УДК 517.968

Е.А. Созонтова[1]

ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ТРЕХМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КВАДРАТУРАХ

В данной статье рассматривается система уравнений с частными интегралами в трехмерном пространстве. Целью исследования является выделение достаточных условий разрешимости этой системы в квадратурах. Предложен метод, основанный на редукции исходной системы сначала к задаче Гурса для системы дифференциальных уравнений первого порядка, а затем к трем задачам Гурса для дифференциальных уравнений третьего порядка. В результате получены условия, обеспечивающие возможности построения решения рассматриваемой системы уравнений в явном виде. Общее количество вариантов обсуждаемой разрешимости равно 16.

Ключевые слова: система с частными интегралами, условие разрешимости, решение в квадратурах, дифференциальное уравнение, задача Гурса.

В работе [1] для ряда уравнений с частными интегралами (термин встречается, например, в [2, с. 4]) реализована идея их редукции к задачам Гурса, допускающим возможности построения их решений в виде явных формул. В [3] развивается та же идея с целью ее применения к системе уравнений с частными интегралами в двумерном пространстве. В настоящей статье в области $D = \{x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1,\ z_0 < z < z_1\}$ рассматривается трехмерная система вида

$$\begin{gathered}
\varphi_i(x,y,z) = a_{i1}(x,y,z)\int\limits_{x_0}^{x}[b_{11}(t,y,z)\varphi_1(t,y,z) + b_{12}(t,y,z)\varphi_2(t,y,z)+ \\
+b_{13}(t,y,z)\varphi_3(t,y,z)]dt + a_{i2}(x,y,z)\int\limits_{y_0}^{y}[b_{21}(x,\tau,z)\varphi_1(x,\tau,z)+ \\
+b_{22}(x,\tau,z)\varphi_2(x,\tau,z) + b_{23}(x,\tau,z)\varphi_3(x,\tau,z)]d\tau+ \\
+a_{i3}(x,y,z)\int\limits_{z_0}^{z}[b_{31}(x,y,\theta)\varphi_1(x,y,\theta) + b_{32}(x,y,\theta)\varphi_2(x,y,\theta)+ \\
+b_{33}(x,y,\theta)\varphi_3(x,y,\theta)]d\theta + f_i(x,y,z), \quad i = \overline{1,3}.
\end{gathered} \tag{1}$$

Предполагается, что коэффициенты данной системы непрерывны в $\overline{D}$ и выполнено неравенство

$$\Delta(x,y) = \det\|a_{ik}(x,y,z)\| \neq 0. \tag{2}$$

Созонтова Елена Александровна (sozontova-elena@rambler.ru),кафедра математического анализа, алгебры и геометрии, Елабужский институт Казанского (Приволжского) федерального университета, 423600, Российская Федерация, г. Елабуга, ул. Казанская, 89.

Введем обозначения

$$
\begin{aligned}
M = \int\limits_{x_0}^{x} [b_{11}(t,y,z)\varphi_1(t,y,z) + b_{12}(t,y,z)\varphi_2(t,y,z)+ \\
+b_{13}(t,y,z)\varphi_3(t,y,z)]dt, \\
N = \int\limits_{y_0}^{y} [b_{21}(x,\tau,z)\varphi_1(x,\tau,z) + b_{22}(x,\tau,z)\varphi_2(x,\tau,z)+ \\
+b_{23}(x,\tau,z)\varphi_3(x,\tau,z)]d\tau, \\
K = \int\limits_{z_0}^{z} [b_{31}(x,y,\theta)\varphi_1(x,y,\theta) + b_{32}(x,y,\theta)\varphi_2(x,y,\theta)+ \\
+b_{33}(x,y,\theta)\varphi_3(x,y,\theta)]d\theta.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Тогда в силу (2) найдем

$$
\begin{aligned}
M = ((a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})\varphi_1 + (a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33})\varphi_2 + \\
+(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})\varphi_3 - (a_{22}a_{33}f_1 + a_{12}a_{23}f_3 + \\
+a_{13}a_{32}f_2 - a_{13}a_{22}f_3 - a_{23}a_{32}f_1 - a_{12}a_{33}f_2))\Delta^{-1}, \\
N = ((a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33})\varphi_1 + (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})\varphi_2 + \\
+(a_{21}a_{13} - a_{23}a_{11})\varphi_3 - (a_{11}a_{33}f_2 + a_{22}a_{31}f_1 + \\
+a_{21}a_{13}f_3 - a_{13}a_{31}f_2 - a_{23}a_{11}f_3 - a_{21}a_{33}f_1))\Delta^{-1}, \\
K = ((a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})\varphi_1 + (a_{12}a_{31} - a_{32}a_{11})\varphi_2 + \\
+(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\varphi_3 - (a_{11}a_{22}f_3 + a_{12}a_{31}f_2 + \\
+a_{21}a_{32}f_1 - a_{31}a_{22}f_1 - a_{32}a_{11}f_2 - a_{21}a_{12}f_3))\Delta^{-1}.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Введем новые искомые функции по формулам

$$
\begin{aligned}
(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})\varphi_1 + (a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33})\varphi_2 + (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})\varphi_3 = u, \\
(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33})\varphi_1 + (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})\varphi_2 + (a_{21}a_{13} - a_{23}a_{11})\varphi_3 = v, \\
(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})\varphi_1 + (a_{12}a_{31} - a_{32}a_{11})\varphi_2 + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\varphi_3 = w
\end{aligned}
\tag{5}
$$

и будем рассматривать (5) как систему уравнений для $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3$. Обозначим определитель этой системы через Δ_1 и будем считать, что

$$\Delta_1 \neq 0. \tag{6}$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 = (A_1u + B_1v + C_1w)(\Delta_1)^{-1}, \\
\varphi_2 = (A_2u + B_2v + C_2w)(\Delta_1)^{-1}, \\
\varphi_3 = (A_3u + B_3v + C_3w)(\Delta_1)^{-1},
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где $A_i,\ B_i,\ C_i\ (i = \overline{1,3})$ понятным образом выражаются через коэффициенты системы (1). Соотношения (5) и (7) показывают, что задачи отыскания функций $(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3)$ и $(u,\ v,\ w)$ эквивалентны друг другу.

С другой стороны, подставляя (5) в (4), получим

$$
\begin{aligned}
M = (u - (a_{22}a_{33}f_1 + a_{12}a_{23}f_3 + a_{13}a_{32}f_2 - \\
-a_{13}a_{22}f_3 - a_{23}a_{32}f_1 - a_{12}a_{33}f_2))\Delta^{-1}, \\
N = (v - (a_{11}a_{33}f_2 + a_{22}a_{31}f_1 + a_{21}a_{13}f_3 - \\
-a_{13}a_{31}f_2 - a_{23}a_{11}f_3 - a_{21}a_{33}f_1))\Delta^{-1}, \\
K = (w - (a_{11}a_{22}f_3 + a_{12}a_{31}f_2 + a_{21}a_{32}f_1 - \\
-a_{31}a_{22}f_1 - a_{32}a_{11}f_2 - a_{21}a_{12}f_3))\Delta^{-1}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Теперь подставим (7) в (3), а затем получившиеся соотношения подставим в (8). В результате имеем

$$\int\limits_{x_0}^{x} \Delta_1^{-1}[b_{11}(A_1u + B_1v + C_1w) + b_{12}(A_2u + B_2v + C_2w)+$$
$$+b_{13}(A_3u + B_3v + C_3w)]dt =$$
$$= (u - (a_{22}a_{33}f_1 + a_{12}a_{23}f_3 + a_{13}a_{32}f_2 - a_{13}a_{22}f_3 - a_{23}a_{32}f_1 - a_{12}a_{33}f_2))\Delta^{-1},$$
$$\int\limits_{y_0}^{y} \Delta_1^{-1}[b_{21}(A_1u + B_1v + C_1w) + b_{22}(A_2u + B_2v + C_2w)+$$
$$+b_{23}(A_3u + B_3v + C_3w)]dt =$$
$$= (v - (a_{11}a_{33}f_2 + a_{22}a_{31}f_1 + a_{21}a_{13}f_3 - a_{13}a_{31}f_2 - a_{23}a_{11}f_3 - a_{21}a_{33}f_1))\Delta^{-1},$$
$$\int\limits_{z_0}^{z} \Delta_1^{-1}[b_{31}(A_1u + B_1v + C_1w) + b_{32}(A_2u + B_2v + C_2w)+$$
$$+b_{33}(A_3u + B_3v + C_3w)]dt =$$
$$= (w - (a_{11}a_{22}f_3 + a_{12}a_{31}f_2 + a_{21}a_{32}f_1 - a_{31}a_{22}f_1 - a_{32}a_{11}f_2 - a_{21}a_{12}f_3))\Delta^{-1}.$$

Продифференцируем полученные соотношения по x, y, z соответственно. В итоге получим систему (после домножения на Δ обеих частей соотношений)

$$\begin{cases} u_x + \alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w = G_1, \\ v_y + \alpha_2 u + \beta_2 v + \gamma_2 w = G_2, \\ w_z + \alpha_3 u + \beta_3 v + \gamma_3 w = G_3, \end{cases} \tag{9}$$

где

$$\begin{gathered}
\alpha_1 = -((\ln\Delta)_x + (b_{11}A_1 + b_{12}A_2 + b_{13}A_3)\tfrac{\Delta}{\Delta_1}), \\
\beta_1 = -(b_{11}B_1 + b_{12}B_2 + b_{13}B_3)\tfrac{\Delta}{\Delta_1}, \\
\gamma_1 = -(b_{11}C_1 + b_{12}C_2 + b_{13}C_3)\tfrac{\Delta}{\Delta_1}, \\
\alpha_2 = -(b_{21}A_1 + b_{22}A_2 + b_{23}A_3)\tfrac{\Delta}{\Delta_1}, \\
\beta_2 = -((\ln\Delta)_y + (b_{21}B_1 + b_{22}B_2 + b_{23}B_3)\tfrac{\Delta}{\Delta_1}), \\
\gamma_2 = -(b_{21}C_1 + b_{22}C_2 + b_{23}C_3)\tfrac{\Delta}{\Delta_1}, \\
\alpha_3 = -(b_{31}A_1 + b_{32}A_2 + b_{33}A_3)\tfrac{\Delta}{\Delta_1}, \\
\beta_3 = -(b_{31}B_1 + b_{32}B_2 + b_{33}B_3)\tfrac{\Delta}{\Delta_1}, \\
\gamma_3 = -((\ln\Delta)_z + (b_{31}C_1 + b_{32}C_2 + b_{33}C_3)\tfrac{\Delta}{\Delta_1}), \\
G_1 = \Delta(\tfrac{a_{22}a_{33}f_1 + a_{12}a_{23}f_3 + a_{13}a_{32}f_2 - a_{13}a_{22}f_3 - a_{23}a_{32}f_1 - a_{12}a_{33}f_2}{\Delta})_x, \\
G_2 = \Delta(\tfrac{a_{11}a_{33}f_2 + a_{22}a_{31}f_1 + a_{21}a_{13}f_3 - a_{13}a_{31}f_2 - a_{23}a_{11}f_3 - a_{21}a_{33}f_1}{\Delta})_y, \\
G_3 = \Delta(\tfrac{a_{11}a_{22}f_3 + a_{12}a_{31}f_2 + a_{21}a_{32}f_1 - a_{31}a_{22}f_1 - a_{32}a_{11}f_2 - a_{21}a_{12}f_3}{\Delta})_z.
\end{gathered} \tag{10}$$

Так как из обозначений M, N, K следуют тождества $M(x_0, y, z) \equiv N(x, y_0, z) \equiv \equiv K(x, y, z_0) \equiv 0$, то из (8) вычисляются граничные значения

$$\begin{gathered}
u(x_0, y, z) = a_{22}a_{33}f_1 + a_{12}a_{23}f_3 + a_{13}a_{32}f_2 - \\
-a_{13}a_{22}f_3 - a_{23}a_{32}f_1 - a_{12}a_{33}f_2, \\
v(x, y_0, z) = a_{11}a_{33}f_2 + a_{22}a_{31}f_1 + a_{21}a_{13}f_3 - \\
-a_{13}a_{31}f_2 - a_{23}a_{11}f_3 - a_{21}a_{33}f_1, \\
w(x, y, z_0) = a_{11}a_{22}f_3 + a_{12}a_{31}f_2 + a_{21}a_{32}f_1 - \\
-a_{31}a_{22}f_1 - a_{32}a_{11}f_2 - a_{21}a_{12}f_3.
\end{gathered} \tag{11}$$

Таким образом, система (1) редуцирована к задаче Гурса (9)–(11), которая является однозначно разрешимой [4]. Для отыскания условий ее разрешимости в явном виде положим

$$\gamma_1 \equiv \alpha_2 \equiv \beta_3 \equiv 0 \tag{12}$$

и применим к полученной системе подстановки

$$u = U\exp(-\alpha_1 x), \qquad v = V\exp(-\beta_2 y), \quad w = W\exp(-\gamma_3 z). \tag{13}$$

В итоге из (9) получим систему

$$\begin{cases} U_x = \beta V + F_1, \\ V_y = \gamma W + F_2, \\ W_z = \alpha U + F_3, \end{cases} \tag{14}$$

где

$$\begin{gathered} \alpha = -\alpha_3 \exp(\gamma_3 z - \alpha_1 x), \;\; \beta = -\beta_1 \exp(\alpha_1 x - \beta_2 y), \\ \gamma = -\gamma_2 \exp(\beta_2 y - \gamma_3 z), \\ F_1 = f_1 \exp(\alpha_1 x), \;\; F_2 = f_2 \exp(\beta_2 y), \;\; F_3 = f_3 \exp(\gamma_3 z). \end{gathered} \tag{15}$$

Подставляя значения из (11) в (13), получим

$$\begin{gathered} U(x_0, y, z) = (a_{22}a_{33}f_1 + a_{12}a_{23}f_3 + a_{13}a_{32}f_2 - \\ -a_{13}a_{22}f_3 - a_{23}a_{32}f_1 - a_{12}a_{33}f_2) \exp(\alpha_1 x_0), \\ V(x, y_0, z) = (a_{11}a_{33}f_2 + a_{22}a_{31}f_1 + a_{21}a_{13}f_3 - \\ -a_{13}a_{31}f_2 - a_{23}a_{11}f_3 - a_{21}a_{33}f_1) \exp(\beta_2 y_0), \\ W(x, y, z_0) = (a_{11}a_{22}f_3 + a_{12}a_{31}f_2 + a_{21}a_{32}f_1 - \\ -a_{31}a_{22}f_1 - a_{32}a_{11}f_2 - a_{21}a_{12}f_3) \exp(\gamma_3 z_0). \end{gathered} \tag{16}$$

Далее воспользуемся возможностью редукции системы (14) к уравнениям вида

$$\Theta_{xyz} + a\Theta_{xy} + b\Theta_{yz} + c\Theta_{xz} + d\Theta_x + e\Theta_y + f\Theta_z + g\Theta = \Phi. \tag{17}$$

При выполнении неравенства

$$\beta\gamma \neq 0, \tag{18}$$

исключая из системы (14) функции V, W, приходим к (17) для $\Theta = U$. При этом нетрудно заметить, что коэффициенты уравнения даются формулами

$$\begin{gathered} b \equiv e \equiv f \equiv 0, \;\; a = -(\ln(\beta\gamma))_z, \;\; c = -(\ln\beta)_y, \\ d = -(\ln\beta)_{yz} + (\ln\beta)_y[\ln(\beta\gamma)]_z, \\ g = -\alpha\beta\gamma, \;\; \Phi = \beta\gamma F_3 + (\beta F_2)_z - ((\ln\beta)_y F_1)_z + \\ +[\ln(\beta\gamma)]_z(-F_2\beta + F_1(\ln\beta)_y - (F_1)_y) + (F_1)_{yz}. \end{gathered} \tag{19}$$

При выполнении неравенства

$$\alpha\gamma \neq 0 \tag{20}$$

приходим к (17) для $\Theta = V$ с коэффициентами

$$\begin{gathered} c \equiv d \equiv f \equiv 0, \;\; a = -(\ln\gamma)_z, \;\; b = -(\ln(\alpha\gamma))_x, \\ e = -(\ln\gamma)_{xz} + (\ln\gamma)_z[\ln(\alpha\gamma)]_x, \\ g = -\alpha\beta\gamma, \;\; \Phi = \alpha\gamma F_1 + (\gamma F_3)_x - ((\ln\gamma)_z F_2)_x + \\ +[\ln(\alpha\gamma)]_x(-F_3\gamma + F_2(\ln\gamma)_z - (F_2)_z) + (F_2)_{xz}, \end{gathered} \tag{21}$$

а при

$$\alpha\beta \neq 0 \tag{22}$$

приходим к (17) для $\Theta = W$ с коэффициентами

$$\begin{gathered} a \equiv d \equiv e \equiv 0, \;\; b = -(\ln\alpha)_x, \;\; c = -(\ln(\alpha\beta))_y, \\ f = -(\ln\alpha)_{xy} + (\ln\alpha)_x[\ln(\alpha\beta)]_y, \\ g = -\alpha\beta\gamma, \;\; \Phi = \alpha\beta F_2 + (\alpha F_1)_y - ((\ln\alpha)_x F_3)_y + \\ +[\ln(\alpha\beta)]_y(-F_1\alpha + F_3(\ln\alpha)_x - (F_3)_x) + (F_3)_{xy} \end{gathered} \tag{23}$$

Остановимся теперь подробно на исследовании уравнения (17) при $\Theta = U$ (в случаях, когда $\Theta = V$ или $\Theta = W$ рассуждения проводятся аналогичным образом). Для отыскания $\Theta = U$ из (17) первого условия из (16) недостаточно: нужно иметь еще значения

$$U(x, y_0, z) = r(x, z), \qquad U(x, y, z_0) = g(x, y). \tag{24}$$

Они могут быть найдены из (14). Действительно, полагая в первом уравнении системы (14) сначала $y = y_0$, а потом $z = z_0$, приходим к линейным уравнениям вида

$$r_x^{'}(x,z) = \Phi_1(x,z), \;\; g_x^{'}(x,y) = \Phi_2(x,y).$$

В силу условий (16) известны $\Phi_1(x,z)$, $\Phi_2(x,y)$ и начальные условия $r(x_0,z)$, $g(x_0,y)$, поэтому вычисление $r(x,z)$, $g(x,y)$ происходит путем непосредственного интегрирования полученных дифференциальных уравнений, причем при нахождении $r(x,z)$ z рассматривается как параметр, а при решении второго уравнения в качестве параметра выступает y. Понятно, что первое соотношение в (16) и соотношения (24) есть граничные условия задачи Гурса для уравнения вида (17) при $\Theta = U$. Подобным образом могут быть получены граничные условия для уравнения вида (17) при $\Theta = V$ и $\Theta = W$.

Известно [5, с. 26–28], что решения сформулированных задач Гурса записываются через соответствующие функции Римана, причем для последних имеются [5, с. 36–46] различные случаи их построения в явном виде. Важную роль в обозначенной выше работе играют конструкции

$$\begin{gathered} h_1 = a_x + ab - e, \;\; h_2 = a_y + ac - d, \;\; h_3 = b_y + bc - f, \\ h_4 = b_z + ab - e, \;\; h_5 = c_x + bc - f, \;\; h_6 = c_z + ac - d, \\ h_7 = d_x + bd - g, \;\; h_8 = e_y + ce - g, \;\; h_9 = f_z + af - g \end{gathered}$$

и условия

$$\begin{array}{ll} 1.\;\; h_1 \equiv h_2 \equiv h_5 \equiv 0, \;\; h_7 \in M; & 2.\;\; h_2 \equiv h_3 \equiv h_4 \equiv 0, \;\; h_8 \in M; \\ 3.\;\; h_4 \equiv h_5 \equiv h_6 \equiv 0, \;\; h_9 \in M; & 4.\;\; h_1 \equiv h_5 \equiv h_6 \equiv 0, \;\; h_7 \in M; \\ 5.\;\; h_1 \equiv h_2 \equiv h_3 \equiv 0, \;\; h_8 \in M; & 6.\;\; h_3 \equiv h_4 \equiv h_6 \equiv 0, \;\; h_9 \in M; \\ \multicolumn{2}{l}{7.\;\; a = \lambda(z) + \delta xy, \quad b = \mu(x) + \delta yz, \quad c = \nu(y) + \delta xz, \;\; \delta = const,} \end{array} \tag{25}$$

где M – класс функций вида $m_1(x)m_2(y)m_3(z)$. Каждого из условий 1 – 6, выполненного совместно с условием 7, достаточно для получения явного вида функции Римана.

Теперь для достижения основной цели нам необходимо записать условия (25) через коэффициенты системы (9) для каждой из трех задач Гурса, используя формулы (15), (19), (21), (23). При $\Theta = U$ получаем

$$\begin{array}{l} 1.\;\; [\ln(\beta_1\gamma_2)]_{xz} + (\alpha_1 x - \gamma_3 z)_{xz} \equiv (\ln\gamma_2)_{yz} + (\beta_2 y - \gamma_3 z)_{yz} \equiv \\ \equiv (\ln\beta_1)_{xy} + (\alpha_1 x - \beta_2 y)_{xy} \equiv 0, \;\; \alpha_3\beta_1\gamma_2 \in M; \\ 2.\;\; (\ln\gamma_2)_{yz} + (\beta_2 y - \gamma_3 z)_{yz} \equiv 0, \;\; \alpha_3\beta_1\gamma_2 \in M; \\ 3.\;\; (\ln\beta_1)_{xy} + (\alpha_1 x - \beta_2 y)_{xy} \equiv 0, \;\; \alpha_3\beta_1\gamma_2 \in M; \\ 4.\;\; [\ln(\alpha_3\gamma_2)]_{xz} + (\alpha_1 x - \gamma_3 z)_{xz} \equiv \\ \equiv (\ln\beta_1)_{xy} + (\alpha_1 x - \beta_2 y)_{xy} \equiv 0, \;\; \alpha_3\beta_1\gamma_2 \in M; \\ 5.\;\; [\ln(\alpha_3\gamma_2)]_{xz} + (\alpha_1 x - \gamma_3 z)_{xz} \equiv \\ \equiv (\ln\gamma_2)_{yz} + (\beta_2 y - \gamma_3 z)_{yz} \equiv 0, \;\; \alpha_3\beta_1\gamma_2 \in M; \\ 6.\;\; \alpha_3\beta_1\gamma_2 \in M; \\ 7.\;\; a = \lambda(z), \quad c = \nu(y). \end{array} \tag{26}$$

Аналогично при $\Theta = V$ условия (25) принимают вид

$$\begin{array}{l}
1.\ (\ln\gamma_2)_{yz} + (\beta_2 y - \gamma_3 z)_{yz} \equiv 0,\ \ \alpha_3\beta_1\gamma_2 \in M;\\
2.\ (\ln\gamma_2)_{yz} + (\beta_2 y - \gamma_3 z)_{yz} \equiv [\ln(\alpha_3\gamma_2)]_{xy} + (\beta_2 y - \alpha_1 x)_{xy} \equiv\\
\equiv (\ln\alpha_3)_{xz} + (\gamma_3 z - \alpha_1 x)_{xz} \equiv 0,\ \ \alpha_3\beta_1\gamma_2 \in M;\\
3. (\ln\alpha_3)_{xz} + (\gamma_3 z - \alpha_1 x)_{xz} \equiv 0,\ \ \alpha_3\beta_1\gamma_2 \in M;\\
4.\ \alpha_3\beta_1\gamma_2 \in M;\\
5. (\ln\gamma_2)_{yz} + (\beta_2 y - \gamma_3 z)_{yz} \equiv\\
\equiv [\ln(\alpha_3\gamma_2)]_{xy} + (\gamma_2 y - \alpha_1 x)_{xy} \equiv 0,\ \ \alpha_3\beta_1\gamma_2 \in M;\\
6.\ [\ln(\alpha_3\gamma_2)]_{xy} + (\beta_2 y - \alpha_1 x)_{xy} \equiv\\
\equiv (\ln\alpha_3)_{xz} + (\gamma_3 z - \alpha_1 x)_{xz} \equiv 0,\ \ \alpha_3\beta_1\gamma_2 \in M;\\
7.\ a = \lambda(z), \qquad b = \mu(x).
\end{array} \tag{27}$$

В случае, когда $\Theta = W$, имеем

$$\begin{array}{l}
1.\ (\ln\beta_1)_{xy} + (\alpha_1 x - \beta_2 y)_{xy} \equiv 0,\ \ \alpha_3\beta_1\gamma_2 \in M;\\
2. (\ln\alpha_3)_{xz} + (\gamma_3 z - \alpha_1 x)_{xz} \equiv 0,\ \ \alpha_3\beta_1\gamma_2 \in M;\\
3. (\ln\alpha_3)_{xz} + (\gamma_3 z - \alpha_1 x)_{xz} \equiv (\ln\beta_1)_{xy} + (\alpha_1 x - \beta_2 y)_{xy} \equiv\\
\equiv [\ln(\alpha_3\beta_1)]_{yz} + (\gamma_3 z - \beta_2 y)_{yz} \equiv 0,\ \ \alpha_3\beta_1\gamma_2 \in M;\\
4.\ (\ln\beta_1)_{xy} + (\alpha_1 x - \beta_2 y)_{xy} \equiv\\
\equiv [\ln(\alpha_3\beta_1)]_{yz} + (\gamma_3 z - \beta_2 y)_{yz} \equiv 0,\ \ \alpha_3\beta_1\gamma_2 \in M;\\
5.\ \alpha_3\beta_1\gamma_2 \in M;\\
6.\ (\ln\alpha_3)_{xz} + (\gamma_3 z - \alpha_1 x)_{xz} \equiv\\
\equiv [\ln(\alpha_3\beta_1)]_{yz} + (\gamma_3 z - \beta_2 y)_{yz} \equiv 0,\ \ \alpha_3\beta_1\gamma_2 \in M;\\
7.\ b = \mu(x), \qquad c = \nu(y).
\end{array} \tag{28}$$

Таким образом, из проведенных выше рассуждений вытекает

Теорема 1. Пусть при выполнении неравенств (2), (6) и набора тождеств (12):
– или выполняется неравенство (18) и одно из условий 1–6 совокупности (26) совместно с условием 7 из той же совокупности;
– или выполняется неравенство (20) и одно из условий 1–6 совокупности (27) совместно с условием 7 из (27);
– или выполняется неравенство (22) и одно из условий 1–6 совокупности (28) совместно с условием 7 из той же совокупности.
Тогда система (1) разрешима в квадратурах.

Литература

[1] Жегалов В.И. Решение уравнений Вольтерра с частными интегралами с помощью дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44. № 7. С. 874–882.

[2] Appel J.M., Kalitvin A.S., Zabreiko P.P. Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. New York, 2000.

[3] Жегалов В.И., Созонтова Е.А. Условия разрешимости одной системы интегральных уравнений в квадратурах // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51. № 7. С. 958–961.

[4] Чекмарев Т.В. Формулы решения задачи Гурса для одной линейной системы уравнений с частными производными // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. № 9. С. 1614–1622.

[5] Жегалов В.И., Миронов А.Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. Казань, 2001.

References

[1] Zhegalov V.I. Solution of Volterra partial integral equations using differential equations. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential equations], 2008, Vol. 44, no 7, pp. 874–882 [in Russian].

[2] Appel J.M., Kalitvin A.S., Zabreiko P.P. Partial integral operators and integro-differential equations. New York, 2000 [in Russian].

[3] Zhegalov V.I., Sozontova E.A. Conditions for the solvability of a system of integral equations by quadratures. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential equations], 2015, Vol. 51, no 7, pp. 958–961 [in Russian].

[4] Chekmarev T.V. Formula of solution of the Goursat problem for one linear system of partial derivatives. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential equations], 1982, Vol. 18, no 9, pp. 1614–1622 [in Russian].

[5] Zhegalov V.I., Mironov A.N. Differential equations with leading partial derivatives. Kazan, 2001 [in Russian].

E.A. Sozontova[2]

ON CONDITIONS OF SOLVABILITY OF THREE-DIMENSIONAL INTEGRAL SYSTEM IN QUADRATURES

In this paper we consider the system of equations with partial integrals in three-dimensional space. The purpose is to find sufficient conditions of solvability of this system in quadratures. The proposed method is based on the reduction of the original system, first, to the Goursat problem for a system of differential equations of the first order, and after that to the three Goursat problems for differential equations of the third order. As a result, the sufficient conditions of solvability of the considering system in explicit form were obtained. The total number of cases discussing solvability is 16.

Key words: partial integral system, condition of solvability, solution in quadratures, differential equation, Goursat problem.

Статья поступила в редакцию 28/*IX*/2015.
The article received 28/*IX*/2015.

[2] *Sozontova Elena Aleksandrovna* (`sozontova-elena@rambler.ru`), Departament of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, Elabuga Institute of Kazan Federal University, 89, Kazanskaya Street, Elabuga, 423600, Russian Federation.