УДК 519.213, 517.936

И.С. Орлова[1]

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПФАФФА ДЛЯ УСЛОВНЫХ КВАНТИЛЕЙ МНОГОМЕРНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Статья посвящена задаче приведения точечными преобразованиями нелинейных дифференциальных уравнений Пфаффа для условных квантилей многомерных вероятностных распределений к дифференциальным уравнениям Пфаффа с постоянными коэффициентами. Решениями рассмотренных уравнений Пфаффа с постоянными коэффициентами являются линейные функции, представляющие собой условные квантили многомерных гауссовских распределений.

Ключевые слова: уравнения Пфаффа, квантиль, дифференциальные уравнения, распределение Гаусса, точечное преобразование, статистика, математическая модель регрессий, вероятность.

1. Дифференциальные уравнения Пфаффа для условных квантилей

Рассмотрим случайный вектор $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ с распределением вероятностей

$$F_{1\ldots n}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{P}\left\{X_1 \leqslant x_1, \ldots, X_n \leqslant x_1\right\},$$

строго положительной плотностью

$$f_{1\ldots n}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F_{1\ldots n}(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} > 0 \ \text{ для всех } \ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

и условным распределением

$$F_{1|2\ldots n}(x_1|x_2, \ldots, x_n) = \mathbb{P}\{X_1 \leqslant x_1|\, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n\},$$

которое будем считать строго монотонно возрастающим по x_1 при фиксированных $(x_2, \ldots, x_n)$.

Определение. *Условной квантилью порядка* $p \in [0, 1]$ называют решение уравнения

$$F_{1|2\ldots n}(x_1|x_2, \ldots, x_n) = p, \tag{1}$$

Орлова Ирина Сергеевна (iror71@gmail.com), кафедра технической кибернетики, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

т. е. функцию

$$x_1 = q^{(p)}_{1|2\ldots n}(x_2, \ldots, x_n)$$

такую, что

$$F_{1|2\ldots n}(q^{(p)}_{1|2\ldots n}(x_2, \ldots, x_n)|x_2, \ldots, x_n) \equiv p. \tag{2}$$

Выбирая отмеченную точку $\boldsymbol{x}^\circ = (x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ) \in \mathbb{R}^n$, можно рассматривать графики условных квантилей как поверхности (или кривые при $n = 2$) постоянного уровня, проходящие через точку $\boldsymbol{x}^\circ$:

$$F_{1|\,2\ldots n}\left(q^{(\boldsymbol{x}^\circ)}_{1|2\ldots n}(x_2, \ldots, x_n)|\, x_2, \ldots, x_n\right) \equiv F_{1|\,2\ldots n}(x_1^\circ|\, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ). \tag{3}$$

В этом равенстве порядок $p = F_{1|\,2\ldots n}(x_1^\circ|\, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ)$.

Примечание 1. Условные квантили используются в математической статистике в задачах квантильной регрессии [1; 2].

Из равенства (1) получаем дифференциальное уравнение Пфаффа

$$dF_{1|2\ldots n}(x_1|x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_{1|2\ldots n}(x_1|x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_i} dx_i = 0, \tag{4}$$

решением которого является условная квантиль

$$x_1 = q^{(p)}_{1|2\ldots n}(x_2, \ldots, x_n).$$

Большинство дифференциальных уравнений Пфаффа для условных квантилей являются нелинейными уравнениями [1]. Для таких уравнений нет универсальных методов интегрирования, которые позволяют получать решения в явном виде.

Важным примером являются дифференциальные уравнения Пфаффа с постоянными коэффициентами для условных распределений многомерных гауссовских распределений. Решением таких уравнений являются линейные функции, являющиеся условными квантилями исходных гауссовских распределений.

Кратко напомним вывод дифференциальных уравнений Пфаффа для многомерных гауссовских распределений.

Если $(X_1, \ldots, X_n)$ — гауссовский случайный вектор с вектором математических ожиданий $\boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_n)$ и невырожденной ковариационной матрицей $\boldsymbol{\Sigma} = [\sigma_{ij}]$, то условное распределение вероятностей случайной величины X_1 по случайным величинам $X_2, \ldots, X_n$ имеет следующий вид [3, с. 346].

$$\mathbb{P}\{X_1 \leqslant x_1 \mid X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n\} = \Phi\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \sigma^{1i}(x_i - m_i)}{\sqrt{\sigma^{11}}}\right),$$

где

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{u} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

— стандартное (0,1) гауссовское распределение, $[\sigma^{ij}] = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}$, и ввиду положительной определенности матирцы $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ величина $\sigma^{11} > 0$.

Запишем уравнение для условной квантили

$$x_1 = q^{(\boldsymbol{x}^\circ)}_{1|\,2\,\ldots\,n}(x_2, \ldots, x_n),$$

проходящей через точку $\boldsymbol{x}^\circ = (x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ):$

$$\Phi\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma^{1i}\,(x_i-m_i)}{\sqrt{\sigma^{11}}}\right)\equiv\Phi\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma^{1i}\,(x_i^\circ-m_i)}{\sqrt{\sigma^{11}}}\right),\ (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n. \tag{5}$$

Отсюда ввиду строгого монотонного возрастания функции $\Phi(\cdot)$

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma^{1i}\,(x_i-x_i^\circ)=0, \tag{6}$$

или

$$x_1\,=\,q^{(\boldsymbol{x}^\circ)}_{1|\,2\,\ldots\,n}(x_2,\ldots,x_n)\,=\,x_1^\circ-\sum_{k=2}^{n}\frac{\sigma^{1k}}{\sigma^{11}}(x_k-x_k^\circ). \tag{6.a}$$

Вычисляя дифференциал от обеих частей равенства (5), получим уравнение Пфаффа для невырожденного гауссовского распределения:

$$\varphi\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma^{1i}\,(x_i-m_i)}{\sqrt{\sigma^{11}}}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma^{1k}}{\sigma^{11}}\,dx_k\,=\,0. \tag{7}$$

Так как гауссовская плотность $\varphi(\cdot)$ положительна на всей числовой оси, уравнение (7) можно переписать в эквивалентном виде

$$\sum_{k=1}^{n}\sigma^{1k}dx_k=0. \tag{8}$$

Это уравнение Пфаффа с постоянными коэффициентами вполне интегрируемо, и его решение, проходящее через точку $\boldsymbol{x}^\circ=(x_1^\circ,\ldots,x_n^\circ)$, имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n}\sigma^{1k}(x_k-x_k^\circ)\,=\,0, \tag{9}$$

или

$$x_1\,=\,x_1^\circ-\sum_{k=2}^{n}\frac{\sigma^{1k}}{\sigma^{11}}(x_k-x_k^\circ)\,=\,q^{(\boldsymbol{x}^\circ)}_{1|\,2\,\ldots\,n}(x_2,\ldots,x_n).$$

Примечание 2. Коэффициенты линейного уравнения (6) определяются с точностью до постоянного ненулевого множителя $t:\sigma^{1i}\mapsto t\cdot\sigma^{1i}$:

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma^{1i}\,(x_i-x_i^\circ)=0\ \Leftrightarrow\ \sum_{i=1}^{n}t\cdot\sigma^{1i}\,(x_i-x_i^\circ)=0.$$

Однако вероятности этих квантилей как поверхностей постоянного уровня (см. правую часть равенства (5)) зависят от этого множителя

$$\Phi\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}t\cdot\sigma^{1i}\,(x_i^\circ-m_i)}{\sqrt{t\cdot\sigma^{11}}}\right)=\Phi\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma^{1i}\,(x_i^\circ-m_i)}{\sqrt{\sigma^{11}}}\sqrt{t}\right).$$

2. Преобразования нелинейных дифференциальных уравнений Пфаффа для условных квантилей к дифференциальным уравнениям Пфаффа с постоянными коэффициентами

Представляет интерес описание класса дифференциальных уравнений Пфаффа (и соответствующих многомерных вероятностных распределений), которые с помощью точечных преобразований могут быть приведены к линейным дифференциальным уравнениям Пфаффа с постоянными коэффициентами (квантильные уравнения Пфаффа для многомерных гауссовских распределений). Такого вида преобразования являются частным случаем преобразований линеаризации.

Примечание 3. Под *линеаризацией* дифференциального уравнения Пфаффа будем понимать приведение этого уравнения к эквивалентному дифференциальному уравнению Пфаффа, коэффициенты которого являются линейными функциями. Укажем на публикации, посвященные линеаризации общих уравнений Пфаффа [4; 5]. Заметим, что математические методы, применяемые в этих статьях, отличаются от классических методов, которые используются в настоящей работе.

В следующей теореме будет установлен вид дифференциального уравнения Пфаффа, которое может быть приведено точечным невырожденным преобразованием к линейному уравнению Пфаффа с постоянными коэффициентами.

Теорема. Дифференциальное уравнение Пфаффа

$$a_1 dy_1 + \sum_{j=2}^{n} \left(\sum_{k=2}^{n} a_k \frac{\partial v_k(y_2, \ldots, y_n)}{\partial y_j} \right) dy_j = 0, \tag{10}$$

у которого

1° дифференцируемые функции

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & v_1(y_1, \ldots, y_n) \equiv y_1, \\ x_2 & = & v_2(y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n & = & v_n(y_2, \ldots, y_n) \end{array} \right. \tag{11}$$

имеют ненулевой якобиан

$$\det \left[\frac{\partial(x_2, \ldots, x_n)}{\partial(y_2, \ldots, y_n)} \right] \neq 0;$$

2° $a_i = const, \quad i = \overline{1, n}, \quad a_1 > 0,$

можно точечным преобразованием, обратным преобразованию (11), привести к виду дифференциального уравнения Пфаффа с постоянными коэффициентами

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \, dx_k = 0.$$

Решение (максимальной размерности $n-1$) уравнения (10), проходящее через точку $\boldsymbol{y}^\circ = (y_1^\circ, \ldots, y_n^\circ)$, имеет следующий вид:

$$a_1(y_1 - y_1^\circ) + \sum_{i=2}^{n} a_i \left(v_i(y_2, \ldots, y_n) - v_i(y_2^\circ, \ldots, y_n^\circ) \right) = 0. \tag{12}$$

Условное распределение вероятностей, соответствующее уравнению Пфаффа (10), для любого вектора $(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{R}^n$ может быть представлено в виде

$$\Phi\left(\frac{a_1(y_1 - m_1) + \sum\limits_{i=2}^{n} a_i\left(v_i(y_2,\, \ldots,\, y_n) - m_i\right)}{\sqrt{a_1}}\right). \tag{13}$$

Доказательство. Так как якобиан преобразования (11) отличен от нуля, то у этого преобразования существует обратное

$$\begin{cases} y_1 &= & u_1(x_1, \ldots, x_n) \equiv x_1, \\ y_2 &= & u_2(x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= & u_n(x_2, \ldots, x_n). \end{cases} \tag{14}$$

Тогда

$$\begin{cases} v_1(u_1(x_1, \ldots, x_n), u_2(x_2, \ldots, x_n), \ldots, u_n(x_2, \ldots, x_n)) & \equiv & x_1, \\ v_2(u_2(x_2, \ldots, x_n), \ldots, u_n(x_2, \ldots, x_n)) & \equiv & x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ v_n(u_2(x_2, \ldots, x_n), \ldots, u_n(x_2, \ldots, x_n)) & \equiv & x_n \end{cases}$$

и для любых $k, i = \overline{1, n}$

$$\frac{\partial v_k(u_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_n(x_1, \ldots, x_n))}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_k(y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_j} \frac{\partial u_j(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} \equiv \delta_{ki},$$

где δ_{ki} — дельта Кронекера.

Проводя замену переменных (14) в уравнении Пфаффа (10), будем иметь

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial v_k(y_1,\, \ldots,\, y_n)}{\partial y_j}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_j(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} dx_i\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_k(y_1,\, \ldots,\, y_n)}{\partial y_j} \frac{\partial u_j(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i}\right) dx_i =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{i=1}^{n} \delta_{ki}\, dx_i = \sum_{k=1}^{n} a_k\, dx_k = 0.$$

Решение этого уравнения Пфаффа с постоянными коэффициентами, проходящее через точку $\boldsymbol{x}^\circ = (x_1^\circ,\, \ldots,\, x_n^\circ)$, имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i - x_i^\circ) = 0.$$

Отсюда, применяя преобразование (11), получаем формулу (12) решения уравнения Пфаффа (10) максимальной размерности $n-1$, проходящего через точку $\boldsymbol{y}^\circ = (y_1^\circ,\, \ldots,\, y_n^\circ)$.

Осталось заметить, что предположение $a_1 > 0$ позволяет считать вектор $(a_1, \ldots, a_n)$ первой строкой некоторой невырожденной симметрической положительно определенной матрицы. Это установлено в лемме, приведенной ниже.

Для произвольного вектора $(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{R}^n$ введем условное распределение вероятностей

$$F_{1|2\ldots n}(y_1|y_2,\ldots,y_n) =$$
$$= \Phi\left(\frac{a_1(y_1-m_1)+\sum\limits_{i=2}^{n} a_i\left(v_i(y_2,\,\ldots,\,y_n)-m_i\right)}{\sqrt{a_1}}\right). \tag{15}$$

Заметим, что для любых фиксированных значений $(y_2,\,\ldots,\,y_n)$ ввиду того что $a_1>0$

$$\lim_{y_1\to-\infty} F_{1|2\ldots n}(y_1|y_2,\ldots,y_n)=0, \quad \lim_{y_1\to\infty} F_{1|2\ldots n}(y_1|y_2,\ldots,y_n)=1,$$
$$\frac{\partial F_{1|2\ldots n}(y_1|y_2,\ldots,y_n)}{\partial y_1} =$$
$$= \varphi\left(\frac{a_1(y_1-m_1)+\sum\limits_{i=2}^{n} a_i\left(v_i(y_2,\,\ldots,\,y_n)-m_i\right)}{\sqrt{a_1}}\right)\sqrt{a_1}>0.$$

Вычислим дифференциал для условного распределения $F_{1|2\ldots n}(y_1|y_2,\ldots,y_n)$:

$$d\left[\Phi\left(\frac{a_1(y_1-m_1)+\sum\limits_{i=2}^{n} a_i\left(v_i(y_2,\,\ldots,\,y_n)-m_i\right)}{\sqrt{a_1}}\right)\right] =$$
$$= \varphi\left(\frac{a_1(y_1-m_1)+\sum\limits_{i=2}^{n} a_i\left(v_i(y_2,\,\ldots,\,y_n)-m_i\right)}{\sqrt{a_1}}\right)\times$$
$$\times\left(a_1dy_1+\sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{k=2}^{n} a_k\frac{\partial v_k(y_2,\,\ldots,\,y_n)}{\partial y_j}\right)dy_j\right).$$

Поэтому уравнение Пфаффа для условного распределения (15) имеет вид (10). Таким образом, условное распределение вероятностей, которое соответствует уравнению (10), имеет вид (15).□

Лемма. Любой вектор $(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n$, у которого $a_1>0$, является первой строкой некоторой невырожденной симметрической положительно определенной матрицы размера $n\times n$.

Доказательство. Вначале рассмотрим "заготовку" искомой матрицы в виде

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & b_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & b_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \ldots & b_{n-1} & 0 \\ a_n & 0 & 0 & \ldots & 0 & b_n \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Имея в виду критерий Сильвестра, опишем алгоритм выбора чисел $(b_2,\ldots,b_n)$, при которых матрица (16) обладает нужными свойствами.

1. Выбираем положительное число b_2 такое, что

$$\Delta_2 := \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} > 0, \qquad b_2 > \frac{(a_2)^2}{a_1} \geqslant 0.$$

2. Выбираем произвольное положительное число b_3, так как

$$\Delta_3 := \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & 0 & b_3 \end{bmatrix} > 0, \qquad \Delta_3 = b_3\Delta_2 + (a_3)^2 b_2 > 0.$$

3. Выбираем положительное число b_4 такое, что

$$\Delta_4 := \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & b_3 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & b_4 \end{bmatrix} > 0, \quad \Delta_4 = b_4\Delta_3 - (a_4)^2 b_2 b_3, \quad b_4 > \frac{(a_4)^2 b_2 b_3}{\Delta_3} \geqslant 0.$$

4. Выбираем положительное число b_{2k} такое, что

$$\Delta_{2k} := \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{2k} \\ a_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & 0 & b_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2k} & 0 & 0 & \dots & b_{2k} \end{bmatrix} > 0,$$

поскольку

$$\Delta_{2k} = b_{2k}\Delta_{2k-1} - (a_{2k})^2 b_2 \cdot \ldots \cdot b_{2k-1} > 0, \;\; b_{2k} > \frac{(a_{2k})^2 b_2 \cdot \ldots \cdot b_{2k-1}}{\Delta_{2k-1}} \geqslant 0.$$

5. Выбираем произвольное положительное число b_{2k+1}, так как

$$\Delta_{2k+1} := \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{2k} & a_{2k+1} \\ a_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2k} & 0 & 0 & \dots & b_{2k} & 0 \\ a_{2k+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{2k+1} \end{bmatrix} > 0,$$

поскольку

$$\Delta_{2k+1} = b_{2k+1}\Delta_{2k} + (a_{2k+1})^2 b_2 \cdot \ldots \cdot b_{2k} > 0.$$

Реализуя описанный алгоритм, получим набор чисел $(b_2, \dots, b_n)$, для которых матрица (16) является симметрической, невырожденной и положительно определенной.

Вместо условия $a_1 > 0$ можно ввести более ограничительное условие:

$$a_1 > \sum_{i=2}^{n} \mid a_i \mid \geqslant 0.$$

Покажем, что при выполнении этого условия, строка $(a_1, \dots, a_n)$ является первой строкой некоторой невырожденной симметрической положительно определенной матрицы. Действительно, добавляя элементы $b_2, \dots, b_n$ такие, что

$$\begin{array}{cccc} b_2 & > & |a_2| & \geqslant 0; \\ \dots & \dots & \dots & \dots \;. \\ b_n & > & |a_n| & \geqslant 0; \end{array}$$

получим симметрическую матрицу

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & 0 & b_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & 0 & 0 & \dots & b_n \end{bmatrix},$$

диагональные элементы которой обладают строгим диагональным преобладанием [6, с. 418]:

$$\begin{array}{cccc} a_1 & > & \sum\limits_{i=2}^{n}|a_i| & \geqslant 0; \\ b_2 & > & |a_2| & \geqslant 0; \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & > & |a_n| & \geqslant 0. \end{array}.$$

Как известно, симметрическая матрица со строгим диагональным преобладанием и положительными диагональными элементами положительно определена [6, с. 478]. □

3. Пример

Рассмотрим уравнение Пфаффа

$$\begin{gathered} 2dy_1 - \left(\frac{10y_2y_4^3}{\left(1+y_2^2+y_3^2\right)^2} - \frac{6y_2y_3^3}{\left(1+y_2^2+y_4^2\right)^2} - \frac{9y_2^2}{1+y_3^2+y_4^2}\right)dy_2 - \\ - \left(\frac{10y_3y_4^3}{\left(1+y_2^2+y_3^2\right)^2} + \frac{9y_3^2}{1+y_2^2+y_4^2} + \frac{6y_2^3y_3}{\left(1+y_3^2+y_4^2\right)^2}\right)dy_3 - \\ -3\left(-\frac{5y_4^2}{1+y_2^2+y_3^2} - \frac{2y_3^3y_4}{\left(1+y_2^2+y_4^2\right)^2} + \frac{2y_2^3y_4}{\left(1+y_3^2+y_4^2\right)^2}\right)dy_4 = 0. \end{gathered} \tag{17}$$

Введем замену переменных

$$\begin{cases} v_1 = y_1, \\ v_2 = \frac{y_2^3}{1+y_3^2+y_4^2}, \\ v_3 = \frac{y_3^3}{1+y_2^2+y_4^2}, \\ v_4 = \frac{y_4^3}{1+y_2^2+y_3^2}, \end{cases} \tag{18}$$

для которых

$$\begin{cases} dv_1 = dy_1, \\ dv_2 = \frac{3y_2^2}{1+y_3^2+y_4^2}dy_2 - \frac{2y_2^3y_3}{\left(1+y_3^2+y_4^2\right)^2}dy_3 - \frac{2y_2^3y_4}{\left(1+y_3^2+y_4^2\right)^2}dy_4, \\ dv_3 = -\frac{2y_2y_3^3}{\left(1+y_2^2+y_4^2\right)^2}dy_2 + \frac{3y_3^2}{1+y_2^2+y_4^2}dy_3 - \frac{2y_3^3y_4}{\left(1+y_2^2+y_4^2\right)^2}dy_4, \\ dv_4 = -\frac{2y_2y_4^3}{\left(1+y_2^2+y_3^2\right)^2}dy_2 - \frac{2y_3y_4^3}{\left(1+y_2^2+y_3^2\right)^2}dy_3 + \frac{3y_4^2}{1+y_2^2+y_3^2}dy_4. \end{cases} \tag{19}$$

Якобиан преобразования (18) имеет вид

$$\frac{D(v_1,v_2,v_3,v_4)}{D(y_1,y_2,y_3,y_4)}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3y_2^2}{1+y_3^2+y_4^2} & -\frac{2y_2^3y_3}{\left(1+y_3^2+y_4^2\right)^2} & -\frac{2y_2^3y_4}{\left(1+y_3^2+y_4^2\right)^2} \\ 0 & -\frac{2y_2y_3^3}{\left(1+y_2^2+y_4^2\right)^2} & \frac{3y_3^2}{1+y_2^2+y_4^2} & -\frac{2y_3^3y_4}{\left(1+y_2^2+y_4^2\right)^2} \\ 0 & -\frac{2y_2y_4^3}{\left(1+y_2^2+y_3^2\right)^2} & -\frac{2y_3y_4^3}{\left(1+y_2^2+y_3^2\right)^2} & \frac{3y_4^2}{1+y_2^2+y_3^2} \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{y_2^2y_3^2y_4^2((3y_2^4(9+5y_3^2+5y_4^2)+3(1+y_3^2+y_4^2)(9(1+y_4^2)+y_3^2(9+5y_4^2)))}{(1+y_2^2+y_3^2)^2(1+y_2^2+y_4^2)^2(1+y_3^2+y_4^2)^2}+$$

$$+\frac{y_2^2y_3^2y_4^2(3y_2^4(y_2^2(54+15y_3^4+69y_4^2+15y_4^4+y_3^2(69+38y_4^2)))}{(1+y_2^2+y_3^2)^2(1+y_2^2+y_4^2)^2(1+y_3^2+y_4^2)^2}\geqslant 0.$$

В новых переменных, учитывая формулы (19), приведем уравнение (17) к уравнению Пфаффа с постоянными коэффициентами

$$2dy_1+3\left(\frac{3y_2^2}{1+y_3^2+y_4^2}dy_2-\frac{2y_2^3y_3}{(1+y_3^2+y_4^2)^2}dy_3-\frac{2y_2^3y_4}{(1+y_3^2+y_4^2)^2}dy_4\right)-$$

$$-3\left(-\frac{2y_2y_3^3}{(1+y_2^2+y_4^2)^2}dy_2+\frac{3y_3^2}{1+y_2^2+y_4^2}dy_3-\frac{2y_3^3y_4}{(1+y_2^2+y_4^2)^2}dy_4\right)+$$

$$+5\left(-\frac{2y_2y_4^3}{\left(1+y_2^2+y_3^2\right)^2}dy_2-\frac{2y_3y_4^3}{\left(1+y_2^2+y_3^2\right)^2}dy_3+\frac{3y_4^2}{1+y_2^2+y_3^2}dy_4\right)=$$

$$=2dv_1+3dv_2-3dv_3+5dv_4=0. \tag{20}$$

Запишем решение этого уравнения, проходящее через точку

$$(v_1^{(\circ)},v_2^{(\circ)},v_3^{(\circ)},v_4^{(\circ)}):$$

$$v_1=v_1^{(\circ)}-\frac{3}{2}\left(v_2-v_2^{(\circ)}\right)+\frac{3}{2}\left(v_3-v_3^{(\circ)}\right)-\frac{5}{2}\left(v_4-v_4^{(\circ)}\right). \tag{21}$$

Отсюда следует, что решение уравнения Пфаффа (17), проходящее через точку $(y_1^{(\circ)},y_2^{(\circ)},y_3^{(\circ)},y_4^{(\circ)})$, имеет вид

$$y_1=-\frac{3y_2^3}{2(1+y_3^2+y_4^2)}+\frac{3y_3^3}{2(1+y_2^2+y_4^2)}-\frac{5y_4^3}{2(1+y_2^2+y_3^2)}+r^{(\circ)},$$

где

$$r^{(\circ)}=v_1^{(\circ)}+\frac{3}{2}v_2^{(\circ)}-\frac{3}{2}v_3^{(\circ)}+\frac{5}{2}v_4^{(\circ)} \tag{22}$$

и

$$\begin{cases} v_1^{(\circ)}=y_1^{(\circ)}, \\ v_2^{(\circ)}=\frac{\left(y_2^{(\circ)}\right)^3}{1+\left(y_3^{(\circ)}\right)^2+\left(y_4^{(\circ)}\right)^2}, \\ v_3^{(\circ)}=\frac{\left(y_3^{(\circ)}\right)^3}{1+\left(y_2^{(\circ)}\right)^2+\left(y_4^{(\circ)}\right)^2}, \\ v_4^{(\circ)}=\frac{\left(y_4^{(\circ)}\right)^3}{1+\left(y_2^{(\circ)}\right)^2+\left(y_3^{(\circ)}\right)^2}. \end{cases} \tag{23}$$

Используя доказанную выше теорему (выбирая $m_i=1$, $i=\overline{1,4}$), установим явный вид условного распределения вероятностей, которое соответствует уравнению Пфаффа (17)

$$F_{1|234}\left(y_1|y_2,y_3,y_4\right) =$$
$$= \Phi\left(\frac{\left(2\left(y_1-1\right)+3\left(\frac{y_2^3}{1+y_3^2+y_4^2}-1\right)-3\left(\frac{y_3^3}{1+y_2^2+y_4^2}-1\right)+5\left(\frac{y_4^3}{1+y_2^2+y_3^2}-1\right)\right)}{\sqrt{2}}\right)$$

с условной плотностью

$$\frac{e^{-\frac{1}{4}\left(-2(-1+y_1)-5\left(-1+\frac{y_4^3}{1+y_2^2+y_3^2}\right)+3\left(-1+\frac{y_3^3}{1+y_2^2+y_4^2}\right)-3\left(-1+\frac{y_2^3}{1+y_3^2+y_4^2}\right)\right)^2}}{\sqrt{\pi}} \geqslant 0.$$

Таким образом, условная квантиль, задаваемая равенством

$$F_{1|23}\left(y_1|y_2,y_3,y_4\right) = F_{1|23}\left(y_1^{(\circ)}|y_2^{(\circ)},y_3^{(\circ)},y_4^{(\circ)}\right),$$

имеет вид

$$y_1 = q_{1|234}^{(y_1^{(\circ)},y_2^{(\circ)},y_3^{(\circ)},y_4^{(\circ)})}(y_2,y_3,y_4) =$$
$$= -\frac{3y_2^3}{2(1+y_3^2+y_4^2)} + \frac{3y_3^3}{2(1+y_2^2+y_4^2)} - \frac{5y_4^3}{2(1+y_2^2+y_3^2)} + r^{(\circ)},$$

где $r^{(\circ)}$ определяется равенствами (22) и (23).

Литература

[1] Шатских С.Я., Орлова И.С., Мелкумова Л.Э. Квантильные многомерные модели регрессий, основанные на дифференциальных уравнениях Пфаффа // Известия РАЕН. Сер.: МММИУ, 2011. № 3–4. С. 14–109.

[2] Poiraud-Casanova S., Thomas-Agan Ch. Quantiles conditionnels // Journal de la Société Française de Statistiques. 1998. V. 139. № 4. P. 31–41.

[3] Крамер Г. Математические методы статистики. 2-е изд. М.: Мир, 1975. 648 с.

[4] Житомирский М.Я. Критерий линеаризации дифференциальных форм // Изв. вузов. Сер.: Математика. 1983. № 3. С. 40–46.

[5] Житомирский М.Я. Вырождения дифференциальных 1-форм и структур Пфаффа // Успехи математических наук. 1991. Т. 46. Вып. 5(281). С. 47–78.

[6] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.

[7] Горячкин О.В., Шатских С.Я. Метод анализа независимых компонент на основе преобразования независимости // Доклады Академии наук Российской Федерации. 2004. № 4. 398 с.

[8] Дерр В.Я. Неосцилляция решений линейных дифференциальных уравнений // Вестник Удмуртского университета. 2009. Вып. 1. С. 56–99.

[9] Ефимов Н.В. Введение в теорию внешних форм. М.: Наука, 1977.

[10] Закс Ш. Теория статистических выводов. М.: Мир, 1975.

References

[1] Shatskih S.Ya., Orlova I.S., Melkumova L.E. Quantile regression multivariate models based on differential Pfaff equations. *Izvestiia RAEN. Ser.: MMMIU*, 2011, no. 3-4, pp. 14–109 [in Russian].

[2] Poiraud-Casanova S., Thomas-Agan Ch. Quantiles conditionnels. *Journal de la Société Française de Statistiques*, 1998, Vol. 139, no. 4, pp. 31–41 [in French].

[3] Kramer G. Mathematical methods of statistics. 2-nd edition. M., Mir, 1975, p. 648 [in Russian].

[4] Zhitomirskij M.Ya. Criterion linearization of differential forms. *Izv. vuzov. Ser.: Matematika* [News of higher educational institutions], 1983, no. 3, pp. 40–46 [in Russian].

[5] Zhitomirskij M.Ya. Degeneration of differential 1-forms and Pfaffian structures. *Uspekhi matematicheskih nauk* [Russian Mathematical Surveys], 1991, Vol. 46, no. 5(281), pp. 47–78 [in Russian].

[6] Horn R., Johnson C. Matrix analysis. M., Mir, 1989, p. 655 [in Russian].

[7] Goryachkin O.V., Shatskih S.Ya. The method of analysis of independent components based on the conversion of Independence. *Doklady Akademii nauk Rossiiskoi Federatsii* [Proceedings of the Russian Academy of Sciences], 2004, no. 4, p. 398 [in Russian].

[8] Derr V.Ya. Non-oscillation of solutions of linear differential equations. *Vestnik Udmurtskogo universiteta* [Bulletin of Udmurt University], 2009, no. 1, pp. 56–99 [in Russian].

[9] Efimov N.V. Introduction to the theory of external forms. M., Nauka, 1977 [in Russian].

[10] Zaks Sh. Theory of statistical inferences. M., Mir, 1975 [in Russian].

I.S. Orlova[2]

LINEARIZATION OF PFAFF DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR THE CONDITIONAL QUANTILE OF MULTIVARIATE PROBABILITY DISTRIBUTIONS

The article is devoted to the task of bringing the point transformations of nonlinear partial differential equations of Pfaff for conditional quantile multivariate probability distributions to the Pfaff differential equations with constant coefficients. Solutions of the equations of Pfaff with constant coefficients are linear functions representing the conditional quantile of multivariate Gaussian distributions.

Key words: Pfaff's equations, quantile, differential equations, Gaussian distribution, point transformation, statistics, mathematical model regressions, probability.

Статья поступила в редакцию $22/IX/2015$.
The article received $22/IX/2015$.

[2] *Orlova Irina Sergeevna* (iror71@gmail.com), Department of Technical Cybernetics, Samara State Aerospace University, 34, Moskovskoye Shosse, Samara, 443086, Russian Federation.