюда следует, что на плоскости параметров $(\Omega_a, |B|)$ граница области захвата

на основном тоне определяется решением уравнения $P(\Omega_a, |B|) = 1$:

$$|B(\Omega_a)| = \sqrt{2 + \frac{4}{\gamma} \left(1 - \pi \frac{\Omega_0}{Q} - \sqrt{1 - 4\pi^2 (\Omega_a - \Omega_0)^2} \right)}, \quad (14)$$

$$\Omega_s = F_t(3\Omega_a - \text{floor}(3\Omega_a)).$$

На рис. 4 граница (14) показана пунктирной линией. Из-за слабой частотной зависимости граница практически прямолинейна. Захват на основном тоне Ω_s происходит в области III, лежащей выше линии (14). В областях II в системе наблюдаются биения между автоколебаниями и вынужденными колебаниями.

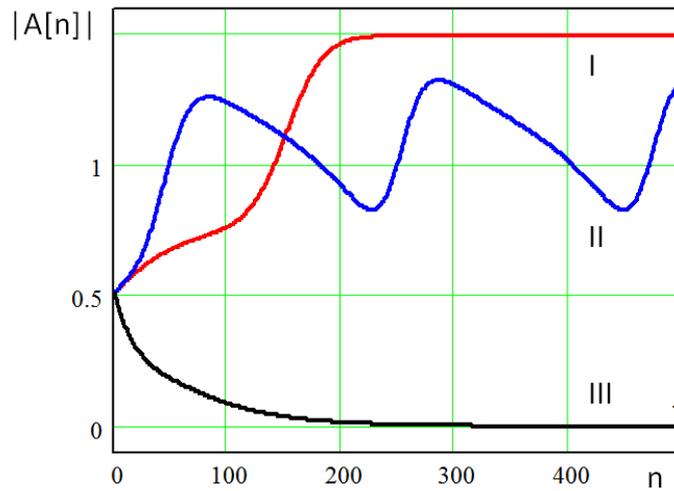


Рис. 5. Временные зависимости амплитуд

Эти выводы подтверждаются результатами моделирования переходных процессов с помощью укороченного уравнения (13). На рис. 5 представлены временные зависимости амплитуд автоколебаний при выборе параметров внешних воздействий из трех областей: I — $|B| = 0.75$, $\Omega_s = 0.37$, II — $|B| = 0.75$, $\Omega_s = 0.379$ и III — $|B| = 1.25$, $\Omega_s = 0.376$. Линия I — это выход амплитуды на стационарный уровень в режиме захвата. В процессе установления наблюдается "ступенька" в окрестности неустойчивого значения (знак "минус" в формуле (10)). Линия II — огибающая биений между сигналами автоколебаний и внешнего воздействия, линия III — релаксация отклонения амплитуды к устойчивому значению.

На диаграмме режимов автоколебаний (рис. 4) часть области I занимает область IV. Режим, реализующийся в этой области, зависит от предыстории системы. Если процесс изменения параметров воздействия соответствует переходу I \rightarrow IV, то в области IV реализуется режим субгармонического захвата. Если же имеет место переход III \rightarrow IV, то в области IV наблюдается захват на основном тоне Ω_s .

Рисунок 6 иллюстрирует поведение системы в описанной ситуации. На нем изображены графики зависимости амплитуды автоколебаний $|A|$ от амплитуды внешнего воздействия $|B|$, построенные по формуле (10) при фиксированной частоте внешнего воздействия $\Omega_s = 0.37$. Непрерывная линия соответствует знаку

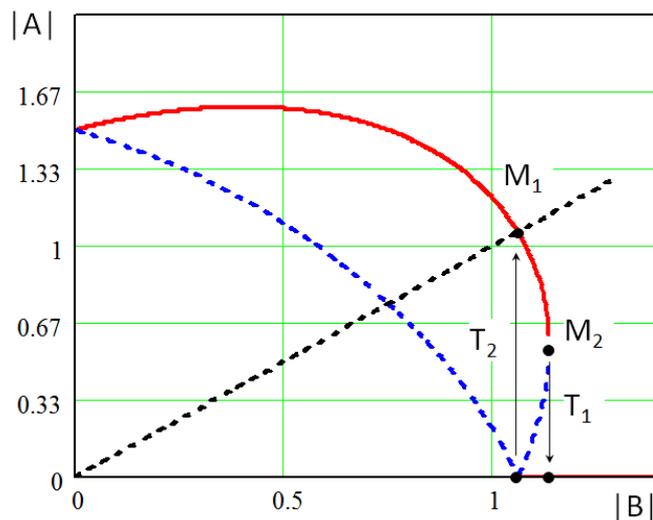


Рис. 6. Зависимость амплитуды автоколебаний от амплитуды внешнего сигнала

плюс в формуле, пунктирная — знаку минус. На отрезке линии между точками M_1 и M_2 параметры системы находятся в области IV. При плавном изменении амплитуды $|B|$ наблюдаются скачкообразные изменения амплитуды $|A|$. Скачок T_1 происходит при переходе между областями IV \rightarrow III, скачок T_2 — при переходе III \rightarrow I. Переходы между областями I \rightarrow IV и IV \rightarrow I в точке M_1 не сопровождаются скачком амплитуды автоколебаний.

Заключение

При анализе воздействия внешнего гармонического сигнала на осциллятор Ван дер Поля установлено, что явление субгармонической синхронизации в дискретном времени можно реализовать при произвольном отношении частот синхронизированных автоколебаний и синхронизирующего сигнала. В этом варианте субгармоническую синхронизацию предлагается использовать для дробного деления и умножения частоты дискретных сигналов.

Литература

- [1] Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. М.: Мир, 1968. 432 с.
- [2] Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера, 2006. 856 с.
- [3] Зайцев В.В., Линдт С.В., Шилин А.Н. Осцилляторы Ван дер Поля и Рэлея в дискретном времени // Вестник Самарского государственного университета. 2014. № 7(118). С. 104–114.
- [4] Зайцев В.В. О дискретных отображениях осциллятора Ван дер Поля // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2014. Т. 17. № 1. С. 35–40.

References

- [1] Hayash C. Nonlinear oscillations in physical systems. M., Mir, 1968, 423 p. [in Russian].
- [2] Oppenheim A., Schaffer R. Digital signal processing. M., Tekhnosfera, 2006, 856 p. [in Russian].
- [3] Zaitsev V.V., Lindt S.V., Shilin A.N. Van der Pol and Rayleigh oscillators in discrete time. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2014, no. 7(118), pp. 104–114 [in Russian].
- [4] Zaitsev V.V. About discrete mapping of the Van der Pol oscillator. *Fizika volnovykh protsessov i radiotekhnicheskie sistemy* [Physics of Wave Processes and Radio Systems], 2014, Vol. 17, no. 1, pp. 35–40 [in Russian].

V.V. Zaitsev, I.V. Stulov, A.N. Shilin²

SUBHARMONIC SYNCHRONIZATION OF SELF-OSCILLATIONS IN DISCRETE TIME

Self-oscillations in the system oscillating in discrete time and being under the influence of an external harmonious signal are investigated. As an object of researches the option of discrete map of the oscillator of Van der Pol offered earlier by authors is brought to attention. The modes of synchronous self-oscillations are analysed by means of methods of numerical experiment and harmonic balance. It is established that the effect of subharmonic synchronization in discrete time can be realized at any relation of frequencies of synchronized self-oscillations and the synchronizing signal.

Key words: self-oscillatory system, discrete time, substitution of frequencies, synchronization, capture of frequency.

Статья поступила в редакцию 28/VII/2015.

The article received 28/VII/2015.

²Zaitsev Valeriy Vassilievich (zaitsev@ssu.samara.ru), Stulov Igor Valerevich (stulov@mail.ru), Department of Radiophysics and Semiconductor Micro- and Nanoelectronics, Samara State University, 1, Acad. Pavlov Street, Samara, 443011, Russian Federation.

Shilin Alexandr Nikolaevich (Shilax@yandex.ru), JSC SRC Progress, Samara, 18, Zemetsa Street, Samara, 443009, Russian Federation.