УДК 517.9

Н.А. Манакова, А.А. Селиванова[1]

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ШОУОЛТЕРА – СИДОРОВА ДЛЯ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ

В статье рассматривается численное исследование модели нелинейной диффузии в круге. Уравнение нелинейной диффузии моделирует процесс изменения потенциала концентрации вязкоупругой жидкости, фильтрующейся в пористой среде. Данное уравнение относится к полулинейным уравнениям соболевского типа, которые составляют обширную область неклассических уравнений математической физики. Показаны существование и единственность слабого обобщенного решения задачи Шоуолтера – Сидорова для уравнения нелинейной диффузии. Разработан алгоритм численного решения задачи в круге на основе модифицированного метода Галеркина, и приведен результат вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: уравнение нелинейной диффузии, численное моделирование, метод Галеркина, уравнения соболевского типа, задача Шоуолтера – Сидорова, слабое обобщенное решение, монотонные операторы, метод монотонности.

Введение

В цилиндре $\Omega\times\mathbb{R}_+$, где $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, рассмотрим уравнение нелинейной диффузии

$$(\lambda-\Delta)x_t-\operatorname{div}(|\bigtriangledown x|^{p-2}\bigtriangledown x)=f,\ \ \lambda\in\mathbb{R},\ p\geqslant 2, \tag{1}$$

с краевым

$$x(s,t)=0,\ \ (s,t)\in\partial\Omega\times\mathbb{R}_+ \tag{2}$$

и начальным

$$(\lambda-\triangle)(x(s,0)-x_0(s))=0,\ \ s\in\Omega, \tag{3}$$

условиями. Уравнение (1) моделирует процесс изменения потенциала концентрации ($x=x(s,t)$) вязкоупругой жидкости, фильтрующейся в пористой среде [1; 2]. Параметр $\lambda\in\mathbb{R}$ характеризует вязкость жидкости, причем экспериментально было подтверждено, что отрицательное значение параметра λ не противоречит физическому смыслу модели [3]. Свободный член $f=f(s,t)$ отвечает внешней на-

[1]© Манакова Н.А., Селиванова А.А., 2015

Манакова Наталья Александровна (manakovana@susu.ac.ru), *Селиванова Анастасия Андреевна* (a.a.selivanova@inbox.ru), кафедра уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет, Российская Федерация, 454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 76.

грузке. В подходящих функциональных пространствах $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ задача (1) – (3) редуцируется к задаче Шоуолтера – Сидорова

$$L(x(0) - x_0) = 0 \tag{4}$$

для полулинейного уравнения соболевского типа

$$L\,\dot{x} + M(x) = f. \tag{5}$$

Однозначная разрешимость задачи Коши для модели (1), (2) впервые была установлена Г.А. Свиридюком [4]. Н.А. Манаковой было проведено аналитическое исследование модели нелинейной диффузии и показано существование единственного аналитического решения задачи (1) – (3) в слабом обобщенном смысле [5]. Впервые метод Галеркина для полулинейных уравнений соболеского типа был рассмотрен в работе Г.А. Свиридюка, Т.Г. Сукачевой [6]. В статье проведено численное исследование модели нелинейной диффузии, и впервые построен алгоритм нахождения приближенных решений представленной модели в круге на основе модифицированного метода Галеркина.

1. Математическая модель нелинейной диффузии

Пусть $\mathcal{H} = (\mathcal{H}; \langle\cdot,\cdot\rangle)$ – вещественное сепарабельное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным; $(\mathfrak{H}, \mathfrak{H}^*)$ и $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}^*)$ – дуальные (относительно двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$) пары рефлексивных банаховых пространств, причем вложения

$$\mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{H} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathfrak{H}^* \hookrightarrow \mathfrak{B}^* \tag{6}$$

плотны и непрерывны.

Положим $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$, $\mathfrak{H} = \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\mathfrak{B} = W_p(\Omega)$, $\mathfrak{H}^* = W_2^{-1}(\Omega)$, $\mathfrak{B}^* = W_q^{-1}(\Omega)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, тогда выполнены вложения (6). Операторы L и M определим следующим образом:

$$\langle Lx, y\rangle = \int\limits_{\Omega} (\lambda xy - \nabla x \cdot \nabla y)ds\ \forall x, y \in \mathfrak{H},$$

$$\langle Mx, y\rangle = \int\limits_{\Omega} |\nabla x|^{p-2} \nabla x \cdot \nabla y ds\ \forall x, y \in \mathfrak{B}.$$

Введем множество coim $L = \{y \in \mathfrak{H} : \langle y, \varphi\rangle = 0,\ \forall \varphi \in \ker L \setminus \{0\}\}$, $\mathrm{span}\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_l\} = \ker\, L$, $\dim\, \ker\, L = l$. Обозначим через $\{\varphi_k\}$ систему собственных функций, а через $\{\lambda_k\}$ последовательность собственных значений однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа ($-\,\Delta$) в области Ω, занумерованную по неубыванию с учетом кратности. Система $\{\varphi_k\}$ образует базис в $\mathcal{H}$ и в силу вложений (6) тотальна в пространствах $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{B}$.

Построим галеркинские приближения решения задачи (1)–(3) в виде

$$\widetilde{x}(s,t) = \sum_{k=1}^{N} x_k(t)\varphi_k(s), \quad N > l, \tag{7}$$

где коэффициенты $x_k = x_k(t), k = 1, ..., N$ определяются следующей задачей:

$$\langle(\lambda - \Delta)\widetilde{x}_t, \varphi_k\rangle + \langle(\mathrm{div}(|\bigtriangledown \widetilde{x}|^{p-2} \bigtriangledown \widetilde{x}), \varphi_k)\rangle = \langle f, \varphi_k\rangle, \tag{8}$$

$$\langle(\lambda-\Delta)(\widetilde{x}(0)-x_0),\varphi_k\rangle=0, k=1,...,N, \tag{9}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Уравнение (8) представляет собой вырожденную систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теорема 1 [5]. Пусть $\lambda \geqslant -\lambda_1$, тогда при $\forall x_0 \in \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$, $T \in \mathbb{R}_+$, $f \in L_q(0,T;W_q^{-1}(\Omega))$ существует единственное решение $x \in L_\infty(0,T;\text{coim } L)\cap$ $\cap L_p(0,T;W_p(\Omega))$ задачи (1)–(3).

Теорема 1 гарантирует сходимость приближенного решения (7) к аналитическому точному решению $x\in L_\infty(0,T;\text{coim } L)\cap L_p(0,T;W_p(\Omega))$.

2. Численный алгоритм исследования задачи Шоуолтера – Сидорова для модели нелинейной диффузии

На основе теоретических результатов и модифицированного метода Галеркина был разработан алгоритм численного решения задачи (1)–(3) в круге. Приведем алгоритм численного решения задачи (1)–(3), описывающий работу программы.

1 шаг. Осуществляем ввод параметров уравнения нелинейной диффузии, начальных и краевых условий, радиуса круга, количества галеркинских приближений.

2 шаг. Находим собственные значения и собственные функции оператора $(-\triangle)$ в круге.

3 шаг. Генерируем систему алгебро-дифференциальных уравнений и начальных условий.

4 шаг. Численно решаем систему алгебро-дифференциальных уравнений с начальными условиями методом Рунге – Кутты 4-го порядка.

5 шаг. Выводим график приближенного численного решения уравнения нелинейной диффузии.

Приведем пример, иллюстрирующий работу программы.

Пример 1. Рассмотрим задачу (1)–(3) в круге радиуса $R=1$ с центром в т.(0;0), где $x=x(r,\varphi,t)$, $\lambda=1$, $p=2$ и $f(r,\varphi,t)=0$, $x(r,\varphi,0)=1-r^2$, $0\leqslant\varphi<2\pi$. Начальные и граничные условия симметричны (не зависят от φ).

Получим задачу Шоуолтера – Сидорова для модели нелинейной диффузии в круге:

$$\begin{cases} \lambda x'_t-(\frac{1}{r}(r(x(r,t))'_r)'_r)'_t-\frac{1}{r}(r(x(r,t))'_r)'_r=0,\\ x(1,t)=0,\ \ \forall\varphi\in[0,2\pi),\\ x(r,0)=1-r^2. \end{cases}$$

Обозначим через Φ_k ортонормированную систему собственных функций задачи Дирихле для оператора $(-\triangle)$ в круге. Решение $x(r,t)$ задачи будем искать в виде галеркинской суммы

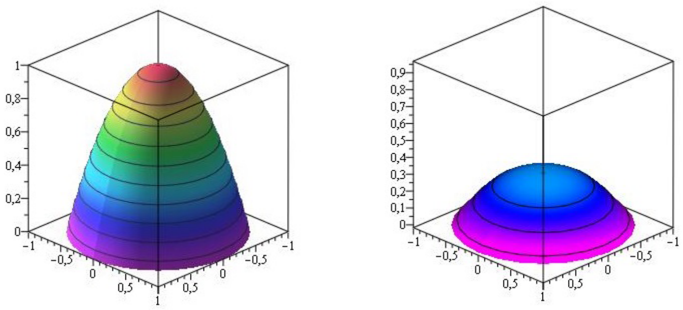
$$x(r,t)=\sum_{k=1}^{N}x_k(t)\Phi_k(r).$$

Найдем приближенное решение задачи Шоуолтера – Сидорова с двумя галеркинскими приближениями:

$$x(r,t)=\frac{\sqrt{2}}{J_1(\mu_1^0)}J_0(r\mu_1^0)x_1(t)+\frac{\sqrt{2}}{J_1(\mu_2^0)}J_0(r\mu_2^0)x_2(t),$$

где J_k — функция Бесселя первого порядка k, а $\mu_i^{(j)}$— нули функции Бесселя j-го порядка.

Если $\lambda = -\frac{1}{r^2}\mu_1^0$, то математическая модель окажется вырожденной.



а *б*

Рис. 1. График численного решения (1)–(3):
a — при $t = 0$; *b* — при $t = 5$

Используя алгоритм, основанный на модифицированном методе Галеркина и приведенный выше, получим график численного решения модели нелинейной диффузии (см. рисунок).

Литература

[1] Дзекцер Е.С. Обобщение уравнения движения грунтовых вод // ДАН СССР. 1972. № 5. С. 1031–1033.

[2] Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1987. 664 с.

[3] Амфилохиев В.Б., Войткунский Я.И., Мазаева Н.П. Течения полимерных растворов при наличии конвективных ускорений // Тр. Лен. кораблестр. ин-та. 1975. Т. 96. С. 3–9.

[4] Свиридюк Г.А. Одна задача для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска // Изв. вузов. Сер.: Математика. 1990. № 2. С. 55–61.

[5] Манакова Н.А. Задачи оптимального управления для полулинейных уравнений соболевского типа. Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ. 2012. 88 с.

[6] Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г. О галеркинских приближениях сингулярных нелинейных уравнений типа Соболева // Изв. вузов. Сер.: Математика. 1989. № 10. С. 44–47.

References

[1] Dzektser E.S. Generalization of the equation of movement of ground waters. *DAN SSSR* [Proceedings of the USSR Academy of Sciences], 1972, № 5, pp. 1031–1033 [in Russian].

[2] Polubarinova-Kochina P.Ya. Theory of movement of ground waters. M., Nauka, 1987, 664 p. [in Russian]

[3] Amfilokhiev V.B., Voitkunskii Ya.I., Mazaeva N.P. Flows of polymer solutions in the presence of convective accelerations. *Tr. Len. korablestr. in-ta* [Proceedings of Leningrad Shipbuilding Institute], 1975, Vol. 96, pp. 3–9 [in Russian].

[4] Sviridyuk G.A. A problem of generalized Boussinesq filtration equation. *Izvestia Vuzov. Matematika* [Russian Mathematics (Iz. VUZ)], 1990, № 2, pp. 55–61 [in Russian].

[5] Manakova N.A. Optimal control problem for semilinear Sobolev type equations. Chelyabinsk, Izdat. tsentr IuUrGU, 2012, 88 p. [in Russian].

[6] Sviridyuk G.A., Sukacheva T.G. On Galerkin approximations of singular nonlinear equations of Sobolev type. *Izvestia Vuzov. Matematika* [Russian Mathematics (Iz. VUZ)], 1989, № 10, pp. 56–59 [in Russian].

N.A. Manakova, A.A. Selivanova[2]

NUMERICAL INVESTIGATION OF THE SHOWALTER – SIDOROV PROBLEM FOR NONLINEAR DIFFUSION EQUATION

The article concerns a numerical investigation of nonlinear diffusion model in the circle. Nonlinear diffusion equation simulates the change of potential concentration of viscoelastic fluid, which is filtered in a porous media. This equation is a semilinear Sobolev type equation. Sobolev type equations constitute a vast area of non-classical equations of mathematical physics. Theorem of existence and uniqueness of a weak generalized solution to the Showalter – Sidorov problem for nonlinear diffusion equation is stated. The algorithm of numerical solution to the problem in a circle was developed using the modified Galerkin method. There is a result of computational experiment in this article.

Key words: nonlinear diffusion equation, numerical modelling, Galerkin's method, Sobolev type equations, Showalter – Sidorov problem, weak generalized solution, monotone operators, monotone method.

Статья поступила в редакцию $20/IX/2015$.
The article received $20/IX/2015$.

[2]*Manakova Natalia Aleksandrovna* (manakovana@susu.ac.ru), *Selivanova Anastasia Andreevna* (a.a.selivanova@inbox.ru), Department of Equations of Mathematical Physics, South Ural State University, 76, Lenin Prospect, Chelyabinsk, 454080, Russian Federation.