МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.997

Ю.Н. Горелов[1]

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ N-КРАТНЫМ ИНТЕГРАТОРОМ[2]

Рассматриваются задачи оптимального управления для n-кратного интегратора с произвольными граничными условиями и для функционалов типа нормы в пространствах $L_q[t_0, t_f]$, $q = 1, 2, \infty$. Во-первых, это задача минимизации полного импульса управления, которая сводится к L_∞-проблеме моментов; во-вторых, задача на минимум максимальных значений управляющего параметра (как L_1-проблема моментов) и, наконец, задача на минимум "обобщенной работы управления" (как L_2-проблема моментов). Решения задач получены с помощью принципа максимума Н.Н. Красовского (метод моментов). Показано, что оптимальное управление для первой задачи аппроксимируется δ-импульсным управлением. Указаны также условия существования регулярных и вырожденных решений в этой задаче в зависимости от граничных условий. Получено общее решение второй задачи, для которой были установлены условия существования регулярных и вырожденных решений и ее неэквивалентность с взаимной задачей на быстродействие. Приведены примеры решения рассмотренных задач. Для задачи управления с квадратичным функционалом были получены общие соотношения, необходимые для построения программы оптимального управления.

Ключевые слова: n-кратный интегратор, оптимальное управление, проблема моментов, принцип максимума Н.Н. Красовского, многочлены Чебышёва.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача управления цепочкой последовательно соединенных интеграторов или n-кратным интегратором

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t); \ldots ; \frac{dx_{n-1}(t)}{dt} = x_n(t); \frac{dx_n(t)}{dt} = u(t), \tag{1.1}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — переменные состояния, вектор-столбец для которых $x = \mathrm{col}(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathrm{R}^n$, а $u \in \mathrm{R}^1$ – управляющий параметр.

[1]© Горелов Ю.Н., 2015

Горелов Юрий Николаевич (yungor07@mail.ru), Институт проблем моделирования и управления механико-математического факультета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева (национального исследовательского университета), 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

[2]Исследование проведено при поддержке РФФИ, проект № 13-08-97019 р_поволжье_а, № 13-08-97002 р_поволжье_а.

Граничные условия для объекта управления (1.1) в общем случае имеют следующий вид:

$$x_1(t_0) = x_{10};\ \ x_2(t_0) = x_{20};\ \ \ldots\ \ ; x_n(t_0) = x_{n0}; \tag{1.2}$$

$$x_1(t_f) = x_{1f};\ \ x_2(t_f) = x_{2f};\ \ \ldots;\ \ x_n(t_f) = x_{n\,f}, \tag{1.3}$$

где x_{10}, x_{20}, …, x_{n0}, x_{1f}, x_{2f}, …, x_{nf} – некоторые константы, t_0 и t_f – начальный и конечный моменты времени интервала управления, такие, что его длительность $T = t_f - t_0$ фиксирована.

Систему (1.1) можно переписать в векторно-матричном виде

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + e_n u(t), \tag{1.4}$$

где $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{R}^{n\times n}$, $e_n = \mathrm{col}\,(0,...,0,1) \in \mathrm{R}^n$, и граничные условия (1.2), (1.3), соответственно, в таком же виде

$$x(t_0) = x_0;\ \ x(t_f) = x_f. \tag{1.5}$$

Переходное отображение для системы (1.5) задается формулой Коши [1]:

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t,\xi)e_n u(\xi)d\xi, \tag{1.6}$$

где Φ — переходная матрица, для которой имеет место: $\Phi(t,\xi) = \Phi(t-\xi)$ и

$$\Phi(t-\xi)e_n = h(t-\xi) = \mathrm{col}\,[h_1(t-\xi), h_2(t-\xi), ..., h_n(t-\xi)], \tag{1.7}$$

где $h_k(t-\xi) = \frac{1}{(n-k)!}(t-\xi)^{n-k}$, $k = 1,2,...,n$ ($h_{n-1}(t-\xi) = t-\xi$,$h_n(t-\xi) = 1$).

При $t = t_f$ формулу (1.6) можно переписать в виде

$$\int\limits_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f-\xi)e_n u(\xi)d\xi = c, \tag{1.8}$$

где $c = x_f - \Phi(t_f - t_0)x_0 = \mathrm{col}\,(c_1,\ c_2, ...,\ c_n)$, а компоненты вектора c (суть моменты) вычисляются по формулам:

$$c_k = x_{kf} - \sum_{m=k}^{n} \frac{1}{(m-k)!}(t_f-t_0)^{m-k} x_{m0}, k = 1,2,...,n.$$

Уравнение (1.8) можно переписать в виде системы моментных равенств:

$$\int\limits_{t_0}^{t_f} h_k(t_f-\xi)u(\xi)d\xi = c_k, \quad k = 1,2,...,n. \tag{1.9}$$

Таким образом, двухточечная граничная задача (1.4), (1.5) сводится к решению уравнения (1.9) относительно управления $u(\cdot) = u[t_0,t_f]$ или, что то же самое, к проблеме моментов [2; 3]. Если дополнительно потребовать, чтобы искомое управление доставляло минимум какому-либо показателю его качества, например, типа нормы для $u(\cdot) = u[t_0, t_f]$, тогда (1.4), (1.5) — задача оптимального управления. Функционалы типа нормы в $L_q[t_0, t_f]$, $q = 1, 2, \infty$, имеют следующий вид [2]:

$$J_1(u) = ||\, u(\cdot)\,||_{L_1} = \int\limits_{t_0}^{t_f} |\, u(t)\,|\, dt; \tag{1.10}$$

$$J_\infty(u) = ||\, u(\cdot)\,||_{L_\infty} = \max_{t \in [t_0,\, t_f]} \ |\, u(t)\,|; \tag{1.11}$$

$$J_2(u) = ||\, u(\cdot)\,||_{L_2} = \int\limits_{t_0}^{t_f} u^2(t) dt. \tag{1.12}$$

Соответственно задача оптимального управления (1.4), (1.5), (1.10) на минимум "расходов" управления сводится к L_∞-проблеме моментов для (1.9), задача управления (1.4), (1.5), (1.11) на минимум максимальных по модулю значений управления сводится к L_1-проблеме моментов, а задача (1.4), (1.5), (1.12) на минимум "обобщенной работы" управления — к L_2-проблеме моментов. В связи с существованием решений этих задач управления отметим, что система (1.4) является вполне управляемой, поскольку матрица управляемости Калмана [3; 4] для нее — перъединичная матрица.

Дополнительно отметим, что в случае задания граничных условий (1.5), для которых выполняется следующее условие:

$$x_f - \Phi(t_f, t_0) x_0 = 0, \tag{1.13}$$

с учетом (1.6) в (1.8) $c = 0$. При выполнении условия (1.13) решение перечисленных выше задач управления не требуется, так как в этом случае граничные условия (1.5) автоматически выполняются при тождественно нулевом управлении: $u(t) \equiv 0$, $\forall t \in [t_0, t_f]$. Кроме того, условия (1.13) могут также выполняться и в случае так называемых "самогасящихся" или нуль-финитных управлений [5; 6], удовлетворяющих условию $\int\limits_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f - t) e_n\, u(t) dt = 0$.

Задачи оптимального по быстродействию управления n-кратным интегратором (1.1) получены в [7; 8]. Эта классическая задача представляет не только теоретический интерес, но и важное прикладное значение [9]. То же самое относится и к решению соответствующих задач управления n-кратным интегратором с функционалами (1.10)–(1.12), ряд которых в ограниченной постановке рассматривался в [10–13].

2. Задачи оптимального управления для n-кратного интегратора с функционалами типа нормы. Решение задачи на минимум "обобщенной работы" управления

Принцип максимума Н.Н. Красовского [3]. Пусть $h_0(\xi) = l_0^{\mathrm{T}} \Phi(t_f - \xi) e_n$ – решение следующей задачи (по $l = l_0$):

$$\min_{l^{\mathrm{T}} c = 1} ||\, l^{\mathrm{T}} \Phi(t_f - \xi)\, e_n ||_{L_p} = \min_{l^{\mathrm{T}} c = 1} ||\, l^{\mathrm{T}} h(t_f - \xi)\, ||_{L_p} = \tag{2.1}$$
$$= ||\, l_0^{\mathrm{T}} h(t_f - \xi)\, ||_{L_p} = \ ||\, h_0(\xi)\, ||_{L_p} = \rho_0 \ (p = 1, 2, \infty),$$

где $l = \mathrm{col}\,(l_1, l_2, \,\dots\,, l_n)$, ρ_0 — норма минимального элемента. Тогда если задача:

$$\max_{||u(\cdot)||_{L_q}=\,\frac{1}{\rho_0}} \int\limits_{t_0}^{t_f} h_0(t)u(t)dt = 1 \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right), \tag{2.2}$$

имеет единственное решение $u^*(\cdot)$, то $u^*(t)$, $\forall t \in [t_0, t_f]$, – оптимальное управление. $\square$

2.1. В соответствии с указанным принципом решение задачи оптимального управления (1.4), (1.5), (1.10) с учетом (1.8) сводится к последовательному решению следующих задач [2; 3].

Во-первых, определение нормы минимального элемента, а именно:

$$\min_{l^{\mathrm{T}}c=1} \,||\, l^{\mathrm{T}} h(t_f, \cdot)\,||_{L_\infty} = \min_{l^{\mathrm{T}}c=1} \left(\max_{t\in\,[t_0, t_f]} |\, l^{\mathrm{T}} h(t_f - t)\,| \right) \; = \; ||\, h_0(\cdot)\,||_{L_\infty} = \rho_0, \tag{2.3}$$

где $h_0(t_f - t) = l_0^{\mathrm{T}} h(t_f - t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{l_{k0}(t_f - t)^{n-k}}{(n-k)!}$, а $l_0^{\mathrm{T}}\, c = \sum\limits_{k=1}^{n} l_{k0}\, c_k = 1$.

Во-вторых, синтез оптимального управления $u^*(\cdot)$ из условия (2.2):

$$\max_{||u(\cdot)||_{L_1}=\,\frac{1}{\rho_0}} \int\limits_{t_0}^{t_f} h_0(t)u(t)dt = 1, \tag{2.4}$$

где

$$\int\limits_{t_0}^{t_f} h_0(t)u^*(t)dt = 1, \;\; ||\, u(\cdot)\,||_{L\,_1} = \int\limits_{t_0}^{t_f} |\, u(t)\,| dt = \frac{1}{\rho_0}. \tag{2.5}$$

Из решения задачи (2.3) видно, что минимальный элемент — многочлен Чебышёва первого рода с точностью до множителя ρ_0, то есть многочлен, наименее уклоняющийся от нуля на $[\,t_0, t_f]$ [14]. Кроме того, оптимальное управление здесь в пределе является δ-импульсным управлением [10], которое формируется δ-импульсами в точках экстремумов минимального элемента и в граничных точках интервала управления. При этом в пределе "расход" или полный импульс управления с учетом (2.5) будет равен величине, обратной норме минимального элемента: $J_1^{\inf} = \rho_0^{-1}$.

2.2. Решение задачи оптимального управления (1.4), (1.5), (1.11) также сводится к последовательному решению следующих задач.

Во-первых, к определению нормы минимального элемента:

$$\min_{l^{\mathrm{T}}c=1} \,||\, l^{\mathrm{T}} h(t_f, \cdot)\,||_{L_1} = \min_{l^{\mathrm{T}}c=1} \int\limits_{t_0}^{t_f} |\, l^{\mathrm{T}} h(t_f - t)\,|\, dt \; = \; ||\, h_0(\cdot)\,||_{L_1} = \rho_0. \tag{2.6}$$

Во-вторых, к синтезу оптимального управления $u^*(\cdot)$ из условия:

$$\max_{||u(\cdot)||_{L_\infty}=\,\frac{1}{\rho_0}} \int\limits_{t_0}^{t_f} h_0(t)u(t)dt, \tag{2.7}$$

где

$$\int\limits_{t_0}^{t_f} h_0(t)u^*(t)dt = 1, \;\; ||\, u(\cdot)\,||_{L\,_\infty} = \max_{t\in\,[t_0,\, t_f]} \;|\, u(t)\,| = \frac{1}{\rho_0}. \tag{2.8}$$

Очевидно, что из решения задачи (2.6) получим минимальный элемент в виде многочлена Чебышёва второго рода с точностью до некоторого множителя [14]. Соответственно с учетом (2.8) оптимальное управление в этом случае будет иметь следующий вид:

$$u^*(t) = \frac{1}{\rho_0}\operatorname{sign} h_0(t), \ \ \forall t \in [t_0, t_f], \tag{2.9}$$

где $h_0(t) = l_0^{\mathrm{T}} h(t_f - t)$, а $l_0^{\mathrm{T}} c = 1$. При этом получим $J_\infty^{\min} = \rho_0^{-1}$.

2.3. Для решения задачи (1.4), (1.5), (1.12) на минимум "обобщенной работы" управления вначале также следует найти минимальный элемент и его норму в $L_2[t_0, t_f]$, а именно:

$$\min_{l^{\mathrm{T}}c=1} \ ||\, l^{\mathrm{T}} h(t_f, \cdot)\, ||_{L_2} = \min_{l^{\mathrm{T}}c=1} \left(\int\limits_{t_0}^{t_f} [l^{\mathrm{T}} h(t_f - t)]^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = ||\, h_0(\cdot)\, ||_{L_2} = \rho_0. \tag{2.10}$$

Отметим здесь, что $\int\limits_{t_0}^{t_f} [l^{\mathrm{T}} h(t_f - t)]^2 dt = l^{\mathrm{T}} G l$, где $G = \int\limits_{t_0}^{t_f} h(t_f - t) h(t_f - t)^{\mathrm{T}} dt$ — грамиан управляемости:

$$G = \int\limits_{t_0}^{t_f} [g_{kj}(t_f - t)]_{n\times n}\, dt, \ \ g_{kj}(t_f - t) = \frac{(t_f - t)^{2n-k-j}}{(n-k)!\,(n-j)!}, k, j = 1, 2, ..., n,$$

элементы которого вычисляются по формулам:

$$\int\limits_{t_0}^{t_f} g_{kj}(t_f - t) dt = \int\limits_{t_0}^{t_f} \frac{(t_f - t)^{2n-k-j}}{(n-k)!\,(n-j)!} dt = \frac{(t_f - t_0)^{2n-k-j+1}}{(n-k)!\,(n-j)!(2n-k-j+1)}.$$

В силу полной управляемости системы (1.4) ее грамиан управляемости G является невырожденной матрицей. Если принять $t_0 = -1$ и $t_f = +1$, то его элементы будут вычисляться по формулам:

$$\int\limits_{t_0}^{t_f} g_{kj}(t_f - t) dt = \frac{2^{2n-k-j+1}}{(n-k)!\,(n-j)!(2n-k-j+1)}, k, j = 1, 2, ..., n.$$

Для отыскания минимального элемента и его нормы в рассматриваемой задаче следует найти минимум квадратичной формы $l^{\mathrm{T}} G l$ при условии, что $l^{\mathrm{T}} c = 1$. Решая эту задачу методом множителей Лагранжа, найдем

$$l_0 = \frac{G^{-1} c}{c^{\mathrm{T}} G^{-1} c}$$

и, соответственно, получим

$$h_0(t) = \frac{c^{\mathrm{T}} G^{-1} h(t_f - t)}{c^{\mathrm{T}} G^{-1} c}, \rho_0 = (c^{\mathrm{T}} G^{-1} c)^{-\frac{1}{2}} \tag{2.11}$$

Далее из условия максимума интеграла в (2.2) определим оптимальное управление, программа которого будет иметь следующий вид:

$$u^*(t) = \alpha h_0(t), \alpha > 0 (\forall t \in [t_0, t_f]).$$

Подставив это выражение в (2.2), получим, что $\alpha = \rho_0^{-2}$, то есть оптимальное управление для задачи (1.4), (1.5), (1.12) с учетом (2.11) имеет вид

$$u^*(t) = \frac{1}{\rho_0^2}\, h_0(t) = c^{\mathrm{T}} G^{-1} h(t_f - t), \forall t \in [t_0, t_f], \tag{2.12}$$

а минимальное значение функционала (1.12) будет равно $J_2^{\min} = \frac{1}{\rho_0^2} = c^{\mathrm{T}} G^{-1} c$.

3. Оптимальное управление n-кратным интегратором на минимум "расхода" или полного импульса управления

Решение задачи (2.3) доставляет с учетом (1.7) ее минимальный элемент

$$h_0(t) = \sum_{k=1}^{n} l_{k0} h_k(t_f - t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{l_{k0}}{(n-k)!}(t_f - t)^{n-k}, \sum_{k=1}^{n} l_{k0}\, c_k = 1. \tag{3.1}$$

Применяя формулу бинома $(t_f - t)^{n-k} = \sum\limits_{m=0}^{n-k}(-1)^m C_{n-k}^m\, t_f^{n-k-m}\, t^m$, перепишем выражение (3.1) в виде

$$h_0(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{l_{k0}}{(n-k)!} \sum_{m=0}^{n-k}(-1)^m C_{n-k}^m t_f^{n-k-m}\, t^m = \sum_{p=0}^{n-1} a_p\, t^p, \tag{3.2}$$

где $C_r^q = \frac{r!}{q!(r-q)!}$, а a_p, $p = 0, 1, ..., n-1$, — коэффициенты многочлена — минимального элемента задачи (2.3), вычисляемые по формулам:

$$a_p = (-1)^p \sum_{k=1}^{n-p} \frac{l_{k0} C_{n-k}^p}{(n-k)!}\, t_f^{n-p-k}, p = 0, 1, ..., n-1. \tag{3.3}$$

Вводя $a = \mathrm{col}\,[(-1)^{n-1} a_{n-1}, (-1)^{n-2} a_{n-2}, ..., -a_1, a_0)]$ и $l_0 = \mathrm{col}\,(l_{10},\ l_{20}, ...,\ l_{n0})$, соотношения (3.3) можно переписать в векторно-матричном виде:

$$M\, l_0 = a, \tag{3.4}$$

где матрица $M \in \mathrm{R}^{n \times n}$ имеет следующее устройство:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{(n-1)!} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{C_{n-1}^{n-2} t_f}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{C_{n-1}^{n-3} t_f^2}{(n-1)!} & \frac{C_{n-2}^{n-3} t_f}{(n-2)!} & \frac{1}{(n-3)!} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{C_{n-1}^{2} t_f^{n-3}}{(n-1)!} & \frac{C_{n-2}^{2} t_f^{n-4}}{(n-2)!} & \frac{C_{n-3}^{2} t_f^{n-5}}{(n-3)!} & \cdots & \frac{C_3^2 t_f}{3!} & \frac{1}{2!} & 0 & 0 \\ \frac{C_{n-1}^{1} t_f^{n-2}}{(n-1)!} & \frac{C_{n-2}^{1} t_f^{n-3}}{(n-2)!} & \frac{C_{n-3}^{1} t_f^{n-4}}{(n-3)!} & \cdots & \frac{C_3^1 t_f^2}{3!} & \frac{C_2^1 t_f}{2!} & \frac{1}{1!} & 0 \\ \frac{t_f^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{t_f^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{t_f^{n-3}}{(n-3)!} & \cdots & \frac{t_f^3}{3!} & \frac{t_f^2}{2!} & \frac{t_f}{1!} & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

Поскольку матрица M невырожденная, то из (3.4) всегда можно получить $l_0 = M^{-1}a$. При этом обращение матрицы (3.5), учитывая ее устройство, удобно проводить методом окаймления [15]. Более того, треугольная структура матрицы M позволяет решать систему (3.4), последовательно определяя l_{k0}, $k = 1, 2, ..., n\text{-}1$, начиная с $l_{10} = (-1)^{n-1}(n-1)!\, a_{n-1}$ и т. д.

Так как l_0 — решение задачи (2.3) для некоторого $c \neq 0$, то здесь и далее случай, когда $l_{10} \neq 0$, будем называть регулярным, что с учетом (3.4) и (3.5) отвечает условию $a_{n-1} \neq 0$ или, что же самое, когда $\deg h_0(t) = n-1$. Иначе, если $\deg h_0(t) < n-1$, то решение задачи (2.3) будет вырожденным, условия существования которого будут рассмотрены ниже. С учетом (3.4) и $c^{\mathrm{T}} l_0 = 1$, $c \neq 0$

в регулярном случае должно иметь место: $c^{\mathrm{T}}M^{-1}a = 1$ и, как следствие, $a_{n-1} \neq 0$ и, стало быть, $l_{10} \neq 0$. Очевидно, что это условие не выполняется в том случае, когда векторы c и $M^{-1}a$ (или $M^{-\mathrm{T}}c$ и a) ортогональны.

Так как система (1.4) стационарная, то при задании границ интервала управления $[t_0, t_f]$ допускается определенный произвол, исключая лишь длительность интервала управления — $T = t_f - t_0$, являющегося существенным параметром рассматриваемых задач оптимального управления. Например, без ограничения общности возможны следующие варианты задания интервала $[t_0, t_f]$: во-первых, $t_0 = 0$; $t_f = T$; во-вторых, $t_0 = -T$; $t_f = 0$ и, в-третьих, $t_0 = -T/2$; $t_f = +T/2$. Если $t_f = 0$, то есть во втором случае, то матрица (3.5) будет диагональной.

Поскольку решения рассматриваемых задач управления тесно связаны с многочленами Чебышёва, то интервал управления $[t_0, t_f]$ удобно преобразовать к интервалу $[-1, +1]$, переходя от переменной t в (3.2) к переменной τ:

$$t = \frac{1}{2}[(t_f - t_0)\tau + (t_f + t_0)], \tau \in [-1, +1]. \tag{3.6}$$

Замена независимой переменной согласно (3.6) в выражении для многочлена (3.2), как минимального элемента задачи (2.3), приведет его к такому виду:

$$g_0(\tau) = \sum_{p=0}^{n-1} b_p \tau^p, \tau \in [-1, +1], \tag{3.7}$$

где b_p, $p = 0, 1, ..., n-1$ — коэффициенты, вычисляемые по соответствующим формулам в зависимости от варианта задания границ интервала управления $[t_0, t_f]$ и отвечающей ему замене переменной (3.6), а именно для одного из следующих вариантов замены переменной $t \in [t_0, t_f]$ на $\tau \in [-1, +1]$:

$$1)\ t = \frac{T}{2}(\tau + 1);\ \ 2)\ t = \frac{T}{2}(\tau - 1);\ \ 3)\ t = \frac{T}{2}\tau. \tag{3.8}$$

Например, для первого варианта (3.8) из (3.2) получим

$$\sum_{p=0}^{n-1} a_p t^p = \sum_{p=0}^{n-1} a_p \left(\frac{T}{2}\right)^p (\tau + 1)^p = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \tau^k,$$

где $b_k = \sum\limits_{m=k}^{n-1} a_m \left(\frac{T}{2}\right)^m C_m^{m-k}$, $k = 0, 1, ..., n-1$, и, в частности, $b_{n-1} = a_{n-1} \left(\frac{T}{2}\right)^{n-1}$. Соответственно, для остальных вариантов (3.8) из (3.2) получим

$$b_k = \sum_{m=k}^{n-1} a_m \left(\frac{T}{2}\right)^m (-1)^{m-k} C_m^{m-k} \ \text{ и }\ b_k = a_k \left(\frac{T}{2}\right)^k, \ \ k = 0, 1, ..., n-1.$$

Поскольку коэффициенты многочлена (3.7) вычисляются по коэффициентам (3.3), постольку, вводя в рассмотрение вектор-столбец $b = \mathrm{col}\,(b_{n-1}, b_{n-2}, ..., b_0)$, связь между векторами b и a можно представить в таком виде:

$$Qa = b, \tag{3.9}$$

где матрица $Q \in \mathrm{R}^{n \times n}$ имеет соответствующее устройство в зависимости от выбора варианта замены (3.8). Поэтому с учетом (3.9) из (3.4) тогда получим

$$l_0 = M^{-1}Q^{-1}b. \tag{3.10}$$

Следуя решению задачи (2.3), далее необходимо вычислить ρ_0 с учетом того, что по условиям этой задачи экстремальные значения многочлена (3.2) и, стало быть, (3.7) должны в наименьшей степени уклоняться от нуля или, что то же самое, с точностью до множителя ρ_0 в регулярном случае должно иметь место такое соотношение:

$$g_0(\tau) = s_0\,\rho_0 T_{n-1}(\tau), \tau \in [-1, +1], \tag{3.11}$$

где $s_0 = \pm 1$, $T_{n-1}(\tau) = 2^{n-2}\tau^{n-1} + \sum\limits_{p=0}^{n-2}\theta_p\tau^p$ — многочлен Чебышёва первого рода $(n-1)$-й степени [14]. Многочлены Чебышёва первого рода четной степени, то есть при $n = 2k$ $(k = 0, 1, 2, ...)$, будут содержать только четные степени τ, и свободный член для них будет равен $(-1)^k$, а многочлены нечетной степени — при $n = 2k+1$ $(k = 0, 1, 2, ...)$ — только нечетные степени τ. Например [14]: $T_0(\tau) = 1$; $T_1(\tau) = \tau$; $T_2(\tau) = 2\tau^2 - 1$; $T_3(\tau) = 4\tau^3 - 3\tau$; $T_4(\tau) = 8\tau^4 - 8\tau^2 + 1$; $T_5(\tau) = 16\tau^5 - 20\tau^3 + 5\tau$, и т. д. в соответствии с рекуррентным соотношением: $T_{n+1}(\tau) = 2\tau T_n(\tau) - T_{n-1}(\tau)$ $(n > 0)$. То есть в общей записи для коэффициентов многочлена $T_{n-1}(\tau)$ имеет место: $\theta_{n-2} = \theta_{n-4} = ... = 0$ и $\theta_{n-1} = 2^{n-2}$.

Приравнивая коэффициенты из (3.7) и предварительно умноженные на $s_0\rho_0$ соответствующие коэффициенты многочлена $T_{n-1}(\tau)$, то есть, принимая $b = s_0\rho_0\theta$, где $\theta = \mathrm{col}\,(\theta_{n-1}, \theta_{n-2}, ..., \theta_0)$, из (3.10) получим

$$l_0 = s_0\,\rho_0\,M^{-1}Q^{-1}\,\theta. \tag{3.12}$$

Умножая далее (3.12) скалярно на c и учитывая, что $\rho_0 > 0$ и $c^{\mathrm{T}} l_0 = 1$, найдем значение нормы минимального элемента (3.2) ρ_0 и s_0:

$$\rho_0 = |\,c^{\mathrm{T}} M^{-1}Q^{-1}\,\theta\,|^{-1}; s_0 = \mathrm{sign}\,(c^{\mathrm{T}} M^{-1}Q^{-1}\,\theta). \tag{3.13}$$

Оптимальное управление для регулярного случая в рассматриваемой задаче можно определить из условий (2.4), (2.5). В [10] было показано, что оптимальное управление для тройного интегратора в пределе является δ-импульсным управлением. То же самое будет иметь место и в случае $n > 3$, а именно в этом случае оптимальное управление также будет формироваться δ-импульсами в окрестности граничных точек интервала управления и точек экстремумов минимального элемента или, что то же самое, в окрестности точек экстремумов многочлена $T_{n-1}(\tau)$ на интервале управления $[-1, +1]$. При этом "расход" или полный импульс оптимального управления с учетом (2.5) и (3.13) будет равен

$$J_1^{\min} = ||\,u^*(\cdot)\,||_{L_1} = \int\limits_{t_0}^{t_f} |\,u^*(t)\,|dt = \frac{T}{2}\int\limits_{-1}^{+1} |\,u^*(\tau)\,|d\tau = \frac{1}{\rho_0} = |\,c^{\mathrm{T}} M^{-1}Q^{-1}\,\theta\,|. \tag{3.14}$$

Программа оптимального управления с учетом (2.4) и (3.7) будет иметь вид

$$u^*(\tau) = \mathrm{sign}\,g_0(\tau)\sum_{k=0}^{n-1} u_k^*\delta(\tau - \tau_k), \tau \in [-1, +1], \tag{3.15}$$

где $\delta(\tau - \tau_k)$ — δ-функция, $u_k^* \geqslant 0$ $(k = 0, 1, ..., n-1)$ — параметры программы управления (величины импульсов), а τ_k — точки приложения δ-импульсов, которые на интервале $(-1, +1)$ определяются из условия $\frac{dT_{n-1}(\tau)}{d\tau} = 0$. Так как $\frac{1}{n-1}\frac{dT_{n-1}(\tau)}{d\tau} = U_{n-2}(\tau)$, то указанные точки суть граничные точки интервала управления $[-1, +1]$ и нули многочленов Чебышёва второго рода [14]:

$$\tau_k = \cos\frac{(n-k-1)\pi}{n-1}, k = 0, 1, ..., n-1 (\tau_0 = -1, \tau_{n-1} = +1). \tag{3.16}$$

С учетом моментных равенств (1.8), (1.9), с одной стороны, и, с другой стороны, с учетом взаимосвязи многочленов (3.2) и (3.7), обусловленной заменой переменных (3.8), из (1.8) при подстановке в него (3.15) получим:

$$\int_{t_0}^{t_f} h(t_f - t)u^*(t)dt = \frac{T}{2}\int_{-1}^{+1} h\left[\frac{T}{2}(1-\tau)\right]u^*(\tau)d\tau =$$

$$= \frac{T}{2}\sum_{k=0}^{n-1} u_k^* h\left[\frac{T}{2}(1-\tau_k)\right]\operatorname{sign} g_0(\tau_k) = \frac{T}{2}\sum_{k=0}^{n-1} u_k^* h\left[\frac{T}{2}(1-\tau_k)\right]\operatorname{sign}\left[s_0 T_{n-1}(\tau_k)\right] = c.$$

Отсюда следует система уравнений относительно параметров импульсов в (3.15), которая в векторно-матричной записи имеет вид

$$Hu^* = c, \tag{3.17}$$

где $u^* = \mathrm{col}\,(u_0^*,\ u_1^*, ...,\ u_{n-1}^*)$, $H = [g_0|g_1|\cdots|g_{n-1}]$ и, соответственно,

$$g_k = h\left[\frac{T}{2}(1-\tau_k)\right]\operatorname{sign}\left[s_0 T_{n-1}(\tau_k)\right], k = 0, 1, ..., n-1.$$

Нетрудно установить, что систему (3.17) можно преобразовать заменой переменных в u^*, а именно: $(-1)^k s_0\, u_{k-1}^* \to \tilde{u}_{k-1}^*$, $k = 1, 2, ..., n$, то есть $u^* \to \tilde{u}^*$, и его правой части $c \to \tilde{c}$, где $(n-k)!\, c_k \to \tilde{c}_k$, $k = 1, 2, ..., n$, так что (3.17) будет иметь вид: $W\tilde{u}^* = \tilde{c}$, где W — матрица Вандермонда.

Решая уравнение (3.17), получим вектор параметров импульсов u^* для оптимального управления (3.15): $u^* = H^{-1}c$ и тем самым получим в общем виде решение задачи оптимального управления (1.4), (1.5), (1.10) для n-кратного интегратора на минимум "расхода" или полного импульса управления для регулярного случая. Отметим, что с учетом (3.15) из (2.5) также следует

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k^* = \frac{2}{\rho_0 T}. \tag{3.18}$$

Отсюда видно, что при $\rho_0 \to \infty$ получим $\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k^* \to 0$.

4. Об условиях вырождения задачи управления n-кратным интегратором на минимум "расхода" или полного импульса

Рассмотрим условия существования вырожденного решения в задаче (2.3). С учетом условия $c^{\mathrm{T}} l_0 = 1$ и (3.12) как в общем, так и в регулярном случае должно иметь место:

$$s_0\, \rho_0\, c^{\mathrm{T}} M^{-1} Q^{-1} \theta = 1. \tag{4.1}$$

Поскольку здесь $\theta = \mathrm{col}\,(\theta_{n-1}, \theta_{n-2}, ..., \theta_0)$ — вектор коэффициентов многочлена $T_{n-1}(\tau)$, то для выполнения условия (4.1) необходимо и достаточно, чтобы векторы c и $q_n = M^{-1}Q^{-1}\theta$ были не ортогональны, то есть $c^{\mathrm{T}} q_n \neq 0$. Иначе, когда $c^{\mathrm{T}} q_n = 0$, условие (4.1) не выполняется и, стало быть, имеет место существование вырожденного решения задачи (2.3).

Без ограничения общности изложения далее примем $t_0 = -1$ и $t_f = +1$. Тогда в (3.9) $Q = I_n$ — единичная матрица и $a = b = s_0\rho_0\theta$, то есть $q_n = M^{-1}\theta$. Кроме того, матрицу (3.5) обозначим $M_n \in \mathrm{R}^{n\times n}$ и введем для нее следующие блочные представления:

$$M_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{(n-1)!} & \mathbf{0}_{n-1}^{\mathrm{T}} \\ m_{n-1} & M_{n-1} \end{bmatrix};\ M_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{(n-1)!} & 0 & \mathbf{0}_{n-2}^{\mathrm{T}} \\ \frac{1}{(n-2)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \mathbf{0}_{n-2}^{\mathrm{T}} \\ \Delta m_{n-1} & m_{n-2} & M_{n-2} \end{bmatrix} \text{ и т. д.}$$

Соответственно обратные к этим матрицам будут иметь следующий вид:

$$M_n^{-1} = \begin{bmatrix} (n-1)! & \mathbf{0}_{n-1}^{\mathrm{T}} \\ -(n-1)!M_{n-1}^{-1}m_{n-1} & M_{n-1}^{-1} \end{bmatrix};$$

$$M_n^{-1} = \begin{bmatrix} (n-1)! & 0 & \mathbf{0}_{n-2}^{\mathrm{T}} \\ -(n-1)! & (n-2)! & \mathbf{0}_{n-2}^{\mathrm{T}} \\ (n-1)!M_{n-2}^{-1}(m_{n-2} - \Delta m_{n-1}) & -(n-2)!M_{n-2}^{-1}m_{n-2} & M_{n-2}^{-1} \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

и т. д. до записи обратной матрицы для (3.5).

Вводя далее $c = \mathrm{col}\,(c_1, \Delta c_{n-1})$, $a = \mathrm{col}\,(a_{n-1}, \Delta a_{n-1})$ и $l_0 = \mathrm{col}\,(l_{10}, \Delta l_{n-1})$, условие $c^{\mathrm{T}} l_0 = 1$ можно переписать в виде

$$c_1 l_{10} + \Delta c_{n-1}^{\mathrm{T}} \Delta l_{n-1} = 1, \tag{4.3}$$

и решение уравнения (3.4) с учетом (4.2) представить в виде:

$$l_{10} = (B-1)!\, a_{n-1}; \Delta l_{n-1} = M_{n-1}^{-1}[\Delta a_{n-1} - (n-1)!\, a_{n-1} m_{n-1}]. \tag{4.4}$$

Если же $c^{\mathrm{T}} l_0 = 0$, то для заданного $c \neq 0$ регулярное решение задачи (2.3) невозможно в силу ортогональности $c \neq 0$ и $q_n = M^{-1}\theta$. Но тогда здесь, то есть при $c^{\mathrm{T}} q_n = 0$, имеет место $a_{n-1} = b_{n-1} = 0$ и $l_{10} = 0$. Стало быть, тогда для выполнения в (2.3) условия $c^{\mathrm{T}} l_0 = 1$ в виде (4.3) с учетом (4.4) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:

$$\Delta c_{n-1}^{\mathrm{T}} M_{n-1}^{-1} \Delta a_{n-1} = 1, \tag{4.5}$$

где $\Delta a_{n-1} = s_0 \rho_0 \Delta\theta_{n-1}$, а $\Delta\theta_{n-1} = \mathrm{col}\,(2^{n-3}, 0, \theta_{n-3}^{(n-1)}, ..., \theta_0^{(n-1)})$ — вектор коэффициентов многочлена $T_{n-2}(\tau)$. Следует отметить, что векторы $\theta = \theta_n$ и θ_{n-1}= $\mathrm{col}\,(0, \Delta\theta_{n-1})$ ортогональны в силу свойств коэффициентов многочленов Чебышёва первого рода. Если (4.5) выполняется, то задача (2.3) является однократно вырожденной. Очевидно, что при выполнении этого условия решение задачи (2.3) можно рассматривать как "регулярное", но с учетом того, что здесь $\deg h_0(t) = n-2$, а оптимальное управление должно содержать не более $(n-1)$-го δ-импульса. Если условие (4.5) не выполняется, то есть $\Delta c_{n-1}^{\mathrm{T}} M_{n-1}^{-1} \Delta a_{n-1} = 0$ при $l_{10} = 0$, то задача (2.3) является не менее чем двукратно вырожденной. Существование двукратно вырожденного решения задачи (2.3) устанавливается таким же образом, как и в случае однократного вырождения решения. Решение задачи (2.3) будет n-кратно вырожденным, когда условия (1.13) выполняются автоматически при тождественно нулевом управлении.

Пример 1. Пусть в (1.2), (1.3) $x_{30} = \ldots = x_{n0} = 0$ и $x_{3f} = \ldots = x_{nf} = 0$, а также $t_0 = -1$ и $t_f = +1$. Последнее означает, что здесь $t \equiv \tau$ и, стало быть, многочлены (3.2) и (3.7) тождественны и в (3.9) $Q = I_n$ — единичная матрица. Отметим, что принятый вариант задания граничных условий (1.2), (1.3) отвечает условиям нуль-финитности оптимального управления (3.15) [6] к части переменных системы (1.1), а именно к переменным цепочки из $n-2$ интеграторов, которая последовательно присоединена к двойному интегратору с ненулевыми граничными условиями.

Для указанных выше граничных условий получим

$$c_1 = x_{1f} - x_{10} - 2x_{20}; c_2 = x_{2f} - x_{20}; c_3 = \ldots = c_n = 0. \tag{4.6}$$

Отсюда видно, что (1.13) выполняются, если только $x_{1f} - x_{10} - 2x_{20} = 0$ и $x_{2f} - - x_{20} = 0$. Пусть $c_1 \neq 0$ и, возможно, $c_2 \neq 0$. С учетом (4.2) и (4.6) получим $c^{\mathrm{T}} M^{-1} = [(n-1)!(c_1 - c_2)|(n-2)!\, c_2|0| \cdots |0]$ или $c^{\mathrm{T}} M^{-1}\theta = 2^{n-2}(n-1)!\,(c_1 - c_2)$. Таким образом, при $c_1 \neq c_2$, то есть когда $c_1 - c_2 = x_{1f} - x_{10} - (x_{20} + x_{2f}) \neq = 0$, имеет место регулярный случай решения задачи (2.3) с указанными выше граничными условиями. Регулярный случай имеет место и при $x_{2f} = x_{20}$, когда $c_2 = 0$, но при условии $x_{1f} - x_{10} - 2x_{20} \neq 0$. При этом получим

$$\rho_0 = \left[2^{n-2}(n-1)!\,|\,x_{1f} - x_{10} - (x_{20} + x_{2f})\,|\right]^{-1};$$
$$s_0 = \operatorname{sign}\,[x_{1f} - x_{10} - (x_{20} + x_{2f})],$$

а оптимальное управление (3.15) тогда будет иметь следующий вид:

$$u^*(\tau) = \operatorname{sign}\,[s_0\, T_{n-1}(\tau)] \sum_{k=0}^{n-1} u_k^* \delta(\tau - \tau_k), \tau \in [-1, +1],$$

где параметры импульсов определяются из решения системы (3.17).

Если же здесь $c_1 - c_2 = x_{1f} - x_{10} - (x_{20} + x_{2f}) = 0$, то решение задачи (2.3) с заданными граничными условиями сводится к исследованию вырожденного случая. Для этого вначале найдем

$$\Delta c_{n-1}^{\mathrm{T}} M_{n-1}^{-1} \Delta\theta_{n-1} = 2^{n-3}(n-2)!\, c_2 = 2^{n-3}(n-2)!\,(x_{2f} - x_{20}).$$

Отсюда видно, что однократно вырожденная задача (2.3) имеет "регулярное" решение, если $c_2 = x_{2f} - x_{20} \neq 0$. При этом $\rho_0 = \left[2^{n-3}(n-2)!\,|\,x_{2f} - x_{20}\,|\right]^{-1}$ и $s_0 = \operatorname{sign}\,(x_{2f} - x_{20})$. Если и $c_2 = x_{2f} - x_{20} = 0$, то $x_{1f} - x_{10} - 2x_{20} = 0$ или, что то же самое, тогда выполняются условия (1.13). □

Продолжая анализ условий вырождения для задачи (2.3), напомним, что регулярный случай решения задачи (2.3) имеет место, когда выполняется условие (4.1), то есть когда векторы c и $M_n^{-1}\theta_n$ не ортогональны. Очевидно, что аналогичное условие должно выполняться и в случае решения однократно вырожденной задачи (2.3), решение которой можно рассматривать как "регулярное" в смысле выполнения условия (4.5), то есть когда векторы Δc_{n-1} и $M_{n-1}^{-1}\Delta\theta_{n-1}$ не ортогональны. Если же для них $\Delta c_{n-1}^{\mathrm{T}} M_{n-1}^{-1}\Delta\theta_{n-1} = 0$, то рассматриваемая задача будет не менее чем двукратно вырожденной. Анализ условий и определение кратности вырождения задачи (2.3) непосредственно связаны с анализом условий ортогональности, учитывая представления (4.2), в последовательности следующих m пар векторов:

$$(c, M_n^{-1}\theta_n); (\Delta c_{n-1}, M_{n-1}^{-1}\Delta\theta_{n-1}); ...; (\Delta c_{n-m+1}, M_{n-m+1}^{-1}\Delta\theta_{n-m+1}). \tag{4.7}$$

С учетом $\theta_{n-j} = \operatorname{col}\,(\underbrace{0, ..., 0}_{j\ \text{раз}}, \Delta\theta_{n-j}) \in \mathrm{R}^n$, $j = 0, 1, ..., n-1$, где $\Delta\theta_{n-j}$ — вектор коэффициентов многочлена $T_{n-j-1}(\tau)$, соотношения (4.7) в случае m-кратной вырожденности задачи (2.3) можно переписать так:

$$c^{\mathrm{T}} M_n^{-1}\theta_{n-j} = 0, j = 0, 1, ..., m-1, c^{\mathrm{T}} M_n^{-1}\theta_{n-m} \neq 0, \tag{4.8}$$

или

$$c^{\mathrm{T}}q_{n-j} = 0, j = 0, 1, ..., m-1, c^{\mathrm{T}}q_{n-m} \neq 0, \tag{4.9}$$

где $q_{n-j} = M_n^{-1}\theta_{n-j},\ j = 0, 1, ..., m-1$.

Выполнение условий (4.8) означает, что вектор $M_n^{-\mathrm{T}}c$ ортогонален ко всем векторам θ_n,θ_{n-1}, ... ,θ_{n-m+1}, исключая вектор θ_{n-m}, или, что то же самое, вектор c ортогонален ко всем векторам q_n,q_{n-1}, ... ,q_{n-m+1}, исключая вектор q_{n-m}. В связи этим напомним, что с учетом (1.8) и (1.13) $c = 0$, но нулевой вектор по определению ортогонален ко всем векторам q_n,q_{n-1}, ..., q_1. Стало быть, тогда условия (1.13) означают n-кратную или полную вырожденность задачи (2.3).

Введем далее в рассмотрение матрицу $\mathbf{\Theta}_n = [\,\theta_n|\ \theta_{n-1}|\ \cdots\ |\ \theta_1]$, которая по построению является нижней треугольной матрицей. С учетом свойств коэффициентов многочленов Чебышёва первого рода $T_m(\tau)$ $(m = 0, 1, ..., n-1)$, а именно: $\theta_{m-j}^{(m)},\ j = 0, 1, ..., m$, матрица $\mathbf{\Theta}_n$ будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{\Theta}_n = [\,\theta_n|\ \theta_{n-1}|\ \cdots\ |\ \theta_1] = \begin{bmatrix} 2^{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-3} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \theta_{n-3}^{(n-1)} & 0 & 2^{n-4} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_{n-4}^{(n-2)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \theta_{n-5}^{(n-1)} & 0 & \theta_{n-5}^{(n-3)} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_{n-6}^{(n-2)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ * & * & * & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ * & * & * & \cdots & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отсюда видно, что матрица $\mathbf{\Theta}_n$ — невырожденная матрица, и, соответственно, определитель матрицы Грама $G = \mathbf{\Theta}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{\Theta}_n$ отличен от нуля. Но тогда система векторов $\theta_{n-j},\ j = 0, 1, ..., n-1$, является линейно независимой системой, и эти векторы образуют базис пространства R^n [15]. Поэтому тогда имеет место единственное разложение вектора $M_n^{-\mathrm{T}}c$ по указанному базису. То же самое справедливо и для системы векторов $q_{n-j},\ j = 0, 1, ..., n-1$. Если они линейно независимы, то также образуют базис пространства R^n и для него также имеет место единственное разложение вектора c.

Возвращаясь к условиям (4.9), отметим, что их выполнение для вектора c означает его ортогональность к линейной оболочке $L_m \subset \mathrm{R}^n$ для системы m векторов $q_{n-j},\ j = 0, 1, ..., m-1$, которые образуют базу подпространства L_m и, соответственно, (4.9) являются условиями m-кратной вырожденности задачи (2.3).

5. Оптимальное управление n-кратным интегратором на минимум максимальных по модулю значений управления. Об условиях вырождения задачи

Приступая к решению задачи оптимального управления (1.4), (1.5), (1.11), следует отметить, что она является взаимной к задаче на быстродействие, в которой требуется, чтобы $J_\infty^*(u) = (t_f - t_0) \to \min$, а на управляющий параметр накладываются ограничения:

$$| u(t) | \leqslant u_{\max}, \forall t \in [t_0, t_f], \tag{5.1}$$

где $u_{\max}$ — максимально допустимое по модулю значение управления.

Решение задачи (1.4), (1.5), (1.11) аналогично изложенному выше решению задачи (1.4), (1.5), (1.10), то есть здесь так же, как и для задач (2.3), (2.4), оно сводится к решению задач (2.6), (2.7). Стало быть, вначале следует найти минимальный элемент из решения задачи (2.6) в виде многочлена $h_0(t)$ (3.2), который по условиям задачи с точностью до некоторого множителя должен быть многочленом Чебышёва второго рода $(n-1)$-й степени — $U_{n-1}(\tau)$ [14]. Связь между вектором коэффициентов этого многочлена a и вектором l_0 будет аналогична (3.4) и с той же матрицей M (3.5). С помощью замены (3.6) многочлен $h_0(t)$ следует привести к стандартному виду (3.7), то есть к многочлену $g_0(\tau)$, $\tau \in [-1, +1]$. Принимая далее без ограничения общности изложения: $t_f = 1$; $t_0 = -1$, минимальный элемент задачи (2.6) тогда будем отыскивать в виде

$$g_0(\tau) = \sum_{k=1}^{n} l_{k0} h_k(1-\tau) = \sum_{k=1}^{n} \frac{l_{k0}}{(n-k)!}(1-\tau)^{n-k} = \sum_{p=0}^{n-1} b_p \tau^p, \tag{5.2}$$

где $\sum\limits_{k=1}^{n} l_{k0} c_k = 1$, а коэффициенты b_p, $p = 0, 1, ..., n-1$, определяются по формулам, которые аналогичны (3.3):

$$b_p = (-1)^p \sum_{m=p}^{n-1} \frac{1}{m!} l_{n-m,0} C_m^p, p = 0, 1, ..., n-1. \tag{5.3}$$

Если ввести $b = \operatorname{col}[(-1)^{n-1} b_{n-1}, (-1)^{n-2} b_{n-2}, ..., -b_1, b_0)]$ и $l_0 = \operatorname{col}(l_{10}, l_{20}, ..., l_{n0})$, то соотношения (5.3) можно переписать в векторно-матричном виде:

$$M\, l_0 = b, \tag{5.4}$$

где матрица M, согласно формуле (3.5), задана при $t_f = 1$. Соответственно, $l_0 = M^{-1} b$ и далее вначале рассматривается случай, когда $l_{10} \neq 0$. Как и в задаче (2.3), этот случай будем называть регулярным и ему будет отвечать $b_{n-1} \neq 0$ или $\deg g_0(\tau) = n-1$. Условия существования вырожденных решений задачи (2.6), когда $\deg g_0(\tau) < n-1$, будут рассмотрены ниже.

Поскольку для минимального элемента задачи $|| g_0(\cdot) ||_{L_1[-1,+1]} = \rho_0$, то с учетом $|| U_m(\cdot) ||_{L_1[-1,+1]} = 2$ $(m = 0, 1, 2, ...)$ [14; 16] тогда должно иметь место:

$$g_0(\tau) = \sum_{p=0}^{n-1} b_p \tau^p = \frac{1}{2} s_0 \rho_0 U_{n-1}(\tau), \tau \in [-1, +1], \tag{5.5}$$

где $s_0 = \pm 1$, $U_{n-1}(\tau) = 2^{n-1}\tau^{n-1} + \sum_{p=0}^{n-2} \vartheta_p \tau^p$ — многочлен Чебышёва второго рода $(n-1)$-й степени, ϑ_p, $p = 0, 1, ..., n-2$, — его коэффициенты. Например: $U_0(\tau) = 1$; $U_1(\tau) = 2\tau$; $U_2(\tau) = 4\tau^2 - 1$; $U_3(\tau) = 8\tau^3 - 4\tau$; $U_4(\tau) = 16\tau^4 - 12\tau^2 + 1$ и т. д. согласно рекуррентной формуле: $U_{n+1}(\tau) = 2\tau U_n(\tau) - U_{n-1}(\tau)$ $(n > 0)$. Следует отметить, что в (5.5) с учетом замены (3.6) $\rho_0 = \frac{2}{T}\bar{\rho}_0$, где $\bar{\rho}_0 = || h_0(\cdot) ||_{L_1[t_0, t_f]}$ — норма минимального элемента для решения задачи (2.6).

Приравнивая далее с учетом (5.5) соответствующие коэффициенты в (5.2) и умноженные на $s_0\rho_0/2$ коэффициенты многочлена $U_{n-1}(\tau)$, получим относительно множителей l_{k0}, $k = 1, 2, ..., n$, развернутую систему уравнений (5.4), а именно:

$$(-1)^m \sum_{k=1}^{n-m} \frac{C_{n-k}^m}{(n-k)!} l_{k0} = \frac{1}{2} s_0 \vartheta_m \rho_0, m = 0, 1, ..., n-1. \tag{5.6}$$

Вводя в рассмотрение вектор-столбцы $\vartheta = (-1)^{n-1}\mathrm{col}\,(\vartheta_{n-1}, \vartheta_{n-2}, ..., \vartheta_1, \vartheta_0)$ и $l_0 = \mathrm{col}\,(l_{10}, \; l_{20}, ..., \; l_{n0})$, перепишем систему (5.6) в матричном виде (5.4):

$$M\, l_0 = \frac{1}{2} s_0 \rho_0 \vartheta. \tag{5.7}$$

С учетом условия $l_0^{\mathrm{T}}\, c = \sum_{k=1}^n l_{k0}\, c_k = 1$ найдем для задачи (2.6) значение нормы минимального элемента:

$$\rho_0 = 2\; |c^{\mathrm{T}} M^{-1} \vartheta|^{-1}, \tag{5.8}$$

а также s_0= sign $(c^{\mathrm{T}} M^{-1}\vartheta)$.

Оптимальное управление в рассматриваемой задаче можно определить из условий (2.7), (2.8), а именно с учетом (5.8) здесь имеет место:

$$u^*(\tau) = \frac{1}{\rho_0} \mathrm{sign}\; \mathrm{g}_0(\tau) = \frac{1}{\rho_0} \mathrm{sign}\; [s_0\, U_{n-1}(\tau)], \tau \in [-1, +1], \tag{5.9}$$

где $g_0(\tau) = l_0^{\mathrm{T}} h(1-\tau)$, а $l_0^{\mathrm{T}}\, c = 1$. При этом получим $J_\infty^{\min} = \frac{1}{\rho_0} = \; |c^{\mathrm{T}} M^{-1} \vartheta|$.

Рассмотрим теперь условия существования вырожденного решения для задачи (2.6). Итак, с учетом (5.4), (5.7) и $c^{\mathrm{T}} l_0 = 1$ в общем и, соответственно, в регулярном случае должно быть:

$$\frac{1}{2} s_0\, \rho_0\, c^{\mathrm{T}} M^{-1} \vartheta = 1. \tag{5.10}$$

Если векторы c и $p = M^{-1}\vartheta$ ортогональны, то $c^{\mathrm{T}} p = 0$ и, соответственно, в этом случае существует вырожденное решение задачи (2.6).

При m-кратной вырожденности задачи (2.6) соответствующие этому случаю условия с учетом (4.2) и по аналогии с (4.7), (4.8) можно записать так:

$$c^{\mathrm{T}} M_n^{-1} \vartheta_{n-j} = 0, j = 0, 1, ..., m-1, c^{\mathrm{T}} M_n^{-1} \vartheta_{n-m} \neq 0,$$

где ϑ_{n-j}= col $(\underbrace{0, ..., 0}_{j\ \text{раз}}, \Delta\vartheta_{n-j}) \in \mathrm{R}^n$, а $\Delta\vartheta_{n-j}$ — вектор коэффициентов многочлена $U_{n-j-1}(\tau)$ $(j = 0, 1, ..., n-1)$. Если ввести обозначение $p_{n-j} = M_n^{-1} \vartheta_{n-j}$, то условия m-кратной вырожденности задачи (2.6) можно переписать в виде

$$c^{\mathrm{T}} p_{n-j} = 0, j = 0, 1, ..., m-1, c^{\mathrm{T}} p_{n-m} \neq 0. \tag{5.11}$$

В m-кратно вырожденной задаче (2.6) оптимальное управление (5.9) имеет только $(n-m)$ подынтервалов, на которых оно постоянно. Поскольку свойства системы векторов p_{n-j} в (5.11) аналогичны свойствам q_{n-j} из (4.9), то условия (5.11) также можно переписать в виде, аналогичном (4.10).

Пример 2. Рассмотрим решение задачи (1.4), (1.5), (1.11) при следующих условиях в (1.2), (1.3): $t_0 = -\frac{T}{2}$; $t_f = \frac{T}{2}$; $x_{20} = \ldots = x_{n0} = 0$ и $x_{3f} = \ldots = x_{n\,f} = 0$, $x_{1f} = \gamma_T$, $0 < \gamma_T \leqslant \pi$. Тогда из (1.8 $c_1 = \gamma_T$, $c_2 = \ldots = c_n = 0$, то есть $l_{10} = \frac{1}{\gamma_T}$ и $l_{k0} \in \mathrm{R}^1$, $k = 2, 3, ..., n$. Вычислим минимальный элемент задачи (2.6)

$$h_0(t) = \frac{1}{\gamma_T (n-1)!} \left(\frac{T}{2}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{2t}{T}\right)^{n-1} +$$

$$+\frac{l_{20}}{(n-2)!}\left(\frac{T}{2}\right)^{n-2}\left(1-\frac{2t}{T}\right)^{n-2}+...+\frac{l_{n-1,0}T}{2!}\left(1-\frac{2t}{T}\right)+l_{n0}.$$

Отсюда с учетом замены $t=\frac{T}{2}\tau$ получим $g_0(\tau)$ (5.2):

$$g_0(\tau)=\frac{1}{(n-1)!\,\gamma_T}\left(\frac{T}{2}\right)^{n-1}(1-\tau)^{n-1}+$$

$$+\frac{l_{20}}{(n-2)!}\left(\frac{T}{2}\right)^{n-2}(1-\tau)^{n-2}+...+\frac{l_{n-1,0}T}{2!}(1-\tau)+l_{n0}=$$

$$=\frac{s_0}{2^{n-1}(n-1)!\,\gamma_T}\left(\frac{T}{2}\right)^{n-1}(2^{n-1}\tau^{n-1}+\vartheta_{n-2}\tau^{n-2}+...+\vartheta_1\tau+\vartheta_0)=$$

$$=\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!\,\gamma_T}\left(\frac{T}{2}\right)^{n-1}|\,U_{n-1}(\tau)\,|=\frac{T^{n-1}}{2^{2(n-1)}(n-1)!\,\gamma_T}|\,U_{n-1}(\tau)\,|,$$

где $s_0=(-1)^{n-1}$. Тогда с учетом (5.5), а также $d\tau=\frac{2dt}{T}$ и $||\,U_m(\cdot)\,||_{L_1[-1,+1]}=2$ получим норму минимального элемента для задачи (2.6):

$$\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}}|\,h_0(t)\,|dt=\frac{T^n}{2^{2(n-1)}(n-k)!\gamma_T}=\bar{\rho}_0,$$

и, стало быть, тогда имеет место:

$$\bar{\rho}_0=\frac{1}{u_{\max}}=\frac{T^n}{2^{2(n-1)}(n-1)!\gamma_T},$$

а отсюда — при наличии ограничения (5.1) – следует, что решение задачи в данном примере существует только тогда, когда длительность маневра задана не меньше, чем

$$T_{\min}=\sqrt[n]{\frac{2^{2(n-1)}(n-1)!\gamma_T}{u_{\max}}}. \tag{5.12}$$

В частности, при $n=2$ из (5.12) получим: $T_{\min}=\sqrt{\frac{4\gamma_T}{u_{\max}}}$ [17], [18], а при $n=$ $=3$: $T_{\min}=\sqrt[3]{\frac{32\gamma_T}{u_{\max}}}$ [11], что отвечает значениям быстродействия в задачах управления с исходными данными настоящего примера при учете (5.1). Кроме того, полный импульс для оптимального управления согласно (5.12) будет равен $u_{\max}T=\frac{2^{2(n-1)}(n-1)!\gamma_T}{T^{n-1}}$. Вычисляя для сравнения $J_1^{\min}$ (3.14) для исходных данных примера, получим $J_1^{\min}=\frac{1}{2}u_{\max}T=\frac{2^{2n-3}(n-1)!\gamma_T}{T^{n-1}}$. $\square$

Пример 3. Рассмотрим еще раз решение задачи (1.4), (1.5), (1.11), но при следующих исходных данных [9]: $n=3$; $t_0=-\frac{T}{2}$; $t_f=\frac{T}{2}$; $x_{10}=\gamma_0$, $0<\gamma_0\leqslant\pi$; $x_{20}=\omega_0$; $x_{30}=\varepsilon_0$, где γ_0, ω_0, ε_0 — некоторые заданные константы, а также $x_{1f}=x_{2f}=x_{3f}=0$. Тогда из (1.8) получим следующие значения моментов:

$$c_1=-(\gamma_0+T\omega_0+\frac{1}{2}T^2\varepsilon_0);c_2=-(\omega_0+T\varepsilon_0);c_3=-\varepsilon_0. \tag{5.13}$$

Минимальный элемент задачи

$$h_0(t)=\frac{l_{10}T^2}{8}\left(1-\frac{2t}{T}\right)^2+\frac{l_{20}T}{2}\left(1-\frac{2t}{T}\right)+l_{30}, \tag{5.14}$$

где l_{10}, l_{20}, l_{30} — множители, удовлетворяющие условию $c_1 l_{10} + c_2 l_{20} + c_3 l_{30} = 1$. Вводя новую независимую переменную $\tau = \frac{2t}{T}$, перепишем (5.14) в виде

$$h_0\left(\frac{T\tau}{2}\right) = g_0(\tau) = \frac{l_{10}T^2}{8}(1-\tau)^2 + \frac{l_{20}T}{2}(1-\tau) + l_{30} =$$

$$= \frac{l_{10}T^2}{8}\tau^2 - \frac{T}{4}(T\,l_{10} + 2l_{20})\tau + \frac{l_{10}T^2}{8} + \frac{l_{20}T}{2} + l_{30} =$$

$$= \frac{l_{10}T^2}{32}\left[4\tau^2 - \frac{8}{l_{10}T}\left(T\,l_{10} + 2l_{20}\right)\tau + \frac{32}{l_{10}T^2}\left(\frac{l_{10}T^2}{8} + \frac{l_{20}T}{2} + l_{30}\right)\right].$$

При $l_{10} \neq 0$ этот многочлен с точностью до множителя $\frac{s_0\, l_{10}\, T^2}{32}$ $(s_0 = \pm 1)$ должен совпадать с многочленом Чебышёва второго рода $U_2(\tau) = 4\tau^2 - 1$, то есть тогда имеет место $g_0(\tau) = \frac{s_0\, l_{10}\, T^2}{32}(4\tau^2 - 1)$ и, соответственно, получим систему уравнений относительно l_{10}, l_{20} и l_{30}:

$$c_1 l_{10} + c_2 l_{20} + c_3 l_{30} = 1; T\,l_{10} + 2l_{20} = 0; \frac{5T^2}{32}l_{10} + \frac{T}{2}l_{20} + l_{30} = 0.$$

Решая эту систему по правилу Крамера [15], получим

$$l_{10} = \frac{D_1}{D_0}; l_{20} = \frac{D_2}{D_0}; l_{30} = \frac{D_3}{D_0},$$

где $D_0 = 2c_1 - T\,c_2 + \frac{3T^2}{16}c_3$, $D_1 = 2$, $D_2 = -T$, $D_3 = \frac{3T^2}{16}$, и, стало быть, здесь

$$l_{10} = 2\,\left(2c_1 - T\,c_2 + \frac{3T^2}{16}c_3\right)^{-1},\ \ \rho_0 = \frac{T^2}{16}\,\left|2c_1 - T\,c_2 + \frac{3T^2}{16}c_3\right|^{-1},$$

а также $s_0 = \operatorname{sign}\left(2c_1 - T\,c_2 + \frac{3T^2}{16}c_3\right)$, $u_{\max} = \frac{16}{T^2}\left|c_1 - c_2T + c_3\frac{3T^2}{16}\right|$. Очевидно, что здесь при $\rho_0 \to \infty$ $u_{\max} \to 0$, что имеет место с учетом (5.13) при $T \to T_*$, где $T_* = -\frac{8\omega_0}{3\varepsilon_0} \pm \frac{\sqrt{64\omega_0^2 - 96\gamma_0\varepsilon_0}}{3\varepsilon_0}$ (если $2\omega_0^2 - 3\gamma_0\varepsilon_0 \geqslant 0$ и $T_* > 0$).

В вырожденном случае, когда $l_{10} = 0$, многочлен (5.14) с точностью до множителя будет равен $U_1(\tau) = 2\tau$. Тогда здесь имеет место:

$$h_0\left(\frac{T\tau}{2}\right) = g_0(\tau) = \frac{l_{20}T}{2}(1-\tau) + l_{30} = -\frac{l_{20}T}{2}\tau + \frac{l_{20}T}{2} + l_{30}.$$

Соответственно отсюда получим

$$l_{20} = \frac{2}{2c_2 - T\,c_3}; l_{30} = -\frac{T}{2c_2 - T\,c_3}; s_0 = \operatorname{sign}\left(2c_2 - T\,c_3\right); \rho_0 = \frac{T}{|\,2c_2 - T\,c_3\,|}.$$

Если же $l_{10} = 0$ и $l_{20} = 0$, то $l_{30} = c_3^{-1}$, $s_0 = \operatorname{sign} c_3$ и $\rho_0 = 2\,|\,c_3|^{-1}$.

Следует отметить, что в данном примере, как и в примере 2, в общем случае задача (1.4), (1.5), (1.11) не эквивалентна соответствующей задаче на быстродействие, что обусловлено симметричным расположением на интервале управления корней многочлена Чебышёва и соответствующей им структуре программы оптимального управления. Поэтому для заданной длительности маневра T в задаче (1.4), (1.5), (1.11) и получаемого для нее значения $u_{\max}$ во взаимной к ней задаче на быстродействие, в которой задается ограничение (5.1), всегда имеет место следующая оценка для быстродействия: $T_{\min} \leqslant T$. $\square$

Заключение

Рассмотрены задачи оптимального управления, имеющие прикладное значение для решения некоторых задач управления ориентацией космических аппаратов, а именно: задачи оптимального управления n-кратным интегратором с произвольными граничными условиями и с функционалами типа нормы в $L_q[t_0, t_f]$, $q = 1, 2, \infty$, которые решались с помощью принципа максимума Н.Н. Красовского (методов моментов). Во-первых, было получено полное решение задачи на минимум "обобщенной работы" управления, которая сводится к L_2-проблеме моментов. Во-вторых, решена задача на минимум "расходов" или полного импульса управления, которая сводится к L_∞-проблеме моментов и для которой показано, что оптимальное управление является δ-импульсным управлением. Получены условия существования регулярного решения задачи в зависимости от граничных условий, а также условия существования ее вырожденных решений. В-третьих, получено общее решение задачи на минимум максимальных по модулю значений управляющего параметра (как L_1-проблемы моментов) и условия существования как регулярных, так и вырожденных решений этой задачи. Приведены примеры решения задач, которые сводятся к L_∞- и L_1-проблемам моментов. Установлена неэквивалентность задачи на минимум максимальных управлений соответствующей задаче на быстродействие.

Литература

[1] Абгарян К.А. Матричное исчисление с приложениями в теории динамических систем. М.: Физматлит, 1994. 544 с.

[2] Красовский Н.Н. Теория управления движением: линейные системы. М.: Наука, 1965. 476 с.

[3] Мороз А.И. Курс теории систем. М.: Высшая школа, 1987. 304 с.

[4] Теория автоматического управления: в 2 ч. Ч. II. Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления / А.А. Воронов, Д.П. Ким, В.М. Лохин [и др.]; под ред. А.А. Воронова. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Высшая школа, 1986. 504 с.

[5] Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.

[6] Синяков А.Н. Системы управления упругими подвижными объектами. Л.: Изд-во ЛГУ, 1981. 200 с.

[7] Коробов В.И., Скляр Г.М. Оптимальное быстродействие и степенная проблема моментов // Математический сборник. 1987. Т. 134(176). № 2(10). С. 186–206.

[8] Коробов В.И., Скляр Г.М. Точное решение одной n-мерной задачи быстродействия // Доклады АН СССР. 1988. Т. 296. № 6. С. 1304–1308.

[9] Уиднолл В.С. (Widnall W.S.) Оптимальный закон управления вектором тяги в автопилоте лунного модуля космического корабля "Аполлон" // Управление в космосе: труды III Международного симпозиума ИФАК по автоматическому управлению в мирном использовании космического пространства. М.: Наука, 1972. Т. 2. С. 36–49.

[10] Горелов Ю.Н., Морозова М.В. Оптимальное по минимуму расходов управление тройным интегратором // Вестник Самарского государственного университета. 2012. № 9(100). С. 118–129.

[11] Горелов Ю.Н., Морозова М.В. Синтез оптимальных управлений парциальными вращениями космического аппарата методом моментов // Известия СНЦ РАН. 2012. Т. 14. № 6. С. 166–176.

[12] On Optimization of Attitude Control Programs for Earth Remote Sensing Satellite / Yu.N. Gorelov [et al.] // Gyroscopy and Navigation. 2014. Vol. 5. № 2. P. 90–97.

[13] Горелов Ю.Н. К решению задачи синтеза оптимального управления переориентацией космического аппарата при перенацеливании аппаратуры зондирования одним методом последовательных приближений // Известия СНЦ РАН. 2014. Т. 16. № 4. С. 127–131.

[14] Данилов Ю.А. Многочлены Чебышева. М.: Эдиториал УРСС, 2003. 160 с.

[15] Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.

[16] Корнейчук Н.П., Моторный В.П. Наименее уклоняющийся от нуля многочлен // Математическая энциклопедия / гл. ред. И.М. Виноградов. М.: Советская энциклопедия, 1982. Т. 3. С. 874–875.

[17] Лоскутов Е.М. К задаче оптимальной переориентации космического аппарата // Космические исследования. 1973. Т. 11. № 2. С. 180–187.

[18] Горелов Ю.Н., Титов Б.А. Об оптимальной переориентации вращающегося космического аппарата // Космические исследования. 1978. Т. 16. № 2. С. 157–162.

References

[1] Abgaryan K.A. Matrix calculous with applications in the theory of dynamic systems. M., Fizmatlit, 1994, 544 p. [in Russian].

[2] Krasovsky N.N. Motion control theory: linear systems. M., Nauka, 1965, 476 p. [in Russian].

[3] Moroz A.I. Course of systems theory. M., Vysshaia shkola, 1987, 304 p. [in Russian].

[4] Voronov A.A., Kim D.P., Lokhin V.M. [et al.] Theory of automatic control. In 2 parts. Part II. Theory of nonlinear and special systems of automatic control. A.A. Voronov (Ed.). 2nd ed., revised and enlarged. M., Vysshaia shkola, 1986, 504 p. [in Russian].

[5] Butkovskij A.G. Methods of control of systems with distributed parameters. M., Nauka, 1975, 568 p. [in Russian].

[6] Sinyakov A.N. Control system of elastic moving objects. L., Izd-vo LGU, 1981, 200 p. [in Russian].

[7] Korobov V.I., Sklyar G.M. Optimality and the power moment problem. *Matematicheskii sbornik* [Sbornik: Mathematics], 1987, Vol. 134(176), No. 2(10), pp. 186–206 [in Russian].

[8] Korobov V.I., Sklyar G.M. Exact solution of an n-dimensional optimal control problem. *Doklady AN SSSR* [Proceedings of the USSR Academy of Sciences], 1988, Vol. 296, no. 6, p.1304–1308 [in Russian]

[9] Widnall W.S. The optimal law for the thrust control vector in the autopilot of the lunar module spacecraft "Apollo". *Upravlenie v kosmose. Trudy III Mezhdunarodnogo simpoziuma IFAK po avtomaticheskomu upravleniiu v mirnom ispol'zovanii kosmicheskogo prostranstva* [Control in space. Proceedings of the III International Symposium IFAC on automatic control in the peaceful uses of outer space], Vol. 2. M., Nauka, 1972, pp. 36–49 [in Russian].

[10] Gorelov Yu.N., Morozova M.V. Optimal control of the threefold integrator according to minimum consumption. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2012, no. 9(100), pp. 118–129 [in Russian].

[11] Gorelov Yu.N., Morozova M.V. Synthesis of optimal control of spacecraft partial rotation by moments method. *Izvestiia SamNTs RAN* [Proceedings of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences], 2012, Vol. 14, no. 6, pp. 166–176 [in Russian].

[12] Gorelov Yu.N. [et al.] On Optimization of Attitude Control Programs for Earth Remote Sensing Satellite. *Gyroscopy and Navigation*, 2014, Vol. 5, No. 2, pp. 90–97 [in English].

[13] Gorelov Yu.N. On the solution of the optimal control synthesis problem of reorientation in sensing hardware redirection by one successive approxmations method. *Izvestiia SamNTs RAN* [Proceedings of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences], 2014, Vol. 16, no. 4, pp. 127–131 [in Russian].

[14] Danilov Yu.A. Chebyshev Polynomials. M., Editorial URSS, 2003, 160 p. [in Russian].

[15] Voevodin V.V., Kuznetsov Yu.A. Matrices and calculations. M., Nauka, 1984, 320 p. [in Russian].

[16] Korneichuk N.P., Motorny V.P. The Least deviating from zero polynomial. *Matematicheskaya entsiklopediya* [Encyclopedia of Mathematics]. I.M. Vinogradov (Ed.). M., Izd-vo "Sovetskaia entsiklopediia ", 1982, Vol. 3, pp. 874–875 [in Russian].

[17] Loskutov E.M. On the optimal reorientation problem of the spacecraft. *Kosmicheskie issledovaniia* [Space researches], 1973, Vol. 11, No. 2, pp. 180–187 [in Russian].

[18] Gorelov Yu.N., Titov B.A. On optimal reorientation of a rotating spacecraft. *Kosmicheskie issledovaniia* [Space researches], 1978, Vol. 16, No. 2, pp. 157–162 [in Russian].

Yu.N. Gorelov[3]

ON THE OPTIMAL CONTROL OF THE N-FOLD INTEGRATOR[4]

The optimal control problem n-fold integrator with arbitrary boundary conditions and functionals of type norms in spaces of $L_q[t_0, t_f]$, $q = 1, 2, \infty$ is considered. First, it is the problem of minimizing the total controling impulse, which boils down to L_∞- problem of moments; secondly, the problem of minimizing the maximum values of the control parameter (represented as L_1-problem of moments), and, finally, it is the problem of minimizing "generalized work control" (as L_2-problem of moments). Solving problems is obtained by using the method of moments in the form of the maximum principle by N.N. Krasovsky. It is shown that optimal control in the first problem is approximated by a δ-impulsive control. Conditions for the existence of regular and singular solutions to this problem depending on the boundary conditions are also specified. The general solution of the second problem, which is the conditions for existence of regular and singular solutions and not equivalence with the mutual problem of time-optimal control is obtained. Examples of solution for the considered control tasks are given. In case of a quadratic functional general relations required for constructing a program optimal control were obtained.

Key words: the n-fold integrator, optimal control, problem of moments, maximum principle by N.N. Krasovsky, Chebyshev polynomials.

Статья поступила в редакцию 12/IX/2015.
The article received 12/IX/2015.

[3] *Gorelov Yury Nickolaevich* (`yungor07@mail.ruu`), Institute of Modeling and Control Sciences, Samara State Aerospace University, 34, Moskovskoye Shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

[4] The research is carried out with support from the Russian Foundation for Basic Research, project № 13-08-97019 р_поволжье_а.