УДК 519.63

О.П. Филатов[1]

ПРЕДЕЛЫ МАКСИМАЛЬНЫХ СРЕДНИХ И НЕАВТОНОМНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ

Доказана теорема существования предела максимального среднего для почти периодической функции многих переменных на решениях дифференциального включения, правая часть которого зависит от времени периодически.

Основное достаточное условие — задача Коши для дифференциального включения должна удовлетворять условию кратной достижимости. Это условие выполняется, например, для постоянной правой части дифференциального включения, которая не принадлежит собственному подпространству скоростей. Результат примыкает к теории усреднения дифференциальных включений с быстрыми и медленными переменными.

Ключевые слова: неавтономное дифференциальное включение, периодическая по времени правая часть, почти периодическая функция, предел максимального среднего.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального включения

$$\dot{x} \in G(t, x), \qquad x(0) = x_0, \tag{1.1}$$

где отображение $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ в совокупность $K(\mathbb{R}^n)$ непустых компактных множеств из $\mathbb{R}^n$ является периодическим с периодом $T > 0$. Далее предполагается, что любое решение задачи Коши (1.1) (абсолютно непрерывная функция на любом отрезке) можно продолжить на промежуток $[0, \infty)$ для любого начального вектора $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Все множество таких решений обозначается символом $X(x_0)$. Предел максимального среднего для непрерывной функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, если он существует, определяется соотношением

$$M(f) = \lim_{\Delta\to\infty} \sup_{x\in X(x_0)} S(\Delta, x), \qquad S(\Delta, x) = \frac{1}{\Delta}\int_0^{\Delta} f(x(t))\, dt. \tag{1.2}$$

В [1; 2] доказано, что в случае постоянной невырожденной правой части $G \in K(\mathbb{R}^n)$ (множество G не принадлежит подпространству из $\mathbb{R}^n$ размерности $n - 1$) дифференциального включения (1.1) и непрерывной почти периоди-

Филатов Олег Павлович (filatov_oleg@samaradom.ru), кафедра уравнений математической физики, Самарский государственный университет, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

ческой функции f предел максимального среднего (1.2) существует и не зависит от x_0.

В [3; 4] вопросы существования пределов максимальных средних рассматривались для дифференциальных включений с постоянной компактной правой частью G, при этом основное достаточное условие сводилось к существованию допустимого вектора скоростей с независимыми координатами (см. [5, теорема об усреднении]) из выпуклой оболочки множества G. Заметим, что в [3] независимость координат рассматривалась относительно спектра почти периодической функции.

В целом вопросы существования пределов максимальных средних примыкают к теории усреднения дифференциальных включений с быстрыми и медленными переменными [6; 7] и к теореме усреднения [5].

В данной работе доказана теорема о существовании предела максимального среднего для непрерывной почти периодической функции и неавтономного дифференциального включения с периодической по времени t правой частью при выполнении условия **кратной достижимости** для задачи (1.1).

2. Кратная достижимость

Множество достижимости задачи (1.1) в момент времени $t \geqslant 0$ обозначим

$$D(t, x_0) = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists\, x \in X(x_0),\, x(t) = y\}.$$

Будем говорить, что для задачи (1.1) выполняется условие **кратной достижимости**, если $(\forall\, l > 0)(\exists\, \Delta_* > 0)(\forall\, x_0 \in \mathbb{R}^n)(\exists\, a \in \mathbb{R}^n)$ и существует целое $k \leqslant \Delta_*/T$ такое, что брус

$$K(a, l) = \{y \in \mathbb{R}^n : a_j \leqslant y_j \leqslant a_j + l\}, \qquad a = (a_1, \ldots, a_n)$$

содержится в множестве достижимости $D(kT, x_0)$.

Условие кратной достижимости выполняется для любого $T > 0$, если постоянный невырожденный компакт G_0 содержится в выпуклой оболочке множества допустимых скоростей $G(t, x)$ для любого t. В следующем примере множество допустимых скоростей

$$G(t) = \{v \in \mathbb{R}^n : |v_j - 1 - \sin(t)| \leqslant 1,\, j = 1, \ldots, n\}$$

при любом t содержит единственный вектор $v = (v_1, \ldots, v_n)$ с координатами $v_1 = \cdots = v_n = 1$, которые зависимы:

$$v_1 k_1 + \cdots + v_n k_n = 0, \qquad n = 2, 3, \ldots,$$

где $k_j = 1, j = 1, \ldots, n-1, k_n = -n+1$, а множество $G_0 = \{v\}$ является вырожденным. Нетрудно показать, что и в этом случае задача (1.1) удовлетворяет условию кратной достижимости при любом $T > 0$.

3. Теорема

Условие продолжимости любого решения задачи Коши (1.1) на промежуток $[0, \infty)$ предполагается выполненным в следующей теореме.

Теорема 3.1. Пусть отображение $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to K(\mathbb{R}^n)$ является T-периодическим по $t \in \mathbb{R}$ и для задачи (1.1) выполняется условие кратной достижимости. Тогда для любой непрерывной почти периодической функции

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ предел максимального среднего (1.2) существует равномерно по начальному вектору $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и не зависит от x_0.

Доказательство. Воспользуемся критерием [6, теорема 5.2] существования равномерного по начальным условиям предела максимального среднего, не зависящего от x_0. Для задачи (1.1) критерий формулируется в следующем виде: $(\forall\,\varepsilon > 0)\,(\exists\,\Delta_0 > 0)\,(\forall\,a \in \mathbb{R}^n)\,(\forall\,b \in \mathbb{R}^n)\,(\forall\,x_a \in X(a))(\exists\,x_b \in X(b))\,(\forall\,\Delta \geqslant \Delta_0)$ выполняется неравенство

$$S(\Delta, x_a) \leqslant S(\Delta, x_b) + \varepsilon. \tag{3.1}$$

Так как функция f почти периодическая, то для данного $\varepsilon > 0$ существует число $l > 0$ такое, что любой брус $K(c, l), c \in \mathbb{R}^n$ содержит вектор $a + p$ для некоторого $\varepsilon/2$-периода p функции f и

$$|f(x + p) - f(x)| \leqslant \varepsilon/2, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.2}$$

Из условия кратной достижимости следует, что существует $\Delta_* > 0$ такое, что при целом k, $kT = t_* \leqslant \Delta_*$ найдется вектор $c \in \mathbb{R}^n$, для которого выполняются включения

$$a + p \in K(c, l) \subset D(t_*, b).$$

Следовательно, существует решение $x_* \in X(b)$, удовлетворяющее соотношению $x_*(t_*) = a + p$. Так как $t_* = kT$, а $G(t + T, x) \equiv G(t, x)$, то можно определить решение $x_b \in X(b)$ следующим образом:

$$x_b(t) = \begin{cases} x_*(t), & 0 \leqslant t \leqslant t_*, \\ a + p + \int_0^{t-t_*} \dot{x}_a(s)\,ds, & t > t_*. \end{cases} \tag{3.3}$$

Воспользуемся равенством

$$\int_0^\Delta f(x_b(t))\,dt = \int_0^{t_*} f(x_b(t))\,dt + \int_{t_*}^{t_*+\Delta} f(x_b(t))\,dt - \int_\Delta^{t_*+\Delta} f(x_b(t))\,dt. \tag{3.4}$$

Здесь для среднего интеграла из (3.3) следует

$$\int_{t_*}^{t_*+\Delta} f(x_b(t))\,dt = \int_0^\Delta f(x_b(t + t_*))\,dt = \int_0^\Delta f(p + x_a(t))\,dt. \tag{3.5}$$

Первый и третий интегралы в правой части (3.4) оцениваются одинаково. Например,

$$|\int_0^{t_*} f(x_b(t))\,dt| \leqslant f_0\Delta_*, \qquad f_0 = \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Следовательно, из (3.4), с учетом (3.2) и (3.5) получим

$$|S(\Delta, x_b) - S(\Delta, x_a)| \leqslant \frac{2f_0\Delta_*}{\Delta} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если в качестве Δ_0 из критерия существования предела максимального среднего взять число $4f_0\Delta_*/\varepsilon$, то при $\Delta \geqslant \Delta_0$ для решения $x_b \in X(b)$ выполняется неравенство (3.1). Теорема доказана.

Замечание. Для задачи Коши

$$\dot{x} \in G(t, x), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{3.6}$$

с начальным вектором $x_0 \in \mathbb{R}^n$ в произвольный начальный момент времени $t_0 \in \mathbb{R}$ теорема 3.1 остается в силе с очевидным уточнением заключения теоремы: $\cdots$

предел максимального среднего (1.2) существует равномерно по $x_0 \in \mathbb{R}^n, t_0 \in \mathbb{R}$ и не зависит от x_0 и t_0. Это следует из простых соображений с учетом равенства

$$\sup_{x \in X(0,x_0)} \{\frac{1}{\Delta}\int_0^{\Delta} f(x(t))\,dt\} = \sup_{x \in X(kT,x_0)} \{\frac{1}{\Delta}\int_{kT}^{kT+\Delta} f(x(t))\,dt\},$$

справедливого для целого k, которое вытекает из периодической зависимости по t правой части дифференциального включения. Здесь $X(t_0,x_0)$ — множество всех решений задачи (3.6), определенных в промежутке $[t_0,\infty)$.

Литература

[1] Филатов О.П. Существование пределов максимальных средних для почти периодических функций // Вестник Самарского госуниверситета. Естественнонаучная серия. 1998. № 2(8). С. 69–73.

[2] Филатов О.П. Существование пределов максимальных средних // Математические заметки. 2000. Т. 67. Вып. 3. С. 433–440.

[3] Филатов О.П. Теорема усреднения для почти периодических функций // Вестник Самарского госуниверситета. Естественнонаучная серия. 2012. № 6(97). С. 100–112.

[4] Филатов О.П. Теорема об усреднении для неопределенных условно-периодических движений // Математические заметки. 2011. Т. 90. Вып. 2. С. 318–320.

[5] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.

[6] Филатов О.П. Усреднение дифференциальных включений и пределы максимальных средних. Самара: Универс групп, 2009. 176 с.

[7] Филатов О.П., Хапаев М.М. Усреднение систем дифференциальных включений. М.: Изд-во Московского университета, 1998. 160 с.

References

[1] Filatov O.P. The existence of limits of maximal means for almost periodic functions. Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaya seria. 1998. no. 2(8). pp. 69–73 [in Russian].

[2] Filatov O.P. The existence of limits of maximal means. Mathematicheskie Zametki. 2000. V. 67. no. 3. pp. 433–440 [in Russian].

[3] Filatov O.P. Averaging theorem for almost periodic functions. Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaya seria. 2012. no. 6(97). pp. 100–112 [in Russian].

[4] Filatov O.P. Averaging theorem for indefinite conditionally periodic motions. Mathematicheskie Zametki. 2011. V. 90. no. 2. pp. 318–320 [in Russian].

[5] Arnold V.I. Mathematical methods of classical mechanics. M.: Nauka. 1989. 472 p. [in Russian].

[6] Filatov O.P. Averaging of differential inclusions and the limits of maximal means, Samara: Univers grupp. 2009. 176 p. [in Russian].

[7] Filatov O.P., Hapaev M.M. Averaging systems of differential inclusions. M.: Izd-vo MGU, 1998. 160 p. [in Russian].

O.P. Filatov[2]

THE LIMITS OF MAXIMAL MEANS AND NO AUTONOMOUS DIFFERENTIAL INCLUSIONS

The existence theorem of the limit of the maximum average for almost periodic functions on a stand-alone solutions of no autonomous differential inclusion, the right part of which depends on the time periodically is proved.

The main condition is a condition of multiple attainability for a differential inclusion. This condition is satisfied, for example, for a constant right-hand side, which does not belong to the eigenspace of speeds. The result is related to the theory of averaging of differential inclusions with slow and fast variables.

Key words: no autonomous differential inclusions, time-periodic right-hand side, almost periodic functions, limit of the maximum average.

Статья поступила в редакцию $2/X/2015$.

The article received $2/X/2015$.

[2] *Filatov Oleg Pavlovich* (filatov_oleg@samaradom.ru), the Dept. of Mathematics and Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.