

УДК 539.42

*Л.В. Степанова, Е.М. Яковлева*¹

АСИМПТОТИКА ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ В УСЛОВИЯХ СМЕШАННОГО НАГРУЖЕНИЯ: МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА

В статье приведены приближенные аналитические и численные решения класса нелинейных задач на собственные значения, возникающих при исследовании поля напряжений вблизи вершины трещины для плоского деформированного состояния в материале со степенными определяющими уравнениями в условиях смешанного нагружения. Асимптотическое решение нелинейной задачи на собственные значения построено с помощью метода возмущений (метода малого параметра), в соответствии с которым разложения механических величин осуществляются по малому параметру, представляющему собой разность между собственным числом, отвечающим нелинейной задаче, и собственным числом, соответствующим линейной "невозмущенной" задаче. Наряду с функцией напряжений Эри в ряд по малому параметру раскладывается искомая функция и показатель нелинейности материала. Показано, что метод малого параметра является эффективным методом решения нелинейных задач на собственные значения, возникающих в нелинейной механике разрушения. Приводится сравнение результатов асимптотического и численного решений задачи для различных значений параметра смешанности нагружения и показателя нелинейности материала.

Ключевые слова: Нелинейная задача на собственные значения, метод возмущений (метод малого параметра), асимптотика напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины, смешанное нагружение образца с трещиной, степенной определяющий закон, спектр собственных значений

1. Краткие теоретические сведения

В настоящее время асимптотические методы широко используются в современной нелинейной динамике и механике деформируемого твердого тела [1]. Асимптотический анализ сингулярных полей напряжений, деформаций и перемещений вблизи концентраторов напряжений вызывал и продолжает вызывать значительный интерес и привлекает внимание многих исследователей в области механики деформируемого твердого тела [2–4]. Асимптотические поля напряжений, деформаций и перемещений вблизи углового выреза и трещины в изотропном линейном

¹© Степанова Л.В., Яковлева Е.М., 2015

Степанова Лариса Валентиновна (stepanova1v@samsu.ru), Яковлева Екатерина Михайловна (adulinaek@samsu.ru), кафедра математического моделирования в механике, Самарский государственный университет, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

упругом материале впервые были определены М. Уильямсом [5]. С тех пор появлялись многочисленные решения задач об угловых вырезах, трещинах и включениях, рассматривающих влияние разнообразных факторов (влияние геометрии образца, свойств материала и др.) на распределение напряжений, деформаций и перемещений в окрестности концентратора напряжений [6–12]. Для упрочняющегося по степенному закону упругопластического материала

$$\varepsilon_{ij} = 3B\sigma_e^{n-1}s_{ij}/2, \quad (1.1)$$

где ε_{ij} – компоненты тензора деформаций, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, s_{ij} – компоненты девиатора напряжений, $\sigma_e = (3s_{ij}s_{ij}/2)^{1/2}$ – интенсивность касательных напряжений, B, n – постоянные материала, определяемые экспериментально, Хатчинсон, Райс и Розенгрэн [13–15] получили ставшее уже классическим распределение напряжений в непосредственной окрестности вершины трещины ($r \rightarrow 0$)

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \left(\frac{J}{BI_n r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \bar{\sigma}_{ij}(\theta, n), \quad (1.2)$$

где J – инвариантный интеграл механики разрушения; I_n – безразмерная функция, зависящая от n и определяемая как безразмерный J – интеграл; $\bar{\sigma}_{ij}(\theta, n)$ – универсальное угловое распределение напряжений – функции, известные из решения Хатчинсона – Райса – Розенгрена (HRR); r, θ – полярные координаты с полюсом в вершине трещины.

В силу степенного характера определяющих уравнений (1.1) можно применить метод разделения переменных и представить искомые величины в виде произведений двух функций, одна из которых зависит от расстояния от кончика трещины r , а другая – от полярного угла. Для функции, зависящей от расстояния от вершины трещины, можно предположить степенную зависимость, тогда показатель данной степени определяется из решения нелинейной задачи на собственные значения для функции, зависящей от полярного угла, которая будет являться собственной функцией, отвечающей данному собственному значению. В задачах о трещинах нормального отрыва и поперечного сдвига данный подход позволяет найти собственное значение – показатель сингулярности напряжений у вершины трещины $s = -1/(n+1)$ в соотношениях (1.2).

Следует отметить, что достаточно долго интерес исследователей вызывало построение высших приближений в асимптотических разложениях полей напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины по заданному главному члену асимптотического разложения – решению Хатчинсона – Райса – Розенгрена (1.2). Во всех упомянутых работах главный член асимптотического разложения компонент тензора напряжений – классическое решение HRR (1.2). Однако сейчас отмечается необходимость нахождения всего спектра собственных чисел [7], поскольку построение полей напряжений и деформаций у вершины трещины в среде с поврежденностью приводит к новым задачам на собственные значения и влечет за собой знание всего спектра собственных значений задачи.

Поскольку элементы ответственных конструкций, находящиеся в реальных эксплуатационных условиях, подвержены действию сложных систем механических нагрузок, характерной для них является эксплуатация в условиях сложного нагруженного состояния при наличии различным образом ориентированных дефектов.

С математической точки зрения смешанное нагружение элементов конструкции приводит к новому классу нелинейных задач на собственные значения и к

необходимости развития математического аппарата для отыскания всего спектра собственных значений. По всей видимости первое обращение к исследованию смешанных форм деформирования было сделано в работах Ши, где изучены поля напряжений и деформаций вблизи вершины трещины, находящейся под действием растягивающей и сдвиговой нагрузок (т. о. рассматривалось смешанное нагружение, отвечающее трещинам типа I и типа II). Ши впервые ввел коэффициент смешанности нагружения:

$$M^p = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left| \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sigma_{\theta\theta}(r, \theta = 0)}{\sigma_{r\theta}(r, \theta = 0)} \right|, \quad (1.3)$$

принимая нулевое значение для трещины поперечного сдвига; значение, равное единице, для чистого растяжения и значение $0 < M^p < 1$ для смешанных форм нагружения образца с трещиной. С тех пор анализ смешанных мод деформирования является объектом пристального внимания ученых как в России, так и за рубежом [16; 17].

Целью настоящей статьи является определение всего спектра собственных чисел в нелинейной задаче на собственные значения, полученной для трещины в среде со степенными определяющими уравнениями в случае плоского деформированного состояния в условиях смешанного нагружения.

2. Математическая постановка задачи. Основные уравнения

Исследование напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины в условиях смешанного деформирования элемента конструкции в материале со степенными определяющими уравнениями

$$\varepsilon_{ij} = 3B\sigma_e^{n-1}s_{ij}/2, \quad (2.1)$$

где ε_{ij} – компоненты тензора деформации, s_{ij} – компоненты деватора тензора напряжений, $\sigma_e = (3s_{ij}s_{ij}/2)^{1/2}$ – интенсивность напряжений, B , n – материальные константы, приводит к необходимости исследования уравнений равновесия

$$r\sigma_{rr,r} + \sigma_{r\theta,\theta} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 0, \quad r\sigma_{r\theta,r} + \sigma_{\theta\theta,\theta} + 2\sigma_{r\theta} = 0 \quad (2.2)$$

и условия совместности деформаций

$$2(r\varepsilon_{r\theta,\theta})_r = \varepsilon_{rr,\theta\theta} - r\varepsilon_{rr,r} + r(r\varepsilon_{\theta\theta})_{,rr}. \quad (2.3)$$

В предположении реализации плоского деформированного состояния определяющие соотношения материала (2.1) принимают вид

$$\varepsilon_{rr} = -\varepsilon_{\theta\theta} = 3B\sigma_e^{n-1}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})/4, \quad \varepsilon_{r\theta} = 3B\sigma_e^{n-1}\sigma_{r\theta}/2, \quad (2.4)$$

где интенсивность касательных напряжений определяется формулой

$$\sigma_e^2 = 3(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2/4 + 3\sigma_{r\theta}^2. \quad (2.5)$$

В полярных координатах r, θ компоненты тензора напряжений выражаются через функцию напряжений Эри $F(r, \theta)$ в следующем виде:

$$\sigma_{\theta\theta} = F_{,rr}, \quad \sigma_{rr} = r^{-1}F_{,r} + r^{-2}F_{,\theta\theta}, \quad \sigma_{r\theta} = -(r^{-1}F_{,\theta})_{,r}. \quad (2.6)$$

Граничные условия задачи есть условия отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta = \pm\pi) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r, \theta = \pm\pi) = 0.$$

Одним из наиболее распространенных методов определения напряженно - деформированного состояния в окрестности вершины трещины является метод разложения по собственным функциям, в соответствии с которым асимптотическое представление функции напряжений Эри в окрестности вершины трещины ($r \rightarrow 0$) разыскивается в форме

$$F(r, \theta) = r^{\lambda+1} f(\theta). \quad (2.7)$$

Тогда компоненты тензора напряжений в окрестности вершины трещины принимают вид

$$\sigma_{rr}(r, \theta) = r^{\lambda-1} [(\lambda+1)f(\theta) + f''(\theta)], \quad \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = r^{\lambda-1} \lambda(\lambda+1)f(\theta), \quad (2.8)$$

$$\sigma_{r\theta}(r, \theta) = -r^{\lambda-1} \lambda f'(\theta). \quad (2.9)$$

Асимптотическое представление интенсивности напряжений в окрестности вершины трещины имеет форму

$$\sigma_e(r, \theta) = r^{\lambda-1} f_e(\theta), \quad f_e^2 = [f(\theta)'' + (1 - \lambda^2)f(\theta)]^2 + 4\lambda^2[f'(\theta)]^2.$$

Поэтому компоненты тензора деформаций в окрестности вершины трещины при $r \rightarrow 0$ имеют следующую структуру:

$$\varepsilon_{rr} = -\varepsilon_{\theta\theta} = Br^{(\lambda-1)n} \tilde{\varepsilon}_{rr}(\theta), \quad \varepsilon_{r\theta} = Br^{(\lambda-1)n} \tilde{\varepsilon}_{r\theta}(\theta), \quad (2.10)$$

где $\tilde{\varepsilon}_{rr}(\theta) = 3f_e^{n-1}[f''(\theta) + (1 - \lambda^2)f(\theta)]/4$, $\tilde{\varepsilon}_{r\theta}(\theta) = -3f_e^{n-1}\lambda f'(\theta)/2$. Подстановка выражений (2.10) для компонент тензора деформаций в условие совместности (2.3) позволяет получить нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $f(\theta)$

$$2[(\lambda-1)n+1] \frac{d\tilde{\varepsilon}_{r\theta}}{d\theta} = \frac{d^2\tilde{\varepsilon}_{rr}}{d\theta^2} - (\lambda-1)n[(\lambda-1)n+2]\tilde{\varepsilon}_{rr} \quad (2.11)$$

или в терминах функции $f(\theta)$

$$\begin{aligned} & f_e^2 f^{(4)} \left\{ (n-1) [(1-\lambda^2)f + f'']^2 + f_e^2 \right\} + (n-1)(n-3) \times \\ & \times \left\{ [(1-\lambda^2)f + f''] [(1-\lambda^2)f' + f'''] + 4\lambda^2 f' f'' \right\}^2 [(1-\lambda^2)f + f''] + \\ & + (n-1) f_e^2 \left\{ [(1-\lambda^2)f' + f''']^2 + [(1-\lambda^2)f + f''] (1-\lambda^2)f'' + \right. \\ & \left. + 4\lambda^2 (f''^2 + f' f''') \right\} [(1-\lambda^2)f + f''] + 2(n-1) f_e^2 \times \\ & \times \left\{ [(1-\lambda^2)f + f''] [(1-\lambda^2)f' + f'''] + 4\lambda^2 f' f'' \right\} [(1-\lambda^2)f' + f'''] + \\ & + C_1 (n-1) f_e^2 \left\{ [(1-\lambda^2)f + f''] [(1-\lambda^2)f' + f'''] + 4\lambda^2 f' f'' \right\} f' + \\ & + C_1 f_e^4 f'' - C_2 f_e^4 [(1-\lambda^2)f + f''] + f_e^4 (1-\lambda^2) f'' = 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где приняты обозначения

$$f_e^2 = [(1-\lambda^2)f + f'']^2 + 4\lambda^2 f'^2, \quad C_1 = 4\lambda[(\lambda-1)n+1], \quad C_2 = (\lambda-1)n[(\lambda-1)n+2].$$

Решение нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка (2.12) должно удовлетворять краевым условиям, следующим из требования отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины

$$f(\theta = \pm\pi) = 0, \quad f'(\theta = \pm\pi) = 0. \quad (2.13)$$

Уравнение (2.12) вместе с краевыми условиями (2.13) приводит к двухточечной краевой задаче на собственные значения: необходимо найти собственные значения λ , отвечающие нетривиальным решениям уравнения (2.12), удовлетворяющим краевым условиям (2.13).

3. Метод возмущений (метод малого параметра)

Одним из эффективных методов решения нелинейных задач на собственные значения, возникающих в нелинейной механике разрушения, является метод возмущений [1]. По всей видимости, впервые данный подход для получения аналитической зависимости собственного значения нелинейной задачи от собственного значения, соответствующего линейной невозмущенной задаче, и от показателя нелинейности материала, был применен М. Анхезером и Д. Гроссом [18] для задачи антиплоского сдвига плоскости с разрезом. Впоследствии данный подход был развит для решения нелинейной задачи на собственные значения, следующей из задачи определения напряженно-деформированного состояния у вершины усталостной трещины в среде с поврежденностью [19]. В [18] показано, что метод возмущений позволяет получить аналитическое решение задачи в замкнутой форме. Позднее этот метод был применен и для приближенной оценки собственных значений в нелинейных задачах на собственные значения, возникающих в нелинейной механике разрушения. Поэтому данный метод используется далее. Можно отметить возрастающий интерес математического сообщества к аналитическим решениям нелинейных задач математической физики [1; 7].

Аналитическое выражение для собственного значения λ как функции от показателя нелинейности материала n и от λ_0 — собственного числа, отвечающего линейной задаче ($n = 1$), может быть найдено с помощью методов асимптотической теории (метода возмущений). Суть этого подхода заключается в следующем представлении:

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon, \quad (3.1)$$

где λ_0 соответствует невозмущенной линейной задаче, ε — отклонение собственного числа λ от собственного числа λ_0 при изменении n : $\varepsilon = \lambda - \lambda_0$.

Вместе с (3.1) показатель нелинейности материала n и функция, описывающая угловые распределения компонент тензора напряжений $f(\theta)$, представляются в следующем виде:

$$n = 1 + \varepsilon n_1 + \varepsilon^2 n_2 + \dots = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l n_l, \quad (3.2)$$

$$f(\theta) = f_0(\theta) + \varepsilon f_1(\theta) + \varepsilon^2 f_2(\theta) + \dots = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^l f_l(\theta), \quad (3.3)$$

где $f_0(\theta)$ — решение линейной невозмущенной задачи ($n = 1$).

Подставляя асимптотические разложения (3.1)–(3.3) в уравнения (2.12) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем систему неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для функции $f_0(\theta)$ легко получить линейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f_0^{IV} + 2(\lambda_0^2 - 1)f_0'' + (\lambda_0^2 - 1)^2 f_0 = 0, \quad (3.4)$$

решение которого, подчиняющееся граничным условиям отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины

$$f_0(\theta = \pm\pi) = 0, \quad f_0'(\theta = \pm\pi) = 0, \quad (3.5)$$

в линейной механике разрушения обычно связывают с именем М. Уильямса [5].

Общее решение уравнения (3.4) находится аналитически, и оно имеет вид:

$$f_0(\theta) = B_1 \cos[(\lambda_0 - 1)\theta] + B_2 \sin[(\lambda_0 - 1)\theta] + B_3 \cos[(\lambda_0 + 1)\theta] + B_4 \sin[(\lambda_0 + 1)\theta]. \quad (3.6)$$

Характеристическое уравнение для собственного значения λ_0 получается из граничных условий на берегах трещины

$$\sin 2\pi\lambda_0 = 0, \quad (3.7)$$

$\lambda_0 = m/2$, где m – целое число. Используя найденное выражение для собственного значения, можно отыскать соотношения между постоянными интегрирования B_j :

$$\begin{aligned} B_{3m} &= -\frac{m-2}{m+2}B_{1m}, & B_{4m} &= -B_{2m} & m &= \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots; \\ B_{3m} &= -B_{1m}, & B_{4m} &= -\frac{m-2}{m+2} & m &= 0, 2, \pm 4, \pm 6, \dots \end{aligned} \quad (3.8)$$

Для случая нечетных m решение дифференциального уравнения относительно функции $f_0(\theta)$ имеет вид (с точностью до неопределенного множителя):

$$f_0(\theta) = B_1 \{ \cos[(\lambda_0 - 1)\theta] - \cos[(\lambda_0 + 1)\theta] \} + B_2 \{ \sin[(\lambda_0 - 1)\theta] - \sin[(\lambda_0 + 1)\theta] \}. \quad (3.9)$$

Собирая коэффициенты при первой степени малого параметра ε^1 , получаем неоднородное линейное обыкновенное дифференциальное уравнение, которое относительно $f_1(\theta)$ имеет вид

$$\begin{aligned} f_1^{IV} + 2(\lambda_0^2 + 1)f_1'' + (\lambda_0^2 - 1)^2 f_1 &= \\ = -n_1 \frac{x_0(f_0^{IV} x_0 + \omega_0)}{g_0} + 2\lambda_0 f_0'' - C_1^1 f_0'' + C_2^1 x_0 + 2\lambda_0 a_0 f_0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где для краткости приняты обозначения

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 - \lambda_0^2, & x_0 &= a_0 f_0 + f_0'', & g_0 &= x_0^2 + 4\lambda_0^2 (f_0')^2, & C_1^1 &= 4\lambda_0 [2 + n_1(\lambda_0 - 1)], \\ \omega_0 &= (x_0')^2 + a_0 x_0 f_0'' + 4\lambda_0^2 (f_0'')^2 + 4\lambda_0^2 f_0' f_0''', & C_2^1 &= 2\lambda_0 [1 + n_1(\lambda_0 - 1)]. \end{aligned}$$

Граничные условия для функции $f_1(\theta)$ формируются как

$$f_1(\theta = \pm\pi) = 0, \quad f_1'(\theta = \pm\pi) = 0. \quad (3.11)$$

Таким образом, для определения функции $f_1(\theta)$ получена краевая задача для неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка (3.10), (3.14). Решение данной краевой задачи будет существовать, если выполнено некоторое условие разрешимости, для формулировки которого обычно обращаются к сопряженной краевой задаче [1; 6].

Можно показать, что условие разрешимости краевой задачи относительно функции $f_k(\theta)$ принимает вид [6; 7; 10]

$$\int_0^\pi u g_k dx = 0, \quad (3.12)$$

где $u = f_0(\theta) = B_1 \{ \cos[(\lambda_0 - 1)\theta] - \cos[(\lambda_0 + 1)\theta] \} + B_2 \{ \sin[(\lambda_0 - 1)\theta] - \sin[(\lambda_0 + 1)\theta] \}$, g_k – правая часть неоднородного уравнения для функции $f_k(\theta)$. Формулируя условие разрешимости для краевой задачи относительно функции $f_1(\theta)$, можно найти коэффициент n_1 асимптотического разложения показателя нелинейности материала.

Для того чтобы при решении данной краевой задаче воспользоваться численными методами, необходимо перейти к задаче Коши для уравнения (3.10). Сначала решение разыскивается на отрезке $[0, \pi]$

Начальные условия для функции $f_0(\theta)$ будут иметь вид:

$$\begin{aligned} f_0(\theta = 0) &= 1, & f_0'(\theta = 0) &= (\lambda_0 + 1)/(tg(\pi M^p/2)), \\ f_0''(\theta = 0) &= A_1, & f_0'''(\theta = 0) &= A_2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Для функции $f_1(\theta)$ задача Коши формулируется со следующими условиями:

$$f_1(\theta = 0) = 0, \quad f_1'(\theta = 0) = 1/(tg(\pi M^P/2)), \quad f_1''(\theta = 0) = A_1^*, \quad f_1'''(\theta = 0) = A_2^*, \quad (3.14)$$

где параметр M^P определяется следующим образом:

$$M^P = (2/\pi)arctg(-(\lambda_0 + 1)B_1/B_2).$$

На отрезке $[-\pi, 0]$ формулируется начальная задача для уравнения (3.10) с начальными условиями

$$f_0(\theta = -\pi) = 0, \quad f_0'(\theta = -\pi) = 0, \quad f_0''(\theta = -\pi) = A_3, \quad f_0'''(\theta = -\pi) = A_4. \quad (3.15)$$

$$f_1(\theta = -\pi) = 0, \quad f_1'(\theta = -\pi) = 0, \quad f_1''(\theta = -\pi) = A_3^*, \quad f_1'''(\theta = -\pi) = A_4^*, \quad (3.16)$$

где неизвестные константы A_3 и A_4 определяются из условий непрерывности решения при $\theta = 0$:

$$f_0(\theta = 0) = 1, \quad f_1(\theta = 0) = 0, \quad f_0'(\theta = 0) = (\lambda_0 + 1)/(tg(\pi M^P/2)), \\ f_1'(\theta = 0) = 1/(tg(\pi M^P/2)).$$

Собирая коэффициенты при ε^2 в уравнении (2.12), получаем неоднородное линейное обыкновенное дифференциальное уравнение, которое является еще более сложным по сравнению с уравнением (3.10) и имеет вид:

$$g_0^2[f_2^{IV} + 2(\lambda_0^2 + 1)f_2'' + (\lambda_0^2 - 1)^2 f_2] + g_0^2(-x_0 + C_1^2 f_0'' - C_2^2 x_0 + 2\lambda_0 C_2^1 f_0) + \\ + n_1 \left\{ -x_0(f_0^{IV} x_0 + \omega_0)[-4\lambda_0 f_0 x_0 + 8\lambda_0(f_0')^2] + \right. \\ + g_0 x_0[-4\lambda_0 x_0' f_0' - 2\lambda_0 a_0 f_0 f_0'' - 2\lambda_0 x_0 f_0' + 8\lambda_0(f_0'')^2 + 8\lambda_0 f_0' f_0'''] + \\ + 2h_0 x_0'[-4\lambda_0 f_0 x_0 + 8\lambda_0(f_0')^2] - 2h_0 x_0[-2\lambda_0 x_0 f_0' - 2\lambda_0 f_0 x_0' + 8\lambda_0 f_0' f_0''] + \\ + 4\lambda_0^2 h_0 f_0'[-4\lambda_0 f_0 x_0 + 8\lambda_0(f_0')^2] - 2\lambda_0 g_0 f_0(f_0^{IV} x_0 + \omega_0) - \\ - 2\lambda_0 g_0 f_0 f_0^{IV} x_0 + n_1 h_0^2 x_0 + 4\lambda_0 h_0^2 f_0 - 4\lambda_0 g_0 h_0 f_0' - x_0(f_0^{IV} x_0 + \omega_0) \times \\ \times [2x_0 x_1 + 8\lambda_0^2 f_0' f_1'] + g_0 x_0^2 f_1^{IV} + \\ + g_0 x_0[2x_0' x_1' + a_0 f_0' x_1 + a_0 x_0 f_1' + 8\lambda_0^2 f_0' f_1'' + 4\lambda_0^2 f_0''' f_1' + 4\lambda_0^2 f_0' f_1'''] + \\ + 2h_0 x_0'[2x_0 x_1 + 8\lambda_0^2 f_0' f_1'] - 2h_0 x_0[x_0 x_1' + x_0' x_1 + \lambda_0^2 f_0' f_1'' + 4\lambda_0^2 f_0' f_1'''] + \\ + 4\lambda_0^2 h_0 f_0'[2x_0 x_1 + 8\lambda_0^2 f_0' f_1'] + g_0(f_0^{IV} x_0 + \omega_0)x_1 + 2h_0 g_0 x_0' - 2h_0^2 x_1 + \\ \left. + 4\lambda_0^2 h_0 g_0 f_1' + f_0^{IV} g_0 x_0 x_1 \right\} = 0, \quad (3.17)$$

$$g_0 = x_0^2 + 4\lambda_0^2(f_0')^2, \quad h_0 = x_0 x_0' + 4\lambda_0^2 f_0' f_0'', \quad x_1 = f_1'' + a_0 f_1,$$

где выражение для функции $f_1(\theta)$ получено в [20].

Граничные условия для функции $f_2(\theta)$, следующие из краевых условий (2.13), формулируются следующим образом:

$$f_2(0) = 0, \quad f_2'(0) = 0, \quad f_2''(0) = A_4, \quad f_2'''(0) = A_5. \quad (3.18)$$

$$f_2(\theta = -\pi) = 0, \quad f_2'(\theta = -\pi) = 0, \quad f_2''(\theta = -\pi) = A_5^*, \quad f_2'''(\theta = -\pi) = A_6^*. \quad (3.19)$$

Решение краевой задачи (3.17) – (3.18) аналитическим способом не представляется возможным, поэтому было решено использовать иной подход, а именно условие разрешимости формулировалось в ходе численного решения краевой задачи для определения функции $f_k(\theta)$. Для численного счета был использован метод Рунге – Кутты – Фельберга в паре с методом пристрелки. В результате расчетов были найдены коэффициенты n_1 и n_2 с точностью от 10^{-5} до 10^{-7} для различных значений параметра смешанности M^P для $n = 2$. Результаты вычислений приведены в таблице.

Таблица

Вычисленные значения коэффициентов n_1 и n_2 для $\lambda_0 = 1/2$

M^P	$\lambda_0 = 1/2$		$\lambda_0 = -1/2$	
	n_1	n_2	n_1	n_2
$M^P = 0.0$	4.00000	8.0000000	1.3333333	3.0123456
$M^P = 0.1$	4.00000	7.9997562	1.3333333	3.0269835
$M^P = 0.2$	4.00000	7.9986923	1.3333333	3.0701926
$M^P = 0.3$	4.00000	7.9955185	1.3333333	3.1397530
$M^P = 0.4$	4.00000	7.9867700	1.3333333	3.1397530
$M^P = 0.5$	4.00000	7.9630625	1.3333333	3.1397530
$M^P = 0.6$	4.00000	7.8971870	1.3333333	3.4551500
$M^P = 0.7$	4.00000	7.7042370	1.3333303	3.5674200
$M^P = 0.8$	4.00000	7.1181770	1.3334023	3.6780000
$M^P = 0.9$	4.00014	5.5650000	1.3518183	20.130000
$M^P = 1.0$	4.00000	8.0000000	1.3333333	1.1380240

Таблица показывает зависимость коэффициента n_k от параметра смешанности нагружения. Как видно, коэффициент n_1 слабо зависит от M^P , однако, как показывает третий столбец, зависимость n_2 от M^P становится существенной, следовательно, для смешанного нагружения образца с дефектом пренебрегать зависимостью n от Параметра смешанности M^P нельзя.

Также был найден ряд значений коэффициента n_3 для некоторых значений параметра смешанности нагружения M^P и $\lambda_0 = -1/2$:

$$M^P = 0.1, n_3 = 8.83223, M^P = 0.2, n_3 = 9.0723675, M^P = 0.3, n_3 = 9.557903,$$

$$M^P = 0.3, n_3 = 10.406663$$

И ряд значений коэффициентов n_1, n_2, n_3 для некоторых значений параметра смешанности нагружения M^P и $\lambda_0 = 3/2$:

$$M^P = 0.3, n_1 = -4, n_2 = 15.73503635, n_3 = -63.07088,$$

$$M^P = 0.5, n_1 = -4, n_2 = 14.64218150, n_3 = -50.48461.$$

Следовательно, было получено прямое четырехчленное разложение Пуанкаре показателя нелинейности материала (в соответствии с терминологией, принятой в [6]):

$$n = 1 + n_1\varepsilon + n_2\varepsilon^2 + n_3\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4). \quad (3.20)$$

Из таблицы видно, что смешанное нагружение элемента конструкции (пластины) с дефектом ведет к нарушению асимптотики Хатчинсона – Райса – Розенгрена, поскольку, если бы решение HRR было справедливым, как установлено в [7], то $n_k = (-1)^k/(\lambda_0 - 1)^k$. Но результаты вычислений, приведенные в таблице, показывают, что это условие нарушается.

На рис. 1–6 цифрой 1 показаны распределение $f_0(\theta)$, цифрой 2 – численное решение краевой задачи (2.12), (2.13), цифрами 3, 4, 5 – двучленное $f(\theta) = f_0(\theta) + \varepsilon f_1(\theta)$, трехчленное $f(\theta) = f_0(\theta) + \varepsilon f_1(\theta) + \varepsilon^2 f_2(\theta)$ и четырехчленное $f(\theta) = f_0(\theta) + \varepsilon f_1(\theta) + \varepsilon^2 f_2(\theta) + \varepsilon^3 f_3(\theta)$ асимптотические разложения функции $f(\theta)$ соответственно.

Из графиков видно, что с увеличением числа удерживаемых слагаемых в асимптотическом разложении функции $f(\theta)$ угловые распределения стремятся к

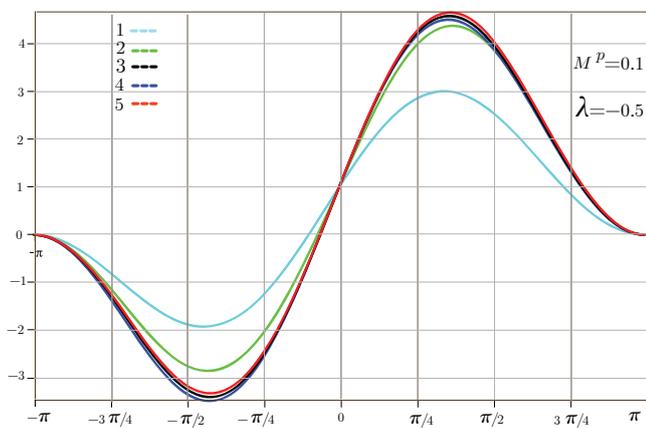


Рис. 1. Собственная функция $f(\theta)$ для параметра смешанности нагружения $M^P = 0.1$ и $\lambda_0 = -1/2$

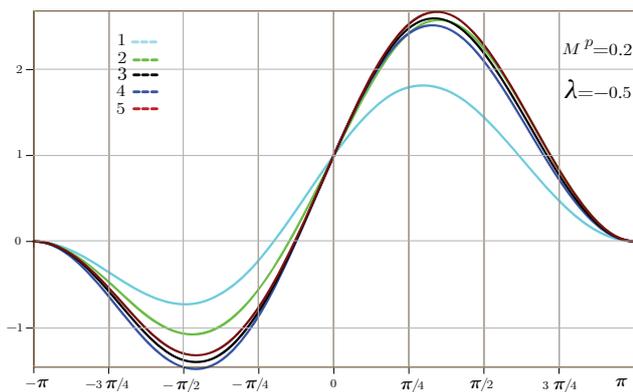


Рис. 2. Собственная функция $f(\theta)$ для параметра смешанности нагружения $M^P = 0.2$ и $\lambda_0 = -1/2$

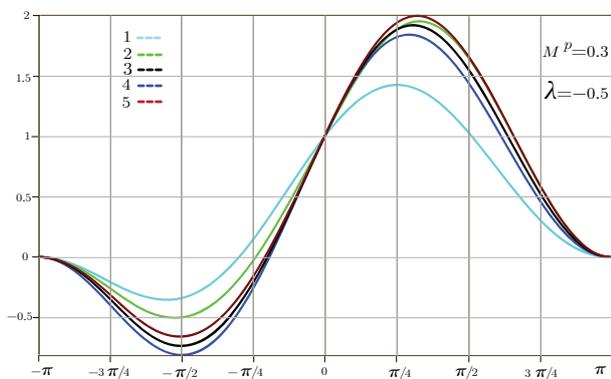


Рис. 3. Собственная функция $f(\theta)$ для параметра смешанности нагружения $M^P = 0.3$ и $\lambda_0 = -1/2$

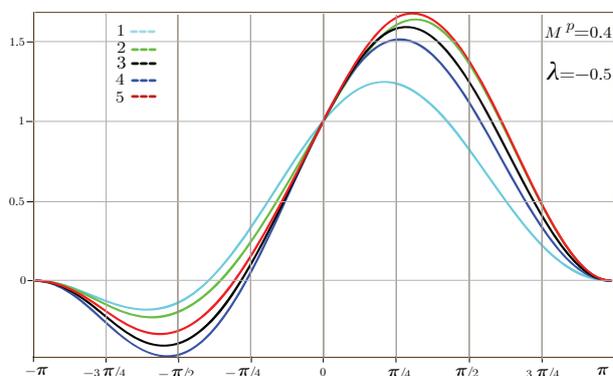


Рис. 4. Собственная функция $f(\theta)$ для параметра смешанности нагружения $M^P = 0.4$ и $\lambda_0 = -1/2$

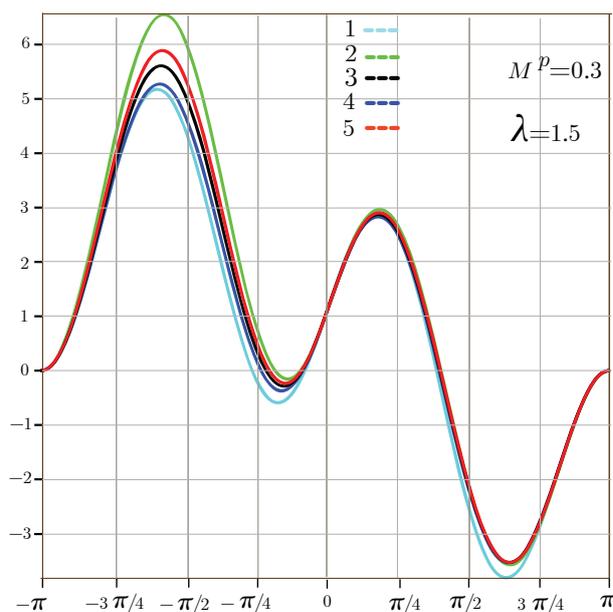


Рис. 5. Собственная функция $f(\theta)$ для параметра смешанности нагружения $M^P = 0.3$ и $\lambda_0 = 3/2$

численному решению. Как показано на рисунках, при использовании метода малого параметра достаточно удерживать три слагаемых в асимптотическом разложении, поскольку угловое распределение функции $f(\theta)$, полученное с помощью трехчленного разложения, близко к предельному численному решению.

4. Обсуждение результатов и выводы

В настоящей статье приведены результаты асимптотического и численного решения нелинейных задач на собственные значения, следующих из проблемы определения напряженно-деформированного состояния у вершины трещины в услови-

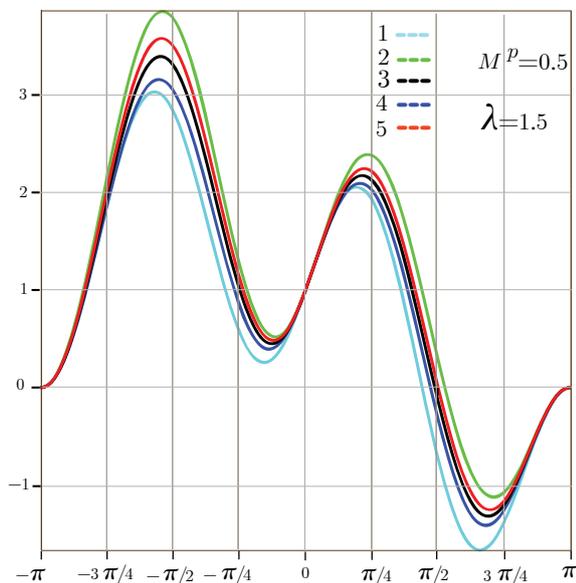


Рис. 6. Собственная функция $f(\theta)$ для параметра смешанности нагружения $M^p = 0.5$ и $\lambda_0 = 3/2$

ях смешанного нагружения в полном диапазоне видов смешанного деформирования от чистого нормального отрыва до чистого поперечного сдвига. Показано, что метод малого параметра дает эффективный способ вычисления собственных значений нелинейной задачи, следующей из проблем определения напряженно-деформированного состояния у вершины трещины. Смешанное деформирование пластины с дефектом приводит к новому классу нелинейных задач на собственные значения, поскольку асимптотика собственных значений в случае смешанного нагружения начинает существенно зависеть от значений параметра смешанности нагружения. Метод возмущений (метод искусственного малого параметра) позволяет найти весь спектр собственных значений задачи, которые впоследствии могут быть уточнены с помощью численного решения. Однако численное решение строится по средствам метода Рунге – Кутты – Фельберга в сочетании с методом пристрелки, для реализации которого очень важно знать начальное приближение, без него поиск численного решения сопряжен с большими временными и вычислительными затратами. В этой связи объединение численного решения с асимптотическим подходом дает возможность быстрого и эффективного решения нелинейной задачи на собственные значения. Полученное решение ясно показывает, что смешанное деформирование приводит к новой асимптотике поля напряжений в окрестности вершины трещины и, как установлено с помощью методов теории возмущений, в случае смешанного нагружения асимптотика Хатчинсона – Райса – Розенгрена нарушается.

Литература

- [1] Андрианов И., Аврейцевич Я. Методы асимптотического анализа и синтеза в нелинейной динамике и механике деформируемого твердого тела. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. 276 с.

- [2] Wei R.P. Fracture Mechanics. Integration of Mechanics, Materials Science and Chemistry. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. 232 p.
- [3] Kuna M. Finite Elements in Fracture Mechanics. Theory-Numerics-Applications. Dordrecht: Springer, 2013. 336 p.
- [4] Duality, Symmetry and symmetry lost in solid mechanics // Selected works of H.D. Bui / eds. A. Ehrlacher, H. Markenscoff. Paris: Presses des Ponts, 2011, 396 p.
- [5] Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extention // J. Appl. Mech. 1952. V. 19. P. 287–298.
- [6] Степанова Л.В. Математические методы механики разрушения. Самара: Изд-во "Самарский университет", 2006. 231 с.
- [7] Астафьев В.И., Степанова Л.В., Шестериков С.А. Асимптотика напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины в условиях ползучести // Вестник Самарского государственного университета. 1995. № 5. С. 59–64.
- [8] Sapora A., Carpinteri A. A Finite Fracture Mechanics approach to V-notched element subjected to mixed-mode loading// Engineering Fracture mechanics. 2013. V. 97. P. 216–226.
- [9] Weibgraeber P., Becker W. Finite Fracture Mechanics model for mixed mode fracture in adhesive joints // International Journal of Solids and Structures. 2013. V. 50(14). P. 2383–2394.
- [10] Степанова Л.В. Анализ собственных значений в задаче о трещине в материале со степенным определяющим законом // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49. № 8. С. 1399–1415.
- [11] Natarajan S., Song C., Belouettar S. Numerical evaluation of stress intensity factors and T-stress for interfacial cracks and cracks terminating at the interface without asymptotic enrichment: Computer methods in applied mechanics and engineering. 2014. V. 279. P. 86–112.
- [12] Степанова Л.В. Уточненный расчет напряженно-деформированного состояния у вершины трещины в условиях циклического нагружения в среде с поврежденностью // Вестник Самарского государственного университета. 2011. №2(83). С. 105–115.
- [13] Rice J.R., Rosengren G.F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. P. 1–12.
- [14] Hutchinson J.W. Singular behavior at the end of tensile crack in a hardening material // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. P. 13–31.
- [15] Hutchinson J.W. Plastic stress and strain fields at a crack tip // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. P. 337–349.
- [16] Carroll J., Daly S. Fatigue, Failure and Damage Evolution. Berlin: Springer, 2015. 252 p.
- [17] Rahman S., Mohammad E. Effects of mixed-mode overloading on the mixed-mode I+II fatigue crack growth. Berlin: Springer, 2013. P. 987–1000.
- [18] Anheuser M., Gross D. Higher order fields at crack and notch tips in power-law materials under longitudinal shear // Archive of Applied Mechanics. 1994. V. 64. P. 509–518.
- [19] Аддылина Е.М., Игонин С.А., Степанова Л.В. О нелинейной задаче на собственные значения, следующей из анализа напряжений у вершины усталостной трещины // Вестник Самарского государственного университета. 2012. № 3/1(94). P. 83–102.
- [20] Аддылина Е.М., Степанова Л.В. О построении многомасштабных моделей неупругого разрушения // Вестник Самарского государственного университета. 2012. № 9(100). С. 70–83.

- [21] Степанова Л.В., Аддылина Е.М. Напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины в условиях смешанного нагружения // Прикладная механика и техническая физика. 2014. Т. 55. № 5(327). С. 181–194.

References

- [1] Andrianova I.V., Awrejcewicz J. Methods of asymptotic analysis and synthesis in nonlinear dynamics and solid mechanics. M., Izevsk: Institut komp'iuternykh issledovaniy, 2013, 276 p. [in Russian].
- [2] Wei R.P. Fracture Mechanics. Integration of Mechanics, Materials Science and Chemistry. Cambridge, Cambridge University Press, 2014, 232 p. [in English]
- [3] Kuna M. Finite Elements in Fracture Mechanics. Theory-Numerics-Applications. Dordrecht, Springer, 2013, 336 p. [in English]
- [4] Duality, Symmetry and symmetry lost in solid mechanics. Selected works of H.D. Bui. A. Ehrlacher, H. Markenscoff (Eds.). Paris: Presses des Ponts, 2011, 396 p. [in English]
- [5] Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension: *J. Appl. Mech.*, 1952, Vol. 19, pp. 287–298 [in English].
- [6] Stepanova L.V. Mathematical methods of fracture mechanics. Samara, Samarskii universitet, 2006, 231 p. [in Russian].
- [7] Astafiev V.I., Stepanova L.V., Shesterikov S.A. Asymptotics of stress-strain state in the vicinity of the crack tip under creep conditions. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 1995, № 5, pp. 59–64 [in Russian].
- [8] Sabora A., Carpinteri A. A Finite Fracture Mechanics approach to V-notched element subjected to mixed-mode loading. *Engineering Fracture mechanics*, 2013, Vol. 97, pp. 216–226 [in English].
- [9] Weibgraeber P., Becker W. Finite Fracture Mechanics model for mixed mode fracture in adhesive joints: *International Journal of Solids and Structures*, 2013, Vol. 50(14), pp. 2383–2394 [in English].
- [10] Stepanova L.V. Eigenvalue analysis for a crack in a power-law material. *Zhurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoi fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2009, Vol. 49, № 8, pp. 1332–1347 [in Russian].
- [11] Natarajan S., Song C., Belouettar S. Numerical evaluation of stress intensity factors and T-stress for interfacial cracks and cracks terminating at the interface without asymptotic enrichment: *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2014, Vol. 279, pp. 86–112 [in English].
- [12] Stepanova L.V. Refined study of stress-strain state near the crack tip under cyclic loading in a damaged medium. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2011, № 2(83), pp. 105–115 [in Russian]
- [13] Rice J.R., Rosengren G.F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material: *J. Mech. Phys. Solids*, 1968, Vol. 16, pp. 1–12 [in English].
- [14] Hutchinson J.W. Singular behavior at the end of tensile crack in a hardening material: *J. Mech. Phys. Solids*, 1968, Vol. 16, pp. 13–31 [in English].
- [15] Hutchinson J.W. Plastic stress and strain fields at a crack tip. *J. Mech. Phys. Solids*, 1968, Vol. 16, pp. 337–349 [in English].
- [16] Carroll J., Daly S. Fatigue, Failure, and Damage Evolution. Berlin, Springer, 2015 252 p. [in English].
- [17] Rahman S., Mohammad E. Effects of mixed-mode overloading on the mixed-mode I+II fatigue crack growth. Berlin, Springer, 2013, pp. 987–1000 [in English].

- [18] Anheuser M., Gross D. Higher order fields at crack and notch tips in power-law materials under longitudinal shear: *Archive of Applied Mechanics*, 1994, Vol. 64, pp. 509–518 [in English].
- [19] Adylina E.M., Igonin S.A., Stepanova L.V. About a non-linear task on eigenvalues incurring from the analysis of tensions at the fatigue crack tip. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2012, №3/1(94), pp. 83–102 [in Russian].
- [20] Adylina E.M., Stepanova L.V. On development of multiscale fracture models. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2012, № 9(100), pp. 70–83 [in Russian].
- [21] Stepanova L.V., Adylina E.M. Stress-strain state in the vicinity of a crack tip under mixed mode loading. *Prikladnaia matematika i tekhnicheskaia fizika* [Applied Mechanics and Technical Physics], 2014, Vol. 55, № 5(327), pp. 885–895 [in Russian].

*L.V. Stepanova, E.M. Yakovleva*²

ASYMPTOTICS OF THE STRESS FIELD NEAR A CRACK TIP UNDER MIXED — MODE LOADING: SMALL PARAMETER METHOD

In the present paper approximate analytical and numeric solutions to nonlinear eigenvalue problems arising in nonlinear fracture mechanics in analysis of stress — strain fields near a crack tip under mixed mode loading are presented. Asymptotic solutions are obtained via perturbation method technique (small parameter method). The artificial small parameter is the difference between the eigenvalue corresponding to the nonlinear eigenvalue problem and the eigenvalue related to the linear "undisturbed" problem. It is shown that the perturbation technique gives an effective method of solving nonlinear eigenvalue problems in nonlinear fracture mechanics. Comparison results of numeric and asymptotic results for different value of the mixity parameter and hardening exponent shows good agreement. Thus the perturbation theory technique for study of nonlinear eigenvalue problems is offered and applied for eigenvalue problems arising from fracture mechanics analysis in the case of mixed mode loading.

Key words: mode II crack under plane stress conditions, power-law material, nonlinear eigenvalue problem, eigenspectrum and orders of stress singularity, perturbation technique

Статья поступила в редакцию 2/IX/2015.

The article received 2/IX/2015.

²Stepanova Larisa Valentinovna (stepanova1v@samsu.ru), Yakovleva Ekaterina Mikhailovna (adulinaek@samsu.ru), Department of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara State University, 1, Acad. Pavlov Street, Samara, 443011, Russian Federation.