

УДК 531.01+531.552

*М.В. Шамолин*<sup>1</sup>**СЛУЧАИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ДВИЖЕНИЮ МАЯТНИКА НА ПЛОСКОСТИ<sup>2</sup>**

В данной работе систематизируются результаты по исследованию уравнений плоскопараллельного движения закрепленного твердого тела-маятника, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Параллельно рассматривается задача о плоскопараллельном движении свободного твердого тела, также находящегося в подобном поле сил. При этом на данное свободное тело также действует неконсервативная следящая сила, заставляющая во все время движения величину скорости некоторой характерной точки твердого тела оставаться постоянной во времени, что означает наличие в системе неинтегрируемой сервосвязи. Полученные результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде. Указаны нетривиальные механические и топологические аналогии.

**Ключевые слова:** твердое тело, сопротивляющаяся среда, динамическая система, фазовый портрет, случай интегрируемости.

**1. Модельные предположения**

Рассмотрим однородную плоскую пластину  $AB$ , симметричную относительно плоскости, перпендикулярной плоскости фигуры и проходящей через державку  $OD$ . Пластина жестко закреплена перпендикулярно державке  $OD$ , находящейся на цилиндрическом шарнире  $O$ , и обтекается однородным потоком среды (рис. 1). В этом случае тело представляет собой физический маятник, в котором пластина  $AB$  и ось шарнира перпендикулярны плоскости движения. Поток среды движется из бесконечности с постоянной скоростью  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty \neq \mathbf{0}$ , а державка сопротивления не создает.

Предположим, что суммарная сила  $\mathbf{S}$  воздействия потока среды на пластину направлена параллельно державке, а точка  $N$  приложения этой силы определяется, по крайней мере, углом атаки  $\alpha$ , который измеряется между вектором скорости  $\mathbf{v}_D$  точки  $D$  относительно потока и державкой  $OD$  (рис. 1, при этом на рисунке показан угол атаки, равный  $\pi - \alpha$ ), а также приведенной угловой скоростью

$$\omega \cong \frac{l\Omega}{v_D}, \quad v_D = |\mathbf{v}_D|,$$

<sup>1</sup>© Шамолин М.В., 2015

Шамолин Максим Владимирович (shamolin@rambler.ru, shamolin@imec.msu.ru), Институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, 119192, Российская Федерация, г. Москва, Мичуринский пр., 1.

<sup>2</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 12-01-00020-а).

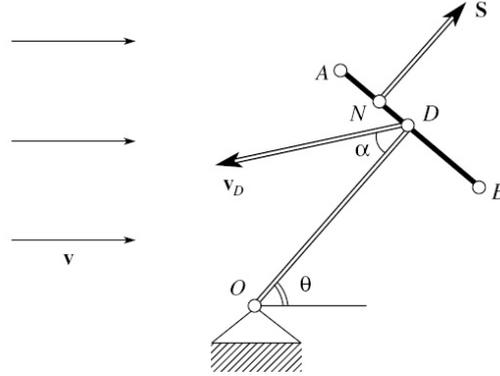


Рис. 1. Закрепленный маятник на цилиндрическом шарнире в потоке набегающей среды

где  $l$  — длина державки,  $\Omega$  — алгебраическое значение проекции угловой скорости маятника на ось шарнира.

Подобные условия возникают при использовании модели струйного обтекания плоских тел [1–3].

Таким образом, примем, что сила  $\mathbf{S}$  направлена по нормали к пластине в сторону, противоположную направлению скорости  $\mathbf{v}_D$ , и проходит через некоторую точку  $N$  пластины, смещенную от точки  $D$  вверх по потоку (см. также [3; 4]).

Вектор

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{OD}}{l} \quad (1.1)$$

определяет ориентацию державки. Тогда

$$\mathbf{S} = -s(\alpha)v_D^2 \mathbf{e}, \quad (1.2)$$

где

$$s(\alpha) = s_1(\alpha) \text{sign} \cos \alpha, \quad (1.3)$$

где коэффициент сопротивления  $s_1 \geq 0$  зависит лишь от угла атаки  $\alpha$ . В силу свойств симметрии пластины относительно точки  $D$  функция  $s(\alpha)$  является четной.

Пусть  $Dx_1x_2 = Dxy$  — система координат, жестко связанная с телом, при этом ось  $Dx = Dx_1$  имеет направляющий вектор  $\mathbf{e}$  (см. (1.1)), а ось  $Dx_2 = Dy$  сонаправлена с вектором  $\mathbf{DA}$  (рис. 1). На этом же рисунке показан и  $\theta = \xi$  — угол отклонения маятника.

Пространством положений такого физического маятника является окружность (одномерная сфера)

$$\mathbf{S}^1\{\xi \in \mathbf{R}^1 : \xi \bmod 2\pi\}, \quad (1.4)$$

а фазовым пространством — касательное расслоение окружности,

$$T_*\mathbf{S}^1\{(\dot{\xi}; \xi) \in \mathbf{R}^2 : \xi \bmod 2\pi\} \quad (1.5)$$

— двумерный цилиндр.

Свяжем с величиной  $\Omega$  кососимметрическую матрицу

$$\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Omega} \in \text{so}(2). \quad (1.6)$$

Расстояние от центра пластины  $D$  до центра давления (точки  $N$ , рис. 1) будет иметь вид

$$|\mathbf{r}_N| = r_N = DN \left( \alpha, \frac{l\Omega}{v_D} \right), \quad (1.7)$$

где

$$\mathbf{r}_N = \{0, x_{2N}\} = \{0, y_N\}$$

в системе  $Dx_1x_2 = Dxy$ .

Сразу же заметим, что используемая модель воздействия потока среды на закрепленный маятник аналогична построенной модели для свободного тела и в дальнейшем учитывает влияние вращательной производной момента силы воздействия среды по угловой скорости маятника (см. также [5–7]). Анализ задачи о физическом маятнике в потоке позволит обнаружить качественные аналогии в динамике частично закрепленных и свободных тел.

## 2. Группа динамических уравнений на алгебре Ли $so(2)$

Если  $I$  — центральный момент инерции тела-маятника, то общее уравнение его движения примет следующий вид:

$$I\dot{\Omega} = DN \left( \alpha, \frac{l\Omega}{v_D} \right) s(\alpha)v_D^2, \quad (2.1)$$

поскольку момент силы воздействия среды равен определителю следующей вспомогательной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} \\ -s(\alpha)v_D^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

где

$$\{-s(\alpha)v_D^2, 0\}$$

есть разложение силы  $\mathbf{S}$  воздействия среды в системе координат  $Dx_1x_2$ .

Поскольку размерность алгебры Ли  $so(2)$  равна 1, единственное уравнение (2.1) и составляет группу динамических уравнений на  $so(2)$ , а, попросту говоря, уравнение движения.

Видно, что в правую часть уравнения (2.1) прежде всего входит угол атаки, поэтому данное уравнение не является замкнутым. Для того чтобы получить полную систему уравнений движения маятника, необходимо к динамическому уравнению на алгебре Ли  $so(2)$  присоединить несколько групп кинематических уравнений.

## 3. Первая группа кинематических уравнений

Для получения полной системы уравнений движения нам потребуется группа кинематических уравнений, связывающих скорости точки  $D$  (формального центра пластины  $AB$ ) и набегающего потока:

$$\mathbf{v}_D = v_D \cdot \mathbf{i}_v(\alpha) = \tilde{\Omega} \begin{pmatrix} l \\ 0 \end{pmatrix} + (-v_\infty)\mathbf{i}_v(-\xi), \quad (3.1)$$

где

$$\mathbf{i}_v(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Равенство (3.1) выражает теорему сложения скоростей в проекциях на связанную систему координат  $Dx_1x_2$ .

Действительно, в левой части равенства (3.1) стоит скорость точки  $D$  маятника относительно потока в проекциях на связанную с маятником систему координат  $Dx_1x_2$ . При этом вектор  $\mathbf{i}_v(\alpha)$  — единичный вектор вдоль оси вектора  $\mathbf{v}_D$ . Вектор  $\mathbf{i}_v(\alpha)$  является образом единичного вектора вдоль оси  $Dx_1$ , повернутого около вертикали (оси  $Dx_3$ ) на угол  $\alpha$ , и имеет разложение (3.2).

В правой части равенства (3.1) стоит сумма скоростей точки  $D$  при повороте маятника (первое слагаемое) и движения потока (второе слагаемое). При этом в первом слагаемом имеются координаты вектора  $\mathbf{OD} = \{l, 0\}$  в системе координат  $Dx_1x_2$ .

На втором слагаемом правой части равенства (3.1) остановимся подробнее. В нем имеются координаты вектора  $(-\mathbf{v}_\infty) = \{-v_\infty, 0\}$  в неподвижном пространстве. Чтобы его записать в проекциях на связанную систему координат  $Dx_1x_2$ , необходимо произвести (обратный) поворот маятника на угол  $(-\xi)$ , что алгебраически эквивалентно умножению величины  $(-v_\infty)$  на вектор  $\mathbf{i}_v(-\xi)$ .

Таким образом, первая группа кинематических уравнений (3.1) в нашем случае примет следующий вид:

$$\begin{aligned} v_D \cos \alpha &= -v_\infty \cos \xi, \\ v_D \sin \alpha &= l\Omega + v_\infty \sin \xi. \end{aligned} \quad (3.3)$$

## 4. Вторая группа кинематических уравнений

Нам также потребуется группа кинематических уравнений, связывающих тензор угловой скорости  $\tilde{\Omega}$  и координаты  $\xi, \dot{\xi}$  фазового пространства (1.5) исследуемого маятника — касательного расслоения  $T_*\mathbf{S}^1\{\dot{\xi}; \xi\}$ .

Проведем рассуждения в стиле, допускающем любую размерность. Искомые уравнения получаются из следующих двух групп соотношений. Поскольку движение тела формально происходит в евклидовом пространстве  $\mathbf{E}^n, n = 2$ , сначала выражается набор, состоящий из фазовой переменной  $\Omega$ , через новую переменную  $z_1$  (из набора  $z$ ):

$$\Omega = z_1. \quad (4.1)$$

Затем вместо переменной  $z$  подставляется следующая зависимость:

$$z_1 = \dot{\xi}. \quad (4.2)$$

Таким образом, две группы уравнений (4.1) и (4.2) дают вторую группу кинематических уравнений:

$$\Omega = \dot{\xi}. \quad (4.3)$$

Видно, что три группы соотношений (2.1), (3.3), (4.3) образуют замкнутую систему уравнений. В эти три группы уравнений входят две следующие функции:

$$r_N = DN \left( \alpha, \frac{l\Omega}{v_D} \right), \quad s(\alpha). \quad (4.4)$$

При этом функция  $s$  считается зависимой лишь от  $\alpha$ , а функция  $r_N = DN$  может зависеть, наряду с углом  $\alpha$ , вообще говоря, и от приведенной угловой скорости  $w \cong l\Omega/v_D$ .

## 5. Задача о движении свободного тела при наличии следящей силы

Параллельно рассматриваемой задаче о движении закрепленного тела рассмотрим плоскопараллельное движение свободного симметричного твердого тела с передним плоским торцом (одномерной пластиной  $AB$ ) в поле силы сопротивления в условиях квазистационарности [5; 8; 9] с той же моделью воздействия среды (рис. 2).

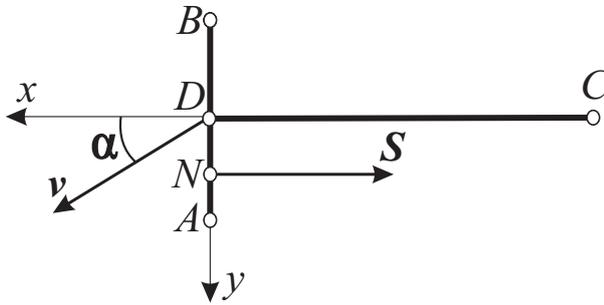


Рис. 2. Плоскопараллельное движение свободного симметричного твердого тела в сопротивляющейся среде

Если  $(v, \alpha)$  — полярные координаты вектора скорости некоторой характерной точки  $D$  твердого тела ( $D$  — центр пластины  $AB$ ),  $\Omega$  — значение его угловой скорости,  $I, m$  — инерционно-массовые характеристики, то динамическая часть уравнений движения тела, при котором касательные силы воздействия среды на пластину отсутствуют, примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{v} \cos \alpha - \dot{\alpha} v \sin \alpha - \Omega v \sin \alpha + \sigma \Omega^2 &= \frac{F_x}{m}, \\ \dot{v} \sin \alpha + \dot{\alpha} v \cos \alpha + \Omega v \cos \alpha - \sigma \dot{\Omega} &= 0, \\ I \dot{\Omega} &= y_N \left( \alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) v^2, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где

$$F_x = -S, \quad S = s(\alpha) v^2, \quad \sigma = CD, \quad (5.2)$$

при этом

$$\left( 0, y_N \left( \alpha, \frac{\Omega}{v} \right) \right) \quad (5.3)$$

есть координаты точки  $N$  приложения силы  $\mathbf{S}$  в системе координат  $Dx_1x_2 = Dxy$ , связанной с телом (рис. 2).

Первые два уравнения системы (5.1) описывают движение центра масс на двумерной евклидовой плоскости  $\mathbf{E}^2$  в проекциях на систему координат  $Dx_1x_2$ . При этом  $Dx_1 = Dx$  — срединный перпендикуляр к пластине, проходящий через центр масс  $C$  симметричного тела, а  $Dx_2 = Dy$  — ось, выбранная вдоль пластины. Третье же уравнение системы (5.1) получено из теоремы об изменении кинетического момента тела в проекции на ось, перпендикулярную рисунку.

Таким образом, фазовым пространством системы динамических уравнений (5.1) третьего порядка является прямое произведение

$$\mathbf{R}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \text{so}(2) \quad (5.4)$$

двумерного цилиндра на алгебру Ли  $\mathfrak{so}(2)$ . При этом, поскольку сила воздействия среды не зависит от положения тела на плоскости, система динамических уравнений (5.1) *отделяется от системы кинематических уравнений* и может быть рассмотрена самостоятельно (см. также [6; 10]).

### 5.1. Неинтегрируемая связь

Если рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы  $\mathbf{T}$ , проходящей через центр масс и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства (см. также [11])

$$v \equiv \text{const}, \quad (5.5)$$

то в системе (5.1) вместо  $F_x$  будет стоять величина

$$T - s(\alpha)v^2. \quad (5.6)$$

В результате соответствующего выбора величины  $T$  следящей силы можно формально добиться во все время движения выполнения равенства (5.5) [12]. Действительно, формально выражая величину  $T$  в силу системы (5.1), получим при  $\cos \alpha \neq 0$ :

$$T = T_v(\alpha, \Omega) = m\sigma\Omega^2 + s(\alpha)v^2 \left[ 1 - \frac{m\sigma}{I} y_N \left( \alpha, \frac{\Omega}{v} \right) \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right]. \quad (5.7)$$

На данную процедуру можно посмотреть с двух позиций. Во-первых, произошло преобразование системы при помощи наличия в системе следящей силы (управления), обеспечивающей рассмотрение интересующего нас класса движений (5.5). Во-вторых, на это все можно посмотреть как на процедуру, позволяющую понизить порядок системы. Действительно, система (5.1) в результате действий порождает независимую систему второго порядка следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}v \cos \alpha + \Omega v \cos \alpha - \sigma\dot{\Omega} &= 0, \\ I\dot{\Omega} &= y_N \left( \alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2, \end{aligned} \quad (5.8)$$

в которой к постоянным параметрам, указанным выше, добавляется параметр  $v$ .

Как видно из (5.8), на многообразии

$$O = \left\{ (\alpha, \Omega) \in \mathbf{R}^2 : \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z} \right\} \quad (5.9)$$

нельзя однозначно разрешить систему относительно  $\dot{\alpha}$ . Формально, таким образом, на многообразии (5.9) происходит нарушение теоремы единственности.

Из этого следует, что система (5.8) вне и только вне многообразия (5.9) эквивалентна системе

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -\Omega + \frac{\sigma v}{I} \frac{y_N \left( \alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)}{\cos \alpha}, \\ \dot{\Omega} &= \frac{1}{I} y_N \left( \alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)v^2. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Нарушение теоремы единственности для системы (5.8) на многообразии (5.9) происходит в следующем смысле: почти через любую точку из многообразия (5.9) проходит неособая фазовая траектория системы (5.8), пересекая многообразие (5.9) под прямым углом, а также существует фазовая траектория, полностью совпадающая во все моменты времени с указанной точкой. Но физически это различные траектории, так как им отвечают разные значения следящей силы. Покажем это.

Как показано выше, для поддержания связи вида (5.5) необходимо выбрать значение  $T$  при  $\cos \alpha \neq 0$  в виде (5.7).

Пусть

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \frac{y_N \left( \alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha)}{\cos \alpha} = L \left( \frac{\Omega}{v} \right). \quad (5.11)$$

Заметим, что  $|L| < +\infty$  тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \left| \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( y_N \left( \alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) \right) \right| < +\infty. \quad (5.12)$$

При  $\alpha = \pi/2$  нужная величина следящей силы найдется из равенства

$$T = T_v \left( \frac{\pi}{2}, \Omega \right) = m\sigma\Omega^2 - \frac{m\sigma Lv^2}{I}, \quad (5.13)$$

где значение  $\Omega$  произвольно.

С другой стороны, поддерживая с помощью следящей силы вращение вокруг некоторой точки  $W$  евклидовой плоскости  $\mathbf{E}^2$ , необходимо выбрать следящую силу в виде

$$T = T_v \left( \frac{\pi}{2}, \Omega \right) = \frac{mv^2}{R_0}, \quad (5.14)$$

где  $R_0$  — расстояние  $CW$ .

Равенства (5.13) и (5.14) определяют, вообще говоря, различные значения следящей силы  $T$  для почти всех точек многообразия (5.9), что и доказывает сделанное замечание.

## 5.2. Постоянная скорость центра масс

Если рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы  $\mathbf{T}$ , проходящей через центр масс и обеспечивающей во все время движения выполнение равенства (см. также [13; 14])

$$\mathbf{V}_C \equiv \mathbf{const}, \quad (5.15)$$

где  $\mathbf{V}_C$  — скорость центра масс, то в системе (5.1) вместо  $F_x$  должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил:

$$T - s(\alpha)v^2 \equiv 0. \quad (5.16)$$

Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы  $T$  в виде

$$T = T_v(\alpha, \Omega) = s(\alpha)v^2, \quad \mathbf{T} \equiv -\mathbf{S}. \quad (5.17)$$

Случай (5.17) выбора величины  $T$  следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы второго порядка после некоторого преобразования системы третьего порядка (5.1).

Действительно, пусть выполнено следующее условие на величину  $T$ :

$$T = T_v(\alpha, \Omega) = \tau_1 \left( \alpha, \frac{\Omega}{v} \right) v^2 + \tau_2 \left( \alpha, \frac{\Omega}{v} \right) \Omega v + \tau_3 \left( \alpha, \frac{\Omega}{v} \right) \Omega^2 = T_1 \left( \alpha, \frac{\Omega}{v} \right) v^2. \quad (5.18)$$

Систему (5.1) можно переписать в виде

$$\dot{v} + \sigma\Omega^2 \cos \alpha - \sigma \sin \alpha \left[ \frac{v^2}{I} y_N \left( \alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) \right] = \frac{T_1 \left( \alpha, \frac{\Omega}{v} \right) v^2 - s(\alpha)v^2}{m} \cos \alpha,$$

$$\dot{\alpha}v + \Omega v - \sigma \cos \alpha \left[ \frac{v^2}{I} y_N \left( \alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha) \right] - \sigma \Omega^2 \sin \alpha = \frac{s(\alpha)v^2 - T_1 \left( \alpha, \frac{\Omega}{v} \right) v^2}{m} \sin \alpha, \quad (5.19)$$

$$\dot{\Omega} = \frac{v^2}{I} y_N \left( \alpha, \frac{\Omega}{v} \right) s(\alpha).$$

Вводя далее новые безразмерные фазовую переменную и дифференцирование по формулам

$$\Omega = n_1 v \omega, \quad \langle \cdot \rangle = n_1 v \langle' \rangle, \quad n_1 > 0, \quad n_1 = \text{const}, \quad (5.20)$$

систему (5.19) можно привести к следующему виду:

$$v' = v \Psi(\alpha, \omega), \quad (5.21)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= -\omega + \sigma n_1 \omega^2 \sin \alpha + \left[ \frac{\sigma}{I n_1} y_N(\alpha, n_1 \omega) s(\alpha) \right] \cos \alpha - \\ &\quad - \frac{T_1(\alpha, n_1 \omega) - s(\alpha)}{m n_1} \sin \alpha, \\ \omega' &= \frac{1}{I n_1^2} y_N(\alpha, n_1 \omega) s(\alpha) - \omega \left[ \frac{\sigma}{I n_1} y_N(\alpha, n_1 \omega) s(\alpha) \right] \sin \alpha + \\ &\quad + \sigma n_1 \omega^3 \cos \alpha - \omega \frac{T_1(\alpha, n_1 \omega) - s(\alpha)}{m n_1} \cos \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

$$\Psi(\alpha, \omega) = -\sigma n_1 \omega^2 \cos \alpha + \left[ \frac{\sigma}{I n_1} y_N(\alpha, n_1 \omega) s(\alpha) \right] \sin \alpha + \\ + \frac{T_1(\alpha, n_1 \omega) - s(\alpha)}{m n_1} \cos \alpha.$$

Видно, что в системе третьего порядка (5.21), (5.22) может быть выделена независимая подсистема второго порядка (5.22), которая может быть самостоятельно рассмотрена на своем двумерном фазовом цилиндре.

В частности, при выполнении условия (5.17) только что рассмотренный прием выделения независимой подсистемы второго порядка также возможен.

## 6. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

Выберем функцию  $\mathbf{r}_N$  в следующем виде (пластина  $AB$  задается уравнением  $x_{1N} \equiv 0$ ):

$$\mathbf{r}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ x_{2N} \end{pmatrix} = R(\alpha) \mathbf{i}_N, \quad (6.1)$$

где

$$\mathbf{i}_N = \mathbf{i}_v \left( \frac{\pi}{2} \right) \quad (6.2)$$

(см. (3.2)).

В нашем случае

$$\mathbf{i}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Таким образом, выполнено равенство

$$x_{2N} = R(\alpha), \quad (6.4)$$

убеждающее нас о том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента сил от угловой скорости (имеется лишь зависимость от угла  $\alpha$ ).

Итак, для построения силового поля используется пара функций  $R(\alpha), s(\alpha)$ , информация о которых носит качественный характер. Подобно выбору аналитических функций типа Чаплыгина [11; 12], динамические функции  $s$  и  $R$  примем в следующем виде:

$$R(\alpha) = A \sin \alpha, \quad s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad A, B > 0. \quad (6.5)$$

### 6.1. Приведенные системы

**Теорема 6.1.** Совместные уравнения (2.1), (3.3), (4.3) при выполнении условий (6.1), (6.5) редуцируются к динамической системе на касательном расслоении (1.5) одномерной сферы (1.4).

Действительно, если ввести безразмерные параметр и дифференцирование:

$$b_* = ln_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I}, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v_\infty \langle ' \rangle, \quad (6.6)$$

то полученное уравнение будет иметь следующий вид:

$$\xi'' + b_* \xi' \cos \xi + \sin \xi \cos \xi = 0. \quad (6.7)$$

Фазовый портрет уравнения (6.7) ( $\alpha \leftrightarrow \xi - \pi$ ,  $\Omega \leftrightarrow \xi'$ ) изображен на рис. 3, при этом положения равновесия на оси абсцисс расположены через  $\pi/2$ .

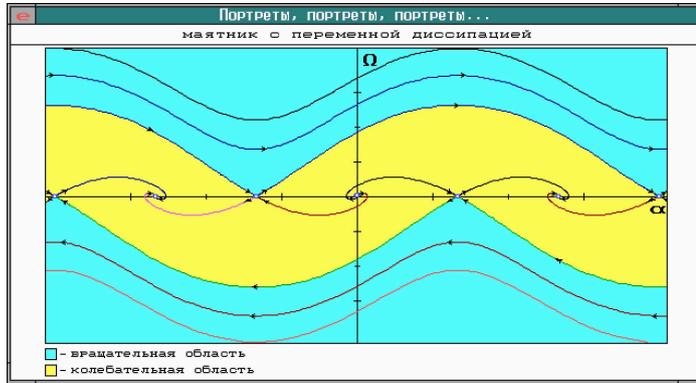


Рис. 3. Фазовый портрет закрепленного маятника на цилиндрическом шарнире в потоке набегающей среды

После же перехода от переменных  $z$  (о переменных  $z$  см. (4.2)) к переменным  $w$

$$w_1 = -\frac{1}{n_0 v_\infty} z_1 - b_* \sin \xi \quad (6.8)$$

уравнение (6.7) будет эквивалентно системе

$$\begin{aligned} \xi' &= -w_1 - b_* \sin \xi, \\ w_1' &= \sin \xi \cos \xi \end{aligned} \quad (6.9)$$

на касательном расслоении

$$T_* \mathbf{S}^1 \{(w_1; \xi) \in \mathbf{R}^2 : \xi \bmod 2\pi\} \quad (6.10)$$

одномерной сферы  $\mathbf{S}^1 \{\xi \in \mathbf{R}^1 : \xi \bmod 2\pi\}$ .

Фазовый портрет системы (6.9) ( $\alpha \leftrightarrow \xi - \pi$ ,  $\omega \leftrightarrow w_1$ ) изображен на рис. 4.

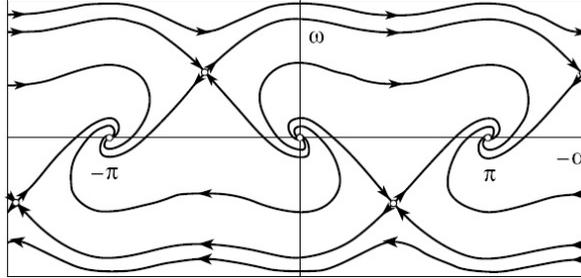


Рис. 4. Динамическая система с переменной диссипацией

## 6.2. Общие замечания об интегрируемости системы

Для полного интегрирования системы (6.9) второго порядка необходимо знать, вообще говоря, один независимый первый интеграл.

### 6.2.1. Система при отсутствии силового поля

Рассмотрим систему (6.9) на касательном расслоении  $T^*\mathbf{S}^1\{w_1; \xi\}$  одномерной сферы  $\mathbf{S}^1\{\xi\}$ . При этом получим из нее систему консервативную. Более того, будем считать, что функция (1.7) тождественно равна нулю (в частности,  $b_* = 0$ , а также коэффициент  $\sin \xi \cos \xi$  во втором уравнении системы (6.9) отсутствует). Рассматриваемая система примет вид

$$\xi' = -w_1, \quad (6.11)$$

$$w_1' = 0. \quad (6.12)$$

Система (6.11), (6.12) описывает движение твердого тела при отсутствии внешнего поля сил.

**Предложение 6.1.** Система (6.11), (6.12) обладает одним аналитическим первым интегралом следующего вида:

$$\Phi_1(w_1; \xi) = w_1^2 = C_1 = \text{const}. \quad (6.13)$$

Данный первый интеграл (6.13) констатирует тот факт, что поскольку внешнего поля сил нет, то сохраняется (вообще говоря, ненулевая) компонента угловой скорости (“двумерного”) твердого тела, а именно:

$$\Omega \equiv \Omega^0 = \text{const}. \quad (6.14)$$

В частности, наличие первого интеграла (6.13) объясняется равенством

$$w_1^2 = \frac{1}{n_0^2 v_\infty^2} \Omega^2 \equiv C_1 = \text{const}. \quad (6.15)$$

### 6.2.2. Система при наличии консервативного силового поля

Теперь рассмотрим систему (6.9) при условии  $b_* = 0$ . При этом получим систему консервативную. А именно наличие силового поля характеризует коэффициент  $\sin \xi \cos \xi$  во втором уравнении системы (6.9) (в отличие от системы (6.11), (6.12)). Рассматриваемая система примет вид

$$\alpha' = -w_1, \quad (6.16)$$

$$w_1' = \sin \xi \cos \xi. \quad (6.17)$$

Итак, система (6.16), (6.17) описывает движение твердого тела в консервативном внешнем поле сил.

**Предложение 6.2.** Система (6.16), (6.17) обладает одним аналитическим первым интегралом следующего вида:

$$\Phi_1(w_1; \xi) = w_1^2 + \sin^2 \xi = C_1 = \text{const}, \quad (6.18)$$

Первый интеграл (6.18) является интегралом полной энергии.

### 6.3. Трансцендентный первый интеграл

Перейдем теперь к интегрированию искомой системы второго порядка (6.9) (без всяких упрощений — при наличии всех коэффициентов).

Сопоставим системе (6.9) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{dw_1}{d\xi} = \frac{\sin \xi \cos \xi}{-w_1 - b_* \sin \xi}. \quad (6.19)$$

Используя замену  $\tau = \sin \xi$ , перепишем уравнение (6.19) в алгебраическом виде

$$\frac{dw_1}{d\tau} = \frac{\tau}{-w_1 - b_* \tau}. \quad (6.20)$$

Далее, вводя однородную переменную по формуле  $w_1 = u\tau$ , приводим уравнение (6.20) к следующей квадратуре:

$$\frac{(-b_* - u)du}{1 + b_*u + u^2} = \frac{d\tau}{\tau}. \quad (6.21)$$

Интегрирование квадратуры (6.21) приводит к рассмотрению трех случаев. Несложный подсчет приводит к следующим первым интегралам.

I.  $b_*^2 - 4 < 0$ .

$$\ln(1 + b_*u + u^2) + \frac{2b_*}{\sqrt{4 - b_*^2}} \operatorname{arctg} \frac{2u + b_*}{\sqrt{4 - b_*^2}} + \ln \tau^2 = \text{const}. \quad (6.22)$$

II.  $b_*^2 - 4 > 0$ .

$$\ln |1 + b_*u + u^2| - \frac{b_*}{\sqrt{b_*^2 - 4}} \ln \left| \frac{2u + b_* + \sqrt{b_*^2 - 4}}{2u + b_* - \sqrt{b_*^2 - 4}} \right| + \ln \tau^2 = \text{const}. \quad (6.23)$$

III.  $b_*^2 - 4 = 0$ .

$$\ln |u - 1| + \frac{1}{u - 1} + \ln |\tau| = \text{const}. \quad (6.24)$$

Другими словами, в переменных  $(\xi, w_1)$  найденные первые интегралы имеют вид:

I.  $b_*^2 - 4 < 0$ .

$$[\sin^2 \xi + b_* w_1 \sin \xi + w_1^2] \exp \left\{ \frac{2b_*}{\sqrt{4 - b_*^2}} \operatorname{arctg} \frac{2w_1 + b_* \sin \xi}{\sqrt{4 - b_*^2} \sin \xi} \right\} = \text{const}. \quad (6.25)$$

II.  $b_*^2 - 4 > 0$ .

$$[\sin^2 \xi + b_* w_1 \sin \xi + w_1^2] \left| \frac{2w_1 + b_* \sin \xi + \sqrt{b_*^2 - 4} \sin \xi}{2w_1 + b_* \sin \xi - \sqrt{b_*^2 - 4} \sin \xi} \right|^{-b_*/\sqrt{b_*^2 - 4}} = \text{const}. \quad (6.26)$$

III.  $b_*^2 - 4 = 0$ .

$$(w_1 - \sin \xi) \exp \left\{ \frac{\sin \xi}{w_1 - \sin \xi} \right\} = \text{const.} \quad (6.27)$$

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (6.9) имеет первый интеграл, выражающийся соотношениями (6.25)–(6.27) (или (6.22)–(6.24)), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (в смысле комплексного анализа) и выражающийся через конечную комбинацию элементарных функций.

**Теорема 6.2.** Три группы соотношений (2.1), (3.3), (4.3) при условиях (6.1), (6.5) обладают первым интегралом (полным набором), являющимся трансцендентной функцией с точки зрения комплексного анализа, выражающимся через конечную комбинацию элементарных функций.

#### 6.4. Топологические аналогии

Предъявим далее две группы аналогий, связанных с системой (5.1), описывающей движение свободного твердого тела при наличии следящей силы.

Первая группа аналогий касается случая наличия в системе неинтегрируемой связи (5.5). В данном случае динамическая часть уравнений движения при некоторых условиях приводится к системе (5.10).

При выполнении условий (6.1), (6.5) система (5.10) примет вид

$$\begin{aligned} \alpha' &= -\omega + b \sin \alpha, \\ \omega' &= \sin \alpha \cos \alpha, \end{aligned} \quad (6.28)$$

если ввести безразмерные параметр, переменную и дифференцирование по аналогии с (6.6):

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I}, \quad \Omega = n_0 v \omega, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v \langle' \rangle. \quad (6.29)$$

**Теорема 6.3.** Система (6.28) (для свободного тела) эквивалентна системе (6.9) (для закрепленного маятника).

Действительно, достаточно положить

$$\xi = \alpha, \quad w_1 = \omega, \quad b_* = -b. \quad (6.30)$$

#### Следствие 6.1.

1. Фазовый портрет системы (6.28) изображен на рис. 4.
2. Угол атаки  $\alpha$  для свободного тела (рис. 2) эквивалентен углу отклонения  $\xi$  закрепленного маятника (рис. 1).
3. Расстояние  $\sigma = CD$  для свободного тела соответствует длине державки  $l = OD$  закрепленного маятника.
4. Первый интеграл системы (6.28) может быть автоматически получен через равенства (6.22)–(6.24) (или (6.25)–(6.27)) после подстановок (6.30) (см. также [15]):

I.  $b^2 - 4 < 0$ .

$$[\sin^2 \alpha - b \omega \sin \alpha + \omega^2] \exp \left\{ -\frac{2b}{\sqrt{4-b^2}} \arctg \frac{2\omega - b \sin \alpha}{\sqrt{4-b^2} \sin \alpha} \right\} = \text{const.} \quad (6.31)$$

**II.**  $b^2 - 4 > 0$ .

$$[\sin^2 \alpha - b\omega \sin \alpha + \omega^2] \left| \frac{2\omega - b \sin \alpha + \sqrt{b^2 - 4} \sin \alpha}{2\omega - b \sin \alpha - \sqrt{b^2 - 4} \sin \alpha} \right|^{b/\sqrt{b^2 - 4}} = \text{const.} \quad (6.32)$$

**III.**  $b^2 - 4 = 0$ .

$$(\omega - \sin \alpha) \exp \left\{ \frac{\sin \alpha}{\omega - \sin \alpha} \right\} = \text{const.} \quad (6.33)$$

Вторая группа аналогий касается случая движения с постоянной скоростью центра масс тела, т. е. когда выполнено свойство (5.15). В данном случае динамическая часть уравнений движения при некоторых условиях приводится к системе (5.22).

Тогда, в силу условий (5.15), (6.1), (6.5), (6.29) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (5.22)) примет вид аналитической системы

$$\begin{aligned} \alpha' &= -\omega + b \sin \alpha \cos^2 \alpha + b\omega^2 \sin \alpha, \\ \omega' &= \sin \alpha \cos \alpha - b\omega \sin^2 \alpha \cos \alpha + b\omega^3 \cos \alpha, \end{aligned} \quad (6.34)$$

при этом выбирая постоянную  $n_1$  следующим образом:

$$n_1 = n_0. \quad (6.35)$$

Если вопрос о первом интеграле системы (6.28) решается с помощью следствия 6.1, то аналогичный вопрос для системы (6.34) решает следующая теорема 6.4.

Для этого введем следующие обозначения и новые переменные (ср. с [15]):

$$\begin{aligned} C_1 &= 2 - b, \quad C_2 = b > 0, \quad C_3 = -2 - b < 0, \\ u_1 &= \omega - \sin \alpha, \quad v_1 = \omega + \sin \alpha, \quad u_1 = v_1 t_1, \quad v_1^2 = 1/q_1, \end{aligned} \quad (6.36)$$

тогда вопрос о явном виде искомого первого интеграла сводится к решению линейного неоднородного уравнения:

$$\frac{dq_1}{dt_1} = a_1(t_1)q_1 + a_2(t_1), \quad (6.37)$$

где

$$a_1(t_1) = \frac{2(C_3 t_1 + C_2)}{C_3 t_1^2 - C_1}, \quad a_2(t_1) = \frac{4C_2 t_1}{C_3 t_1^2 - C_1}. \quad (6.38)$$

Общее решение уравнения (6.37) имеет следующий вид:

**I.**  $b < 2$ .

$$q_1(t_1) = k(t_1)(-C_3 t_1^2 + C_1) \exp \left\{ -\frac{2b}{\sqrt{4 - b^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2 + b}{2 - b}} t_1 \right\} + \text{const.} \quad (6.39)$$

**II.**  $b > 2$ .

$$q_1(t_1) = k(t_1)(-C_3 t_1^2 + C_1) \left| \frac{\sqrt{-C_1} + \sqrt{-C_3} t_1}{\sqrt{-C_1} - \sqrt{-C_3} t_1} \right|^{C_2/\sqrt{C_1 C_3}} + \text{const.} \quad (6.40)$$

**III.**  $b = 2$ .

$$q_1(t_1) = k(t_1) t_1^2 \exp \left\{ \frac{1}{t_1} \right\} + \text{const.}, \quad (6.41)$$

при этом

I.  $b < 2$ .

$$k(t_1) = -\frac{b}{8} \exp \left\{ \frac{2b}{\sqrt{4-b^2}} \left[ \frac{2b}{\sqrt{4-b^2}} \sin 2\zeta - 2 \cos 2\zeta \right] \right\} + \text{const}, \quad (6.42)$$

$$\text{tg} \zeta = \sqrt{\frac{2-b}{2+b}} t_1.$$

II.  $b > 2$ .

$$k(t_1) = \pm |\zeta|^{b/\sqrt{b^2-4}} \mp \frac{b}{b+2\sqrt{b^2-4}} |\zeta|^{b/\sqrt{b^2-4}+2} + \text{const}, \quad (6.43)$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{b-2}{b+2}} \left( \frac{1-\zeta}{1+\zeta} \right).$$

III.  $b = 2$ .

$$k(t_1) = -2 \frac{t_1+1}{t_1} \exp \left\{ -\frac{1}{t_1} \right\}. \quad (6.44)$$

Таким образом, равенства (6.39)–(6.44) позволяют получить искомым первый интеграл системы (6.34), используя обозначения и замены (6.36).

**Теорема 6.4.** *Первый интеграл системы (6.34) является трансцендентной функцией своих фазовых переменных и выражается через конечную комбинацию элементарных функций.*

Ввиду громоздкости вида полученного первого интеграла приведем его лишь в случае III:

$$\exp \left\{ \frac{\sin \alpha + \omega}{\sin \alpha - \omega} \right\} \frac{1 - 4\omega \sin \alpha + 4\omega^2}{(\omega - \sin \alpha)^2} = C_1 = \text{const}. \quad (6.45)$$

**Теорема 6.5.** *Первый интеграл системы (6.28) постоянен на фазовых траекториях системы (6.34).*

*Доказательство* проведем для случая  $b = 2$ . Действительно, перепишем первый интеграл (6.45) системы (6.34) в следующем виде:

$$\exp \left\{ \frac{n_0 v \sin \alpha + \Omega}{n_0 v \sin \alpha - \Omega} \right\} \frac{n_0^2 v^2 - 2bn_0 v \Omega \sin \alpha + b^2 \Omega^2}{(\Omega - n_0 v \sin \alpha)^2} = \text{const}. \quad (6.46)$$

Видно, что числитель второго множителя пропорционален квадрату скорости центра масс тела  $\mathbf{V}_C$  с постоянным коэффициентом  $n_0^2$ . Но, в силу (5.15), данная величина постоянна на траекториях системы (6.34). Значит на них постоянна и функция

$$\exp \left\{ \frac{n_0 v \sin \alpha + \Omega}{n_0 v \sin \alpha - \Omega} \right\} \frac{V_C^2}{(\Omega - n_0 v \sin \alpha)^2} = \text{const}. \quad (6.47)$$

Возьмем далее степень  $(-1/2)$  от левой части равенства (6.47) и заключим, что следующая функция также постоянна на фазовых траекториях системы (6.34):

$$\exp \left\{ \frac{\Omega + n_0 v \sin \alpha}{2(\Omega - n_0 v \sin \alpha)} \right\} (\Omega - n_0 v \sin \alpha) = \text{const}. \quad (6.48)$$

А вот теперь, разделив равенство (6.48) на  $\sqrt{e}$ , получим функцию

$$\exp \left\{ \frac{n_0 v \sin \alpha}{\Omega - n_0 v \sin \alpha} \right\} (\Omega - n_0 v \sin \alpha) = \text{const}, \quad (6.49)$$

постоянную на фазовых траекториях системы (6.34). Но первый интеграл (6.49) полностью аналогичен первому интегралу (6.33), что и требовалось.

Итак, мы имеем следующие топологические и механические аналогии в том смысле, в котором они объяснены выше.

1. Движение закрепленного на цилиндрическом шарнире физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил).
2. Плоскопараллельное движение свободного твердого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи).
3. Плоскопараллельное сложное движение твердого тела, вращающегося вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно и находящегося в неконсервативном поле сил.

О более общих топологических аналогиях см. также [15].

## 7. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

### 7.1. Введение зависимости от угловой скорости

Данная глава посвящена динамике двумерного твердого тела на плоскости. Но, поскольку данный раздел посвящен исследованию случая движения при наличии зависимости момента действующих сил от угловой скорости, введем такую зависимость с более общих позиций. К тому же данная точка зрения поможет нам вводить эту зависимость и для трехмерных, и для многомерных тел.

Пусть  $x = (x_{1N}, x_{2N})$  — координаты точки  $N$  приложения неконсервативной силы (воздействия среды) на одномерную пластину,  $Q = (Q_1, Q_2)$  — компоненты, не зависящие от угловой скорости. Будем вводить зависимость функций  $(x_{1N}, x_{2N}) = (x_N, y_N)$  от угловой скорости лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори не очевидно.

Итак, примем следующую зависимость:

$$x = Q + R, \quad (7.1)$$

где  $R = (R_1, R_2)$  — вектор-функция, содержащая угловую скорость. При этом зависимость функции  $R$  от угловой скорости гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v_D} \begin{pmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}. \quad (7.2)$$

Здесь  $(h_1, h_2)$  — некоторые положительные параметры.

Теперь применительно к нашей задаче, поскольку  $x_{1N} = x_N \equiv 0$ , то

$$x_{2N} = y_N = Q_2 - h_1 \frac{\Omega}{v_D}. \quad (7.3)$$

Таким образом, функция  $\mathbf{r}_N$  выбирается в следующем виде (пластина  $AB$  задается уравнением  $x_{1N} \equiv 0$ ):

$$\mathbf{r}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ x_{2N} \end{pmatrix} = R(\alpha) \mathbf{i}_N - \frac{1}{v_D} \tilde{\Omega} h, \quad (7.4)$$

где

$$\mathbf{i}_N = \mathbf{i}_v \left( \frac{\pi}{2} \right), \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega \\ \Omega & 0 \end{pmatrix} \quad (7.5)$$

(см. (1.6), (3.2)).

В нашем случае

$$\mathbf{i}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7.6)$$

Таким образом, выполнено равенство

$$x_{2N} = R(\alpha) - h_1 \frac{\Omega}{v_D}, \quad (7.7)$$

убеждающее нас о том, что в рассматриваемой системе присутствует также еще и дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т. е. присутствует зависимость момента от угловой скорости).

Итак, для построения силового поля также используется пара функций  $R(\alpha), s(\alpha)$ , информация о которых носит качественный характер. Подобно выбору аналитических функций типа Чаплыгина [1; 2], динамические функции  $s$  и  $R$  примем в следующем виде:

$$R(\alpha) = A \sin \alpha, \quad s(\alpha) = B \cos \alpha, \quad A, B > 0. \quad (7.8)$$

## 7.2. Приведенные системы

**Теорема 7.1.** Совместные уравнения (2.1), (3.3), (4.3) при выполнении условий (7.4), (7.8) редуцируются к динамической системе на касательном расслоении (1.5) одномерной сферы (1.4).

Действительно, если ввести безразмерные параметры и дифференцирование:

$$b_* = ln_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I}, \quad H_{1*} = \frac{h_1 B}{In_0}, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v_\infty \langle ' \rangle, \quad (7.9)$$

то полученное уравнение будет иметь следующий вид:

$$\xi'' + (b_* - H_{1*})\xi' \cos \xi + \sin \xi \cos \xi = 0. \quad (7.10)$$

Фазовый портрет уравнения (7.10) ( $\alpha \leftrightarrow \xi - \pi$ ,  $\Omega \leftrightarrow \xi'$ ) при  $b_* > H_{1*}$  изображен на рис. 3, при этом положения равновесия на оси абсцисс расположены через  $\pi/2$ . При  $b_* < H_{1*}$  фазовый портрет уравнения (7.10) совпадает с фазовым портретом, изображенным на рис. 3, уже без сдвига по оси абсцисс ( $\alpha \leftrightarrow \xi$ ,  $\Omega \leftrightarrow \xi'$ ).

После же перехода от переменных  $z$  (о переменных  $z$  см. (4.2)) к переменным  $w$

$$w_1 = -\frac{1}{1 + b_* H_{1*}} \left( \frac{1}{n_0 v_\infty} z_1 + b_* \sin \xi \right) \quad (7.11)$$

уравнение (7.10) будет эквивалентно системе

$$\begin{aligned} \xi' &= -(1 + b_* H_{1*})w_1 - b_* \sin \xi, \\ w_1' &= \sin \xi \cos \xi + H_{1*} w_1 \cos \xi. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Фазовый портрет системы (7.12) ( $\alpha \leftrightarrow \xi - \pi$ ,  $\omega \leftrightarrow w_1$ ) при  $b_* > H_{1*}$  изображен на рис. 4. При  $b_* < H_{1*}$  фазовый портрет системы (7.12) совпадает с фазовым портретом, изображенным на рис. 4, уже без сдвига по оси абсцисс ( $\alpha \leftrightarrow \xi$ ,  $\Omega \leftrightarrow \xi'$ ).

## 7.3. Трансцендентный первый интеграл

Сопоставим системе (7.12) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{dw_1}{d\xi} = \frac{\sin \xi \cos \xi + H_{1*} w_1 \cos \xi}{-(1 + b_* H_{1*})w_1 - b_* \sin \xi}. \quad (7.13)$$

Используя замену  $\tau = \sin \xi$ , перепишем уравнение (7.13) в алгебраическом виде

$$\frac{dw_1}{d\tau} = \frac{\tau + H_{1*}w_1}{-(1 + b_*H_{1*})w_1 - b_*\tau}. \quad (7.14)$$

Далее, вводя однородную переменную по формуле  $w_1 = u\tau$ , приводим уравнение (7.14) к следующей квадратуре:

$$\frac{(-b_* - (1 + b_*H_{1*})u)du}{1 + (b_* + H_{1*})u + (1 + b_*H_{1*})u^2} = \frac{d\tau}{\tau}. \quad (7.15)$$

Интегрирование квадратуры (7.15) приводит к рассмотрению трех случаев. Несложный подсчет приводит к следующим первым интегралам.

**I.**  $|b_* - H_{1*}| < 2$ .

$$\begin{aligned} & \ln(1 + (b_* + H_{1*})u + (1 + b_*H_{1*})u^2) + \\ & + \frac{2b_*}{\sqrt{4 - (b_* - H_{1*})^2}} \operatorname{arctg} \frac{2(1 + b_*H_{1*})u + (b_* + H_{1*})}{\sqrt{4 - (b_* - H_{1*})^2}} + \ln \tau^2 = \text{const}. \end{aligned} \quad (7.16)$$

**II.**  $|b_* - H_{1*}| > 2$ .

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 + b_*H_{1*}} \ln |1 + (b_* + H_{1*})u + (1 + b_*H_{1*})u^2| + \ln \tau^2 - \\ & - \frac{b_*\sqrt{1 + b_*H_{1*}}}{\sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}} \times \\ & \times \ln \left| \frac{2(1 + b_*H_{1*})^{3/2}u + (b_* + H_{1*})\sqrt{1 + b_*H_{1*}} + \sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}}{2(1 + b_*H_{1*})^{3/2}u + (b_* + H_{1*})\sqrt{1 + b_*H_{1*}} - \sqrt{(b_* - H_{1*})^2 - 4}} \right| = \\ & = \text{const}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

**III.**  $|b_* - H_{1*}| = 2$ .

$$\ln \left| u + \frac{b_* + H_{1*}}{2(1 + b_*H_{1*})} \right| - \frac{b_* - H_{1*}}{2(1 + b_*H_{1*})u + (b_* + H_{1*})} + \ln |\tau| = \text{const}. \quad (7.18)$$

В переменных  $(\xi, w_1)$  найденные первые интегралы имеют достаточно громоздкий вид. Тем не менее в случае **III** мы приведем его в явном виде:

$$\left( w_1 + \frac{b_* + H_{1*}}{2(1 + b_*H_{1*})} \sin \xi \right) \exp \left\{ \frac{(-b_* + H_{1*}) \sin \xi}{2(1 + b_*H_{1*})w_1 + (b_* + H_{1*}) \sin \xi} \right\} = \text{const}. \quad (7.19)$$

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (7.12) имеет первый интеграл, выражающийся соотношениями (7.16)–(7.18) (или, в частности, в случае **III** (7.19)), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (в смысле комплексного анализа) и выражающийся через конечную комбинацию элементарных функций.

**Теорема 7.2.** Три группы соотношений (2.1), (3.3), (4.3) при условиях (7.4), (7.8) обладают первым интегралом (полным набором), являющимся трансцендентной функцией с точки зрения комплексного анализа, выражающимся через конечную комбинацию элементарных функций.

#### 7.4. Топологические аналогии

Предъявим далее еще две группы аналогий, связанных с системой (5.1), описывающей движение свободного твердого тела при наличии следящей силы.

*Первая группа аналогий* снова касается случая наличия в системе неинтегрируемой связи (5.5). В данном случае динамическая часть уравнений движения при некоторых условиях приводится к системе (5.10).

При выполнении условий (7.4), (7.8) система (5.10) примет вид

$$\begin{aligned}\alpha' &= -(1 + bH_1)\omega + b \sin \alpha, \\ \omega' &= \sin \alpha \cos \alpha - H_1 \omega \cos \alpha,\end{aligned}\quad (7.20)$$

если ввести безразмерные параметры, переменную и дифференцирование по аналогии с (7.9):

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I}, \quad H_1 = \frac{h_1 B}{I n_0}, \quad \Omega = n_0 v \omega, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v \langle' \rangle. \quad (7.21)$$

**Теорема 7.3.** Система (7.20) (для свободного тела) эквивалентна системе (7.12) (для закрепленного маятника).

Действительно, достаточно положить

$$\xi = \alpha, \quad w_1 = \omega, \quad b_* = -b, \quad H_{1*} = -H_1. \quad (7.22)$$

#### Следствие 7.1.

1. Фазовый портрет системы (7.20) при  $b_* > H_{1*}$  изображен на рис. 4. При  $b_* < H_{1*}$  фазовый портрет системы (7.20) совпадает с фазовым портретом, изображенным на рис. 4, но со сдвигом по оси абсцисс ( $\alpha \leftrightarrow \alpha + \pi$ ).
2. Угол атаки  $\alpha$  для свободного тела (рис. 2) эквивалентен углу отклонения  $\xi$  закрепленного маятника (рис. 1).
3. Расстояние  $\sigma = CD$  для свободного тела соответствует длине державки  $l = OD$  закрепленного маятника.
4. Первый интеграл системы (7.20) может быть автоматически получен через равенства (7.13)–(7.15) (или (7.16)–(7.18)) после подстановок (7.22).

В переменных  $(\alpha, \omega)$  найденные первые интегралы имеют достаточно громоздкий вид. Тем не менее в случае **III** мы приведем его в явном виде:

$$\left( \omega - \frac{b + H_1}{2(1 + bH_1)} \sin \alpha \right) \exp \left\{ \frac{(b - H_1) \sin \alpha}{2(1 + bH_1)\omega - (b + H_1) \sin \alpha} \right\} = \text{const}. \quad (7.23)$$

*Вторая группа аналогий* касается случая движения с постоянной скоростью центра масс тела, т. е. когда выполнено свойство (5.15). В данном случае динамическая часть уравнений движения при некоторых условиях приводится к системе (5.22).

Тогда, в силу условий (5.15), (7.4), (7.8), (7.21) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (5.22)) примет вид аналитической системы

$$\begin{aligned}\alpha' &= -\omega + b \sin \alpha \cos^2 \alpha + b\omega^2 \sin \alpha - bH_1 \omega \cos^2 \alpha, \\ \omega' &= \sin \alpha \cos \alpha - b\omega \sin^2 \alpha \cos \alpha + b\omega^3 \cos \alpha + \\ &\quad + bH_1 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha - H_1 \omega \cos \alpha,\end{aligned}\quad (7.24)$$

при этом выбирая постоянную  $n_1$  следующим образом:

$$n_1 = n_0. \quad (7.25)$$

Если вопрос о первом интеграле системы (7.20) решается с помощью следствия 7.1, то аналогичный вопрос для системы (7.24) решает следующая теорема 7.4.

Для этого введем следующие обозначения и новые переменные:

$$A_1 = \frac{b}{2} - \frac{bH_1}{2} - \frac{H_1}{2}, \quad A_2 = 1 + \frac{b}{2} + \frac{bH_1}{2} + \frac{H_1}{2} > 0, \quad A_3 = 1 - \frac{b}{2} + \frac{bH_1}{2} - \frac{H_1}{2}, \quad (7.26)$$

$$u_1 = \omega - \sin \alpha, \quad v_1 = \omega + \sin \alpha, \quad u_1 = v_1 t_1, \quad v_1^2 = \frac{1}{q_1},$$

тогда вопрос о явном виде искомого первого интеграла сводится к решению линейного неоднородного уравнения:

$$\frac{dq_1}{dt_1} = a_1(t_1)q_1 + a_2(t_1), \quad (7.27)$$

где

$$a_1(t_1) = \frac{2(A_2 t_1 - A_1)}{A_2 t_1^2 + bH_1 t_1 + A_3}, \quad a_2(t_1) = \frac{2b(-t_1 + H_1(t_1^2 - 1)/4)}{A_2 t_1^2 + bH_1 t_1 + A_3}. \quad (7.28)$$

Общее решение уравнения (7.27) имеет следующий вид:

**I.**  $|b - H_1| < 2$ .

$$q_1(t_1) = k(t_1)(A_2 t_1^2 + bH_1 t_1 + A_3) \times \exp \left\{ -\frac{2(b - bH_1 - H_1)}{\sqrt{4 - (b - H_1)^2}} \arctg \left\{ \frac{2 + b + bH_1 + H_1}{\sqrt{4 - (b - H_1)^2}} t_1 + \frac{bH_1}{\sqrt{4 - (b - H_1)^2}} \right\} \right\}. \quad (7.29)$$

**II.**  $|b - H_1| > 2$ .

$$q_1(t_1) = k(t_1)(A_2 t_1^2 + bH_1 t_1 + A_3) \times \left| \frac{\sqrt{4 - (b - H_1)^2} + (2 + b + bH_1 + H_1)t_1 + bH_1}{\sqrt{4 - (b - H_1)^2} - (2 + b + bH_1 + H_1)t_1 - bH_1} \right|^{(b - bH_1 - H_1)/\sqrt{4 - (b - H_1)^2}}. \quad (7.30)$$

**III.**  $|b - H_1| = 2$ .

$$q_1(t_1) = k(t_1) \left( t_1 + \frac{bH_1}{2A_2} \right)^2 \exp \left\{ \frac{2(b - H_1)}{(2 + b + bH_1 + H_1)t_1 + bH_1} \right\}. \quad (7.31)$$

Для поиска решения неоднородного уравнения (7.27), (7.28) находится величина  $k$  как функция  $t_1$ , выражающаяся через конечную комбинацию элементарных функций. Ввиду громоздкости выкладок дальнейшие рассуждения приводятся лишь в случае **III**.

Таким образом, равенства (7.29)–(7.31) позволяют получить искомым первый интеграл системы (7.24), используя обозначения и замены (7.26).

**Теорема 7.4.** *Первый интеграл системы (7.24) является трансцендентной функцией своих фазовых переменных и выражается через конечную комбинацию элементарных функций.*

Ввиду громоздкости вида полученного первого интеграла приведем его лишь в случае **III**:

$$\exp \left\{ \frac{-2(b - H_1) \sin \alpha}{2(1 + bH_1)\omega - (b + H_1) \sin \alpha} \right\} \frac{1 - 4\omega \sin \alpha + 4\omega^2}{(\omega - 2 \sin \alpha / (b + H_1))^2} = C_1 = \text{const}. \quad (7.32)$$

**Теорема 7.5.** *Первый интеграл системы (7.20) постоянен на фазовых траекториях системы (7.24).*

*Доказательство* проведем для случая  $|b - H_1| = 2$ . Действительно, перепишем первый интеграл (7.32) в следующем виде:

$$\exp \left\{ \frac{-2n_0 v (b - H_1) \sin \alpha}{2(1 + bH_1)\Omega - n_0 v (b + H_1) \sin \alpha} \right\} \frac{n_0^2 v^2 - 4n_0 v \Omega \sin \alpha + 4\Omega^2}{(\Omega - 2n_0 v \sin \alpha / (b + H_1))^2} = \text{const}. \quad (7.33)$$

Видно, что числитель второго множителя пропорционален квадрату скорости центра масс тела  $\mathbf{V}_C$  с постоянным коэффициентом. Но, в силу (5.15), данная величина постоянна на траекториях системы (7.24). Значит, на них постоянна и функция

$$\exp \left\{ \frac{-2n_0v(b-H_1)\sin\alpha}{2(1+bH_1)\Omega - n_0v(b+H_1)\sin\alpha} \right\} \frac{V_C^2}{(\Omega - 2n_0v\sin\alpha/(b+H_1))^2} = \text{const.} \quad (7.34)$$

Возьмем далее степень  $(-1/2)$  от левой части равенства (7.34) и заключаем, что следующая функция также постоянна на фазовых траекториях системы (7.24):

$$\exp \left\{ \frac{n_0v(b-H_1)\sin\alpha}{2(1+bH_1)\Omega - n_0v(b+H_1)\sin\alpha} \right\} (\Omega - 2n_0v\sin\alpha/(b+H_1)) = \text{const.} \quad (7.35)$$

Теперь ясно, что функция (7.35) эквивалентна функции (7.23), поскольку в случае **III** выполнено следующее равенство:

$$(b+H_1)^2 = 4(1+bH_1). \quad (7.36)$$

Итак, мы имеем следующие топологические и механические аналогии в том смысле, в котором они объяснены выше.

1. Движение закрепленного на цилиндрическом шарнире физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил при учете дополнительной зависимости момента сил от угловой скорости).

2. Плоскопараллельное движение свободного твердого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи и при учете дополнительной зависимости момента сил от угловой скорости).

3. Плоскопараллельное сложное движение твердого тела, вращающегося вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно и находящегося в неконсервативном поле сил при учете дополнительной зависимости момента сил от угловой скорости.

## Литература

- [1] Shamolin M.V. New integrable cases and families of portraits in the plane and spatial dynamics of a rigid body interacting with a medium // Journal of Mathematical Sciences. 2003. Vol. 114. № 1. P. 919–975.
- [2] Шамолин М.В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твердого тела в неконсервативном поле // Итоги науки и техники. Сер.: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2013. Т. 125. С. 5–254.
- [3] Shamolin M.V. New cases of integrability in dynamics of a rigid body with the cone form of its shape interacting with a medium // PAMM (Proc. Appl. Math. Mech.). 2009. № 9. P. 139–140.
- [4] Шамолин М.В. Многообразие типов фазовых портретов в динамике твердого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой // Доклады РАН, 1996. Т. 349. № 2. С. 193–197.
- [5] Шамолин М.В. Новое дупараметрическое семейство фазовых портретов в задаче о движении тела в среде // Доклады РАН. 1994. Т. 337. № 5. С. 611–614.
- [6] Шамолин М.В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фунд. и прикл. мат. 2008. Т. 14. Вып. 3. С. 3–237.

- [7] Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНТИ, 1985. 304 с.
- [8] Трофимов В.В. Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств // Вестн. Моск. ун-та. Сер.: 1. Математика. Механика. 1984. №6. С. 31–33.
- [9] Трофимов В.В., Шамолин М.В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фунд. и прикл. мат. 2010. Т. 16. Вып. 4. С. 3–229.
- [10] Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2007. 352 с.
- [11] Shamolin M.V. Classes of variable dissipation systems with nonzero mean in the dynamics of a rigid body // Journal of Mathematical Sciences. 2004. Vol. 122. № 1. P. 2841–2915.
- [12] Шамолин М.В. Некоторые модельные задачи динамики твердого тела при взаимодействии его со средой // Прикл. механика. 2007. Т. 43. №10. С. 49–67.
- [13] Шамолин М.В. Новые интегрируемые случаи в динамике тела, взаимодействующего со средой, при учете зависимости момента силы сопротивления от угловой скорости // Прикл. мат. и мех. 2008. Т. 72. Вып. 2. С. 273–287.
- [14] Шамолин М.В. Об интегрируемости в элементарных функциях некоторых классов динамических систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер.: 1. Математика. Механика. 2008. №3. С. 43–49.
- [15] Шамолин М.В. Об устойчивости прямолинейного поступательного движения // Прикл. механика. 2009. Т. 45. №6. С. 125–140.

## References

- [1] Shamolin M.V. New integrable cases and families of portraits in the plane and spatial dynamics of a rigid body interacting with a medium. *Journal of Mathematical Sciences*, 2003, Vol. 114, no. 1, pp. 919–975 [in English].
- [2] Shamolin M.V. Variety of cases of integrability in dynamics of lower-, and multi-dimensional body in nonconservative field *Itogi nauki i tekhniki. Ser.: Sovremennaiia matematika i ee prilozheniia. Tematicheskie obzory* [Results of science and technique. Series: Contemporary Mathematics and Its Applications. Subject reviews], Vol. 125 "Dynamical Systems", 2013, pp. 5–254 [in Russian].
- [3] Shamolin M.V. New cases of integrability in dynamics of a rigid body with the cone form of its shape interacting with a medium. In: *PAMM (Proc. Appl. Math. Mech.)*, 9, 139–140 (2009) [in English].
- [4] Shamolin M.V. Variety of types of phase portraits in dynamics of a rigid body interacting with a resisting medium. *Doklady RAN* [Proceedings of the Russian Academy of Sciences], 1996, Vol. 349, no. 2, pp. 193–197 [in Russian].
- [5] Shamolin M.V. A new two-parameter family of phase portraits in problem of a body motion in a medium. *Doklady RAN* [Proceedings of the Russian Academy of Sciences], 1996, Vol. 337, no. 5, pp. 611–614 [in Russian].
- [6] Shamolin M.V. Dynamical Systems With Variable Dissipation: Approaches, Methods, and Applications. *Fund. i prikl. mat.* [Fundamental and Applied Mathematics], 2008, Vol. 14, no. 3, pp. 3–237 [in Russian].
- [7] Arnold V.I., Kozlov V.V., Neyshtadt A.I. Mathematical aspect in classical and celestial mechanics, M., VINITI, 1985, 304 p. [in Russian].

- [8] Trofimov V.V. Symplectic structures on symmetric spaces automorphism groups. *Vestnik Mosk. Un-ta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika* [Vestnik of Moscow University. Series 1. Mathematics. Mechanics], 1984, no. 6, pp. 31–33 [in Russian].
- [9] Trofimov V.V., Shamolin M.V. Geometrical and dynamical invariants of integrable Hamiltonian and dissipative systems. *Fund. i prikl. mat.* [Fundamental and Applied Mathematics], 2010, Vol. 16, no. 4, pp 3–229 [in Russian].
- [10] Shamolin M.V. Methods of analysis of various dissipation dynamical system in dynamics of a rigid body. M., Izd-vo "Ekzamen", 2007, 352 p. [in Russian].
- [11] Shamolin M.V. Classes of variable dissipation systems with nonzero mean in the dynamics of a rigid body. *Journal of Mathematical Sciences*, 2004, Vol. 122, no. 1, pp. 2841–2915 [in English].
- [12] Shamolin M.V. Some model problems of dynamics for a rigid body interacting with a medium. *Prikl. Mekhanika* [Applied Mechanics], 2007, Vol. 43, no. 10, pp. 49–67 [in Russian].
- [13] Shamolin M.V. New integrable cases in dynamics of a medium-interacting body with allowance for dependence of resistance force moment on angular velocity. *Prikl. mat. i mekh.* [Applied Mathematics and Mechanics], 2008, Vol. 72, no. 2, pp. 273–287 [in Russian].
- [14] Shamolin M.V. Integrability of some classes of dynamic systems in terms of elementary functions, *Vestnik Mosk. Un-ta. Ser. 1. Matematika. Mekhanika* [Vestnik of Moscow University. Series 1. Mathematics. Mechanics], 2008, no. 3, pp. 43–49 [in Russian].
- [15] Shamolin M.V. Stability of a rigid body translating in a resisting medium. *Prikl. Mekhanika* [Applied Mechanics], 2009, Vol. 45, no. 6, pp. 125–140 [in Russian].

*M. V. Shamolin*<sup>3</sup>

## CASES OF INTEGRABILITY CORRESPONDING TO THE PENDULUM MOTION ON THE PLANE

In this article, we systemize the results on the study of plane-parallel motion equations of fixed rigid body-pendulum which is placed in certain nonconservative force field. In parallel, we consider the problem of a plane-parallel motion of a free rigid body which is also placed in a similar force field. Thus, the non-conservative tracking force operates onto this body. That force forces the value of certain point of a body to be constant for all the time of a motion, which means the existence of nonintegrable servoconstraint in the system. The obtained results are systematized and served in the invariant form. We also show the nontrivial topological and mechanical analogies.

**Key words:** rigid body, resisting medium, dynamical system, phase pattern, case of integrability.

Статья поступила в редакцию 01/VII/2015.  
The article received 01/VII/2015.

---

<sup>3</sup>*Shamolin Maxim Vladimirovich* ([shamolin@rambler.ru](mailto:shamolin@rambler.ru), [shamolin@imec.msu.ru](mailto:shamolin@imec.msu.ru)), Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, 1, Leninskie Gory, Moscow, 119192, Russian Federation.