УДК 512.815.4

К.А. Вяткина[1]

U-ПРОЕКТОР ПРИСОЕДИНЕННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ $\mathbf{GL}(n, K)$[2]

Работа посвящена изучению колец и полей инвариантов для присоединенного представления группы $\mathrm{GL}(n, K)$ над полем нулевой характеристики. Цель работы – построить линейный оператор, который мы называем U-проектором, отображающий произвольный многочлен на алгебре матриц в U-инвариантную рациональную функцию. В работе предлагаются две различные конструкции U-проектора. Используя U-проектор, мы построили систему образующих элементов поля U-инвариантов присоединенного представления группы $\mathrm{GL}(n, K)$. Найдена система образующих элементов в поле U-инвариантов для ограничения присоединенного представления на блочно-диагональную подгруппу.

Ключевые слова: поле инвариантов, присоединенное представление, унитреугольная группа, разрешимая группа, алгебра инвариантов, представления групп, локально нильпотентное дифференцирование, система образующих элементов.

1. Предварительные сведения

Основной задачей теории инвариантов алгебраических групп является описание структуры кольца и поля инвариантов.

Пусть K — поле характеристики нуль, V — векторное пространство над полем K, а $G = \mathrm{GL}(n, K)$. Для разрешимых групп имеет место следующая теорема из [1].

Теорема 1.1 (Miyata, 1971). Для любой приводимой к верхнетреугольному виду подгруппы в группе $\mathrm{GL}(V)$ ее поле инвариантов рационально, то есть существуют алгебраически независимые инварианты $Q_1, \ldots, Q_n \in K(V)$ такие, что поле инвариантов есть поле рациональных функций $K(Q_1, \ldots, Q_n)$.

Затем в 1982 году Э.Б. Винберг доказал более общую теорему [2; 3]. Чтобы ее сформулировать, дадим следующее определение.

Определение. Рациональное действие α группы H векторного пространства K^n называется треугольным, если в подходящей системе координат все пре-

Вяткина Ксения Анатольевна (vjatkina.k@gmail.com), кафедра алгебры и геометрии, Самарский государственный университет, 443011, Российская Федерация, 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.
[2]Работа поддержана грантами РФФИ 14-01-97017 и 14-01-31052.

образования $\alpha(h), h \in H$ имеют вид

$$x_i \mapsto a_i x_i + f_i(x_{i+1}, \dots, x_n),$$

где $a_i \in K^*, f_i \in K(x_{i+1}, \dots, x_n)$.

Теорема 1.2 (Винберг, 1982). Если группа рационально-треугольно действует на K^n, то ее поле инвариантов рационально.

Рассмотрим U — унитреугольную подгруппу в $\mathrm{GL}(n, K)$, состоящую из верхнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали. Ее алгебра Ли $\mathfrak{u}$ состоит из всех верхнетреугольных матриц с нулями на диагонали. Рассмотрим присоединенное представление

$$Ad_g X = g X g^{-1}$$

группы U в пространстве $V = \mathrm{Mat}(n, K)$.

Пусть $A = K[x_{i,j}]$ — кольцо регулярных функций на $\mathrm{Mat}(n, K)$. Представление Ad_g в пространстве V позволяет определить представление T_g в пространстве A по формуле

$$(T_g f)(X) = f(Ad_g^{-1} X). \tag{1.1}$$

Через A^U обозначим кольцо U-инвариантов в алгебре A.

В работе [4] найден один из наборов образующих поля U-инвариантов, и показано, что данное поле является полем рациональных функций от этого набора образующих. Этот результат был использован в работе [5] для решения задачи по нахождению образующих поля B-инвариантов присоединенного действия борелевской группы.

Целью данной статьи является построение специального оператора, U-проектора, который позволяет по произвольному многочлену, определенному на алгебре матриц, построить U-инвариантную рациональную функцию. В статье существенно используется сечение векторного пространства V, найденное в работе Д.И. Панюшева [6]. Построены два различных U-проектора (теоремы 2.13 и 4.8). В качестве приложений предлагается новый, отличный от [4], способ построения образующих поля U-инвариантов присоединенного представления группы $\mathrm{GL}(n, K)$ (теоремы 2.14, 2.15 и 3.1, 3.2 для первого U-проектора и теоремы 4.9, 4.10 для второго). Найдена система образующих элементов в поле U-инвариантов для ограничения присоединенного представления на блочно-диагональную подгруппу.

2. Конструкция первого U-проектора

Предъявим алгоритм построения U-проектора. Обозначим за $\partial = d_e T$ соответствующее присоединенному действию группы Ли (1.1) представление алгебры Ли $\mathfrak{u}$ группы U. Рассмотрим базис из матричных единиц $\{E_{i,j}\}_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$ в $\mathfrak{u}$. Обозначим $\partial_{i,j} = \partial_{E_{i,j}}$. Для каждой пары (i, j), где $1 \leqslant i < j \leqslant n$, дифференцирование $\partial_{i,j}$ алгебры A задается формулой

$$\partial_{i,j} f = \left. \frac{dT_{\exp(t \cdot E_{i,j})} f}{d(t)} \right|_{t=0}.$$

Элемент $f \in A^U$ тогда и только тогда, когда $\partial_{i,j} f = 0$.

Лемма 2.1. Для любых $1 \leqslant i < j \leqslant n$ и $1 \leqslant k,s \leqslant n$ значение $\partial_{i,j}(x_{k,s})$ вычисляется по формуле

$$\partial_{i,j}(x_{k,s}) = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq i \text{ и } s \neq j, \\ -x_{j,s}, & \text{если } k = i \text{ и } s \neq j, \\ x_{k,i}, & \text{если } k \neq i \text{ и } s = j, \\ x_{i,i} - x_{j,j}, & \text{если } k = i \text{ и } s = j. \end{cases} \tag{2.1}$$

Доказательство. Получается непосредственным вычислением $T_{\exp t\cdot E_{i,j}}(x_{k,s})$.

Следствие 2.2. Оператор $\partial_{i,j}$ — локально-нильпотентное дифференцирование алгебры A.

Доказательство. Получается непосредственным вычислением $\partial^3_{i,j}(x_{k,l}) = 0$ для любого $1 \leqslant k,s \leqslant n$.

Пусть $L = \{l_1 < l_2 < \ldots < l_k\}$ набор строк. Обозначим через M_L минор k-го порядка с системами столбцов $\{1,\ldots,k\}$ и строк $\{l_1,l_2,\ldots,l_k\}$. Заметим, что если $i \in L$, то минор $M_{L\setminus\{i\}}$ получается из M_L вычеркиванием i-й строки и последнего столбца.

Лемма 2.3. Пусть $L = [l,n]$, $m \in L$ и $i < j$. Тогда

- Если $i,j \in L\setminus\{m\}$ или $i \notin L\setminus\{m\}$, то $\partial_{i,j}(M_{L\setminus\{m\}}) = 0$.
- Если $i \in L\setminus\{m\}$ и $j \notin L\setminus\{m\}$, то $j = m$ и
$$\partial_{i,j}(M_{L\setminus\{j\}}) = (-1)^{j-i}M_{L\setminus\{i\}}.$$
В частности, для $l = i$ и $j = i+1$ имеем
$$\partial_{i,j}(M_{[i,n]\setminus\{j\}}) = -M_{[j,n]}.$$

Доказательство. Заметим, что оператор T_g разлагается в произведение $T_g = L_gR_g$ операторов левого и правого сдвигов

$$R_gf(X) = f(Xg), \quad L_gf(X) = f(g^{-1}X).$$

Миноры вида $M_{L\setminus\{m\}}$ инвариантны относительно всех R_g, $g \in U$. Поэтому $T_g(M_{L\setminus\{m\}}) = L_g(M_{L\setminus\{m\}})$ для любого $g \in U$. Пусть $i,j \in L\setminus\{m\}$ и $g = \exp tE_{i,j}$. В этом случае

$$T_g(M_{L\setminus\{m\}}) = M_{L\setminus\{m\}},$$

поскольку операция прибавления в i-й строке элементов j-й строки, умноженных на любое число, не меняет определителя. После дифференцирования по t получаем $\partial_{i,j}(M_{L\setminus\{m\}}) = 0$. Аналогично для случая $i \notin L\setminus\{m\}$.

Пусть $i \in L\setminus\{m\}$ и $j \notin L\setminus\{m\}$. Так как $i < j$, то $j = m$. Тогда

$$T_g(M_{L\setminus\{j\}}) = M_{L\setminus\{j\}} - tM'_{L\setminus\{j\}},$$

где определитель $M'_{L\setminus\{j\}}$ получается из $M_{L\setminus\{j\}}$, если вместо i-й строки записать j-ю строку. Легко видеть, что

$$M'_{L\setminus\{j\}} = (-1)^{j-i}M_{L\setminus\{i\}}.$$

После дифференцирования по t получаем утверждение леммы. В случае $l = i$ и $j = i+1$ имеем:

$$\partial_{i,j}(M_{[i,n]\setminus\{j\}}) = (-1)^{i+1-i}M_{[i+1,n]} = -M_{[j,n]}.$$

Рассмотрим набор D, составленный из убывающей цепочки угловых миноров $\Delta_k = M_{[k,n]}$, $\quad 2 \leqslant k \leqslant n$.

Следствие 2.4. Имеем $\partial_{i,j}(\Delta_k) = 0$ для всех $2 \leqslant k \leqslant n$ и $1 \leqslant i < j \leqslant n$, то есть $\Delta_k \in A^U$.

Доказательство. Так как $i < j$, то из условия $i \in [k, n]$ вытекает $j \in [k, n]$. Поэтому возможны только два случая: либо $i \notin [k, n]$, либо $i, j \in [k, n]$. Рассуждая как в предыдущей лемме, получаем $\partial_{i,j}(\Delta_k) = 0$.

Обозначим через A_D локализацию кольца A по множеству знаменателей, порожденных D. Любой элемент из A_D однозначно представим в виде

$$\frac{a}{d}, \quad \text{где} \quad d = \Delta_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot \Delta_n^{k_n}, \; k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}.$$

Следствие 2.5. Для любых $1 \leqslant i < j \leqslant n$ оператор $\partial_{i,j}$ есть локально-нильпотентное дифференцирование на A_D.

Доказательство. Заметим, что $\partial_{i,j}(d) = 0$ для любого знаменателя в A_D. Для любого $a \in A$ существует номер N такой, что $\partial_{i,j}^N(a) = 0$. Тогда

$$\partial_{i,j}^N\left(\frac{a}{d}\right) = \frac{\partial_{i,j}^N(a)}{d} = 0.$$

Для любых $1 \leqslant k < l \leqslant n$ рассмотрим рациональную функцию

$$Q_{k,l} = (-1)^{l-k}\frac{M_{[k,n]\setminus\{l\}}}{M_{[k+1,n]}} = (-1)^{l-k}\frac{M_{[k,n]\setminus\{l\}}}{\Delta_{k+1}}.$$

Пример 2.6. При $n = 3$ рациональные функции $Q_{k,l}$ имеют вид:

$$Q_{12} = -\frac{M_{13}}{M_{23}}, \; Q_{13} = \frac{M_{12}}{M_{23}}, \; Q_{23} = -\frac{M_2}{M_3}.$$

Лемма 2.7. Если $i \leqslant k$, то

$$\partial_{ij}(Q_{k,l}) = \begin{cases} 1, & \text{если i=k, j=l,} \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. 1. Пусть $i < k$. Из леммы 2.3 получаем

$$\partial_{ij}(Q_{k,l}) = (-1)^{l-k}\frac{\partial_{ij}(M_{[k,n]\setminus\{l\}})}{M_{[k+1,n]}} = 0.$$

2. Пусть $i = k$ и $j = l$. Тогда, используя лемму 2, имеем

$$\partial_{ij}(Q_{i,j}) = (-1)^{j-i}\frac{\partial_{ij}(M_{[i,n]\setminus\{j\}})}{M_{[i+1,n]}} = \frac{M_{[i+1,n]}}{M_{[i+1,n]}} = 1.$$

3. Пусть $i = k$ и $j \neq l$. Тогда минор $M_{[i,n]\setminus\{l\}}$ содержит i-ю и j-ю строки и, следовательно,

$$\partial_{ij}(Q_{i,l}) = (-1)^{l-k}\frac{\partial_{ij}(M_{[i,n]\setminus\{l\}})}{M_{[i+1,n]}} = 0.$$

Лемма 2.8. Для любых двух произвольных дифференцирований ∂_{ij}, ∂_{kl}

$$[\partial_{ij}, \partial_{kl}] = \begin{cases} 0, & \text{если } j \neq k \text{ и } l \neq i \text{ или } i = k, l = j, \\ \partial_{il}, & \text{если } j = k \text{ и } i \neq l, \\ -\partial_{kj}, & \text{если } i = l \text{ и } j \neq k. \end{cases} \tag{2.2}$$

Доказательство. Проверяется непосредственными вычислениями.

Определение. Для любых $1 \leqslant i < j \leqslant n$ определим оператор $S_{i,j}\colon A_D \to A_D$ формулой:

$$S_{i,j} = id - Q_{i,j}\partial_{i,j} + \frac{Q_{i,j}^2}{2!}\partial_{i,j}^2 - \frac{Q_{i,j}^3}{3!}\partial_{i,j}^3 + \ldots.$$

Так как $\partial_{i,j}$ — локально-нильпотентное дифференцирование, то $S_{i,j}(a)$ — конечный ряд для любого $a \in A_D$.

Лемма 2.9. Пусть δ — локально-нильпотентное дифференцирование алгебры B. Пусть существует $Q \in B$ такой, что $\delta(Q) = 1$. Обозначим

$$S(a) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{Q^k}{k!} \delta^k(a).$$

Тогда $\delta(S(a)) = 0$ для любого $a \in B$.

Доказательство. Для любого $k > 0$ имеем

$$\delta\left(\frac{Q^k}{k!}\delta^k(a)\right) = \frac{Q^{k-1}\delta(Q)}{(k-1)!}\delta^k(a) + \frac{Q^k}{k!}\delta^{k+1}(a) = \frac{Q^{k-1}}{(k-1)!}\delta^k(a) + \frac{Q^k}{k!}\delta^{k+1}(a).$$

Тогда

$$\delta(S(a)) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \delta\left(\frac{Q^k}{k!}\delta^k(a)\right) = \delta(a) - \delta(a) - Q\delta^2(a) + Q\delta^2(a) + \frac{Q^2}{2!}\delta^3(a) - \frac{Q^2}{2!}\delta^3(a) - \ldots = 0.$$

Поэтому $\delta(S(a)) = 0$ для любого $a \in B$.

Следствие 2.10. Для любых $1 \leqslant i < j \leqslant n$ выполняется

$$\partial_{i,j}(S_{i,j}(a)) = 0.$$

Лемма 2.11. Пусть $i < j$, $k < l$ и $a \in A_D$. Тогда если $i \leqslant k$, то

$$\partial_{i,j}(S_{k,l}(a)) = \begin{cases} 0, & \text{если } i = k,\ j = l, \\ S_{k,l}\partial_{i,j}(a), & \text{если } i = k,\ j \neq l, \\ S_{k,l}\partial_{i,j}(a), & \text{если } i < k,\ j \neq k, \\ S_{k,l}\partial_{i,j}(a) - Q_{k,l}S_{k,l}(\partial_{i,l}(a)), & \text{если } i < k, j = k. \end{cases}$$

Доказательство. Случай с $k = i$, $j = l$ разобран в лемме 2.9. Для доказательства остальных случаев обозначим:

$$S = S_{k,l},\ \ \partial = \partial_{k,l},\ \ \delta = \partial_{i,j}.$$

Из леммы 2.7 вытекает $\delta(Q) = 0$. Поэтому

$$\delta(S(a)) = \delta\left(\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{Q^s}{s!}\partial^s(a)\right) = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{Q^s}{s!}\partial^s(\delta(a)) + \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{Q^s}{s!}[\delta,\partial^s](a). \quad (2.3)$$

Из леммы 2.8 вытекает, что $[[\delta,\partial],\partial] = 0$. Отсюда для любого $s > 0$ выполняется

$$[\delta,\partial^s] = s\partial^{s-1}[\delta,\partial].$$

После подстановки в (2.3) имеем

$$\delta(S(a)) = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{Q^s}{s!}\partial^s(\delta(a)) + \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{Q^s}{(s-1)!}\partial^{s-1}([\delta,\partial](a)).$$

То есть $\delta(S(a)) = S(\delta(a)) - QS([\delta,\partial](a))$. Применяя лемму 2.8, получаем

$$\partial_{i,j}(S_{k,l})(a) = \begin{cases} 0, & \text{если } i = k,\ j = l, \\ S_{k,l}\partial_{i,j}(a), & \text{если } i = k,\ j \neq l \text{ или } i < k,\ j \neq k, \\ S_{k,l}\partial_{i,j}(a) - Q_{k,l}S_{k,l}(\partial_{i,l}(a)), & \text{если } i < k, j = k. \end{cases}$$

Для любого $1 \leqslant k \leqslant n-1$ обозначим

$$P_k = S_{k,n} S_{k,n-1} \ldots S_{k,k+1}. \tag{2.4}$$

Рассмотрим оператор

$$P = P_{n-1} P_{n-2} \ldots P_2 P_1.$$

Лемма 2.12. Для любых $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $a \in A_D$ выполняется

$$\partial_{i,j}(P_i(a)) = 0.$$

Доказательство. Заметим, что из предыдущей леммы $\partial_{i,j} S_{i,l} = S_{i,l} \partial_{i,j}$ для любого $j+1 \leqslant l \leqslant n$. Тогда

$$\partial_{i,j}(P_i(a)) = \partial_{i,j}(S_{i,n} \ldots S_{i,j+1} S_{i,j} S_{i,j-1} \ldots S_{i,i+1}(a)) =$$

$$= S_{i,n} \ldots S_{i,j+1} \partial_{i,j}(S_{i,j} S_{i,j-1} \ldots S_{i,i+1}(a)).$$

Так как $\partial_{i,j}(S_{i,j}(b)) = 0$ для любого $b \in A_D$ (лемма 2.10), то $\partial_{i,j}(P_i(a)) = 0$.

Теорема 2.13. Оператор $P \colon A_D \to A_D$ является проектором на A_D^U.

Доказательство. Элемент $a \in A_D$ является U-инвариантом тогда и только тогда, когда $\partial_{i,j}(a) = 0$ для любых $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Отсюда легко видеть, что $P(a) = a$ для любого U-инварианта $a \in A_D$. Осталось показать, что для любого $a \in A_D$ образ $P(a)$ является U-инвариантом. Представим оператор P в виде:

$$P = P' \cdot P_j \cdot P'' \cdot P_i \cdot P''',$$

где $P' = P_{n-1} P_{n-2} \ldots P_{j+1}$, $P'' = P_{j-1} \ldots P_{i+1}$, $P''' = P_{i-1} \ldots P_1$.
Достаточно показать, что

$$\partial_{i,j}(P(a)) = 0 \text{ для любых } 1 \leqslant i < j \leqslant n.$$

Из леммы 2.11 следует, что $\partial_{i,j} S_{k,l} = S_{k,l} \partial_{i,j}$ для $k > j$. Поэтому $\partial_{i,j} P' = P' \partial_{i,j}$ и

$$\partial_{i,j} P(a) = P' \cdot \partial_{i,j} P_j \cdot P'' \cdot P_i \cdot P'''(a).$$

Применяя снова лемму 2.11, получаем

$$\partial_{i,j} P_j = P_j \partial_{i,j} - \sum_{k=j+1}^{n} F_k \partial_{i,k},$$

где $F_k = S_{j,n} \ldots S_{j,k+1} \hat{Q}_{j,k} S_{j,k} \ldots S_{j,j+1}$ и $\hat{Q}_{j,k}$ — оператор умножения на $Q_{j,k}$. Заметим, что операторы $\partial_{i,k}$, где $j \leqslant k \leqslant n$, коммутируют с P''. Тогда

$$\partial_{i,j} P(a) = P' \cdot P_j \partial_{i,j} \cdot P'' \cdot P_i \cdot P'''(a) - P' \cdot \sum_{k=j+1}^{n} F_k \partial_{i,k} \cdot P'' \cdot P_i \cdot P'''(a) =$$

$$= P' \cdot P_j \cdot P'' \cdot \partial_{i,j} P_i \cdot P'''(a) - P' \cdot \sum_{k=j+1}^{n} F_k \cdot P'' \cdot \partial_{i,k} P_i \cdot P'''(a) = 0.$$

Так как $\partial_{i,k} P_i(b) = 0$ для всех $j \leqslant k \leqslant n$ и $b \in A_D$, то $\partial_{i,j} P(a) = 0$ для любого $a \in A_D$.

Теорема 2.14. Алгебра A_D^U есть кольцо многочленов от $\{P(x_{i,j}) | \ i+j \geqslant n+1\}$, локализованное по системе знаменателей, порожденной

$$\{P(x_{n,1}), P(x_{n-1,2}), \ldots, P(x_{2,n-1})\}.$$

Доказательство. Рассмотрим подмножество $L \subset V$, состоящее из матриц вида:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & l_{1,n} \\ 0 & 0 & \iddots & \vdots \\ 0 & l_{n-1,2} & \dots & l_{n-1,n} \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \dots & l_{n,n} \end{pmatrix} \right\}, \tag{2.5}$$

где $l_{i,j} \in K$ и $l_{n,1} \neq 0$, $l_{n-1,2} \neq 0, \dots, l_{2,n-1} \neq 0$. Обозначим через Res_L отображение ограничения $f \to f|_L$ алгебры U-инвариантов A_D^U в $K(L)$. Известно, что замыкание TLT^{-1} всюду плотно в X [4]. Поэтому отображение ограничения Res_L является вложением $A_D^U \hookrightarrow K(L)$.

Заметим, что

$$\mathrm{Res}_L(Q_{i,j}) = \frac{\mathrm{Res}_L(M_{[i,n]\setminus\{j\}})}{l_{n,1} \dots l_{i,n-i+1}} = 0$$

для всех $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

Поэтому $\mathrm{Res}_L S_{i,j}(f) = \mathrm{Res}_L f$, для любого $f \in A_D$ и любых $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Как следствие $\mathrm{Res}_L P(f) = \mathrm{Res}_L f$ для любого $f \in A_D$. Рассмотрим систему U-инвариантов

$$\{P(x_{i,j}) \mid i + j \geqslant n + 1\}.$$

При ограничении на L получаем систему $\{\mathrm{Res}_L(x_{i,j}) \mid i + j \geqslant n + 1\}$, свободно порождающую кольцо многочленов на L. Поэтому $\mathrm{Im}(\mathrm{Res}_L)$ содержит кольцо многочленов на L. Обозначим $D' = \{P(x_{n,1}), P(x_{n-1,2}), \dots, P(x_{2,n-1})\}$. Так как

$$\mathrm{Res}_L(\Delta_i) = \mathrm{Res}_L(x_{n,1} \cdots x_{i,n-i+1}) = \mathrm{Res}_L\left(P(x_{n,1}) \cdots P(x_{i,n-i+1})\right),$$

то $\Delta_i = P(x_{n,1}) \cdots P(x_{i,n-i+1})$. Локализации по D и D' совпадают; образ $\mathrm{Im}(\mathrm{Res}_L)$ совпадает с кольцом регулярных функций $K[L]$, являющимся локализацией кольца многочленов на L по системе знаменателей, порожденной

$$\mathrm{Res}_L(x_{n,1}), \dots, \mathrm{Res}_L(x_{2,n-1}).$$

Отсюда A_D^U – кольцо многочленов от $\{P(x_{i,j})| \ i + j \geqslant n + 1\}$, локализованное по системе знаменателей, порожденной D'.

Теорема 2.15. Поле U-инвариантов есть поле рациональных функций от $\{P(x_{i,j})| \ i + j \geqslant n + 1\}$.

Доказательство. Для унипотентной группы U поле инвариантов является полем частных кольца инвариантов A_D^U. Доказательство следует из теоремы 2.14.

3. U-проектор для блочно-диагональных матриц

Как и выше, $V = \mathrm{Mat}(n, K)$. В этом параграфе через G обозначим группу блочно-диагональных матриц:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} G_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & G_k \end{pmatrix} \right\},$$

где каждый $G_i = \mathrm{GL}(n_i, K)$. Группа G действует на V присоединенным образом (1.1). Группа G содержит подгруппу унитреугольных матриц

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} U_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & U_k \end{pmatrix} \right\}.$$

Подобно тому как был построен U-проектор для присоединенного действия на V унитреугольной подгруппы U группы $\mathrm{GL}(n, K)$, в этом параграфе мы построим U-проектор для случая блочно-диагональной матрицы G.

Для каждого блока G_i построим систему угловых миноров D_i аналогично тому, как это делалось в предыдушем параграфе. Обозначим за D объединение системы миноров D_i по $i \in [1, k]$.

Как и выше, $A = K[V]$. Обозначим через A_D локализацию кольца регулярных функций A на V по множеству D. Для каждого блока G_i построим проектор

$$P^i \colon A_D \to A_D^{U_i}$$

аналогично тому, как это делалось в предыдущем параграфе.

Обозначим $\tilde{P} = P^k \dots P^2 P^1$. Оператор $\tilde{P}$ является проектором

$$\tilde{P} \colon A_D \to A_D^U.$$

Для каждого $1 \leqslant i \leqslant k$ рассмотрим множество матриц L_i размера n_i, определенных в (2.5). Рассмотрим множество $\tilde{L} \subset V$, состоящее из матриц вида:

$$\tilde{L} = \left\{ \begin{pmatrix} L_1 & * & * \\ * & \ddots & * \\ * & * & L_k \end{pmatrix} \right\}.$$

Обозначим через $\tilde{I}$ множество пар (i, j), где $1 \leqslant i, j \leqslant n$, для которых существует $l \in \tilde{L}$ такой, что $l_{i,j} \neq 0$.

Теорема 3.1. Алгебра A_D^U есть кольцо многочленов от $\{\tilde{P}(x_{i,j}) |\ (i, j) \in \tilde{I}\}$, локализованное по системе знаменателей, порожденной

$$\{P(x_{n_s,1}), P(x_{n_s-1,2}), \dots, P(x_{2,n_s-1}) |\ s \in [1, k]\}.$$

Доказательство. Рассмотрим множество $\tilde{L}$. Аналогично доказательству теоремы 2.14 получаем, что локализации по D и

$$D' = \{P(x_{n_i,1}), P(x_{n_i-1,2}), \dots, P(x_{2,n_i-1}) |\ i \in [1, k]\}$$

совпадают, и образ $\mathrm{Im}(\mathrm{Res}_{\tilde{L}})$ совпадает с кольцом регулярных функций $K[\tilde{L}]$, являющимся локализацией кольца многочленов на $\tilde{L}$ по системе знаменателей, порожденной $\mathrm{Res}_{\tilde{L}}(x_{n_1,1}), \dots, \mathrm{Res}_{\tilde{L}}(x_{2,n_k-1})$. Отсюда A_D^U — кольцо многочленов от

$$\{\tilde{P}(x_{i,j}) |\ (i, j) \in \tilde{I}\},$$

локализованное по системе знаменателей, порожденной D'.

Теорема 3.2. Поле U-инвариантов есть поле рациональных функций от

$$\{\tilde{P}(x_{i,j}) |\ (i, j) \in \tilde{I}\}.$$

Доказательство. Как и в теореме 2.15, известно, что для унипотентной группы U поле инвариантов является полем частных кольца инвариантов A_D^U. Из этого факта и теоремы 3.1 следует доказательство.

4. Конструкция второго U-проектора

Рассмотрим еще один способ задать U-проектор для присоединенного представления группы $\mathrm{GL}(n, K)$. Для этого введем ряд обозначений.

Пусть $C = \{c_1 < c_2 < \ldots < c_k\}$ — набор столбцов. Обозначим через W_C минор k-го порядка с системами столбцов $\{c_1 < c_2 < \ldots < c_k\}$ и строк $\{n-k+ +1,\ldots,n-1,n\}$. Заметим, что если $j \in C$, то минор $W_{C\setminus\{j\}}$ получается из W_C вычеркиванием j-го столбца и $(n-k+1)$-й строки.

Аналогично лемме 2.3 для миноров M_L сформулируем лемму для миноров W_C.

Лемма 4.1. Пусть $C = [1,r]$, $m \in C$ и $i < j$. Тогда

- Если $i,j \in C\setminus\{m\}$ или $j \notin C\setminus\{m\}$, то $\partial_{i,j}(W_{C\setminus\{m\}}) = 0$.
- Если $j \in C\setminus\{m\}$ и $i \notin C\setminus\{m\}$, то $i = m$ и
$$\partial_{i,j}(W_{C\setminus\{i\}}) = (-1)^{j-i+1}W_{C\setminus\{j\}}.$$
В частности, при $r = j$ и $i = j-1$ имеем
$$\partial_{i,j}(W_{[1,j]\setminus\{i\}}) = W_{[1,j-1]} = W_{[1,i]}.$$

Доказательство. Доказательство аналогично приведенному для леммы 2.3.

Ранее мы определили набор D, составленный из убывающей цепочки угловых миноров $\Delta_k = M_{[k,n]} = W_{[1,n-k+1]}$, $\quad 2 \leqslant k \leqslant n$. Сохраним обозначение A_D для локализации кольца A по множеству знаменателей, порожденных D.

4.1. Построение набора $C_{i,j}$

Для любых $1 \leqslant i < j \leqslant n$ определим рациональные функции двух видов:

- При $i+j < n+1$:
$$C_{i,j} = \frac{W_{[1,\ldots,i,j]\setminus\{i\}}}{\Delta_{n-i+1}}.$$
- При $i+j \geqslant n+1$:
$$C_{i,j} = -\frac{M_{[i,j,\ldots,n]\setminus\{j\}}}{\Delta_j}.$$

Пример 4.2. При $n = 4$ получаем:
$$C_{12} = \frac{x_{42}}{x_{41}}, \qquad C_{13} = \frac{x_{43}}{x_{41}},$$
$$C_{14} = -\frac{x_{11}}{x_{41}}, \quad C_{24} = -\frac{x_{21}}{x_{41}}, \quad C_{34} = -\frac{x_{31}}{x_{41}}, \quad C_{23} = -\frac{\begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{41} & x_{42} \end{vmatrix}}{\Delta_3}.$$

Обозначим
$$p = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{если } n \text{ - четное} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{если } n \text{ - нечетное.} \end{cases} \tag{4.1}$$

Упорядочим $C_{i,j}$, задав следующий порядок на парах (i,j):
$$\begin{gathered} (n-1,n) < (n-2,n)\ldots < (2,n) < (1,n) < \ldots < (1,3) < \\ < (1,2) < (n-2,n-1) < \ldots < (2,3) < \ldots < (n-p,n-p+1). \end{gathered} \tag{4.2}$$

Лемма 4.3. Пусть $1 \leqslant i < j \leqslant r$ и $(k,l) \leqslant (i,j)$ (согласно порядку 4.2), тогда
$$\partial_{k,l}(C_{i,j}) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k, j = l, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Из следствия 2.4 известно, что Δ_i — инвариант относительно присоединенного действия $\partial_{i,j}$.

Рассмотрим случай, когда $i+j < n+1$. В этом случае минор $C_{i,j}$ инвариантен относительно преобразования строк с помощью L_g по построению.

1. Если $l \neq j$, то $\partial_{k,l}(C_{i,j}) = 0$ при любых k, i (по лемме 4.1).

2. Если $l = j$ и $k < i$, то
$$\partial_{k,l}(C_{i,j}) = \frac{\partial_{k,j}(W_{[1,2,\ldots,i,j]\setminus\{i\}})}{\Delta_{n-i+1}} = 0,$$
т. к. столбцы $k, l = j$ содержатся в $W_{[1,2,\ldots,i,j]\setminus\{i\}}$.

3. Если $l = j$, и $k > i$, то такое соотношение не удовлетворяет неравенству из условия для индексов, потому что $(k, j) > (i, j)$ для любого j при $k > i$ (т. к. это элементы одного столбца).

4. Если $l = j, k = i$, легко заметить, что
$$\partial_{i,j}(C_{i,j}) = \frac{\partial_{i,j}(W_{[1,2,\ldots i,j]/\{i\}})}{\Delta_{n-i+1}} = \frac{W_{[1,2,\ldots i]}}{\Delta_{n-i+1}} = \frac{\Delta_{n-i+1}}{\Delta_{n-i+1}} = 1.$$

Аналогично разбирается случай, когда $i + j \geqslant n + 1$.

Определение. Для любых $1 \leqslant i < j \leqslant n$ определим оператор $S_{i,j}\colon A_D \to A_D$ формулой:
$$S_{i,j} = id - C_{i,j}\partial_{i,j} + \frac{C_{i,j}^2}{2!}\partial_{i,j}^2 - \frac{C_{i,j}^3}{3!}\partial_{i,j}^3 + \ldots. \tag{4.3}$$

Как и для случая $Q_{i,j}$, так как $\partial_{i,j}$ — локально-нильпотентное дифференцирование, то $S_{i,j}(a)$ — конечный ряд для любого $a \in A_D$.

Для набора $\{C_{i,j}\}$ выполняется аналог леммы 2.11.

Лемма 4.4. Пусть $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $1 \leqslant k < l \leqslant n$ и $a \in A_D$. Тогда если $(i, j) \leqslant (k, l)$, то
$$\partial_{i,j}(S_{k,l}(a)) = \begin{cases} 0, & \text{если } i = k,\ j = l, \\ S_{k,l}\partial_{i,j}(a), & \text{если } (i,j) < (k,l),\ j \neq k,\ i \neq l, \\ S_{k,l}\partial_{i,j}(a) - C_{k,l}S_{k,l}(\partial_{i,l}(a)), & \text{если } (i,j) < (k,l),\ j = k,\ i \neq l, \\ S_{k,l}\partial_{i,j}(a) + C_{k,l}S_{k,l}(\partial_{k,j}(a)), & \text{если } (i,j) < (k,l),\ j \neq k,\ i = l. \end{cases}$$

Доказательство. Случай $(i, j) = (k, l)$. Так как по лемме 4.3 $\partial_{i,j}(C_{i,j}) = 1$, то согласно определению (4.3) следствие 2.10 леммы 2.9 выполняется и для $C_{i,j}$, то есть:
$$\partial_{i,j}(S_{i,j}(a)) = 0.$$

Для доказательства остальных случаев обозначим:
$$S = S_{k,l},\ \ \partial = \partial_{k,l},\ \ \delta = \partial_{i,j},\ \ C = C_{k,l}.$$

Из леммы 4.3 вытекает $\delta(C) = 0$. Поэтому
$$\delta(S(a)) = \delta\left(\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{C^s}{s!}\partial^s(a)\right) = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{C^s}{s!}\partial^s(\delta(a)) + \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{C^s}{s!}[\delta, \partial^s](a). \tag{4.4}$$

Из леммы 2.8 $[[\delta, \partial], \partial] = 0$. Отсюда для любого $s > 0$ выполняется
$$[\delta, \partial^s] = s\partial^{s-1}[\delta, \partial].$$

После подстановки в (4.4) имеем
$$\delta(S(a)) = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{C^s}{s!}\partial^s(\delta(a)) + \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{C^s}{(s-1)!}\partial^{s-1}([\delta, \partial](a)),$$

то есть $\delta(S(a)) = S(\delta(a)) - CS([\delta, \partial](a))$. Применяя лемму 2.8, получаем

$$\partial_{i,j}(S_{k,l}(a)) = \begin{cases} S_{k,l}\partial_{i,j}(a), & \text{если } (i,j) < (k,l),\ j \neq k,\ i \neq l, \\ S_{k,l}\partial_{i,j}(a) - C_{k,l}S_{k,l}(\partial_{i,l}(a)), & \text{если } (i,j) < (k,l),\ j = k,\ i \neq l, \\ S_{k,l}\partial_{i,j}(a) + C_{k,l}S_{k,l}(\partial_{k,j}(a)), & \text{если } (i,j) < (k,l),\ j \neq k,\ i = l. \end{cases}$$

Заметим, что пары (i, l) и (k, j) меньше (k, l), согласно порядку (4.2). Действительно, в случае $(i, j) < (k, l), j = k, i \neq l$ получаем в результате коммутирования $[\partial_{i,j}, \partial_{j,l}] = \partial_{i,l}$, где $i < j = k$, значит $(i, l) < (k, l)$. Аналогично в случае $(i, j) < (k, l), j \neq k, i = l$, получаемый оператор $\partial_{k,j}$, для которого $j > i = l$ и значит $(k, j) < (k, l)$.

4.2. Конструкция U-проектора

Введем следующие обозначения $\Pi^+ = \{(i, j) \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ и $\Pi^+ = \{(i, j) \mid 1 \leqslant \leqslant i < j \leqslant n\}$. Разобьем Π^+ на непересекающиеся подмножества:

$$\Pi = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \ldots \cup \Gamma_p$$

такие, что

$$\begin{gathered} \Gamma_1 = \{(i,j) \in \Pi^+ \mid i = 1, \text{ или } j = n\}, \\ \Gamma_2 = \{(i,j) \in \Pi^+ \mid i = 2, \text{ или } j = n-1\}, \\ \ldots \\ \Gamma_p = \{(i,j) \in \Pi^+ \mid i = p, \text{ или } j = n-p+1\}. \end{gathered}$$

Заметим, что $\Gamma_p > \Gamma_{p-1} > \ldots > \Gamma_1$, согласно порядку (4.2). Для любого $1 \leqslant m \leqslant p$ обозначим

$$P_m = S_{m,m+1}S_{m,m+2}\cdots S_{m,n-m}S_{m,n-m+1}S_{m+1,n-m+1}\cdots S_{n-m,n-m+1}.$$

Пример 4.5. При $n = 7, p = 3$ по правилу (4.1). При этом:

$$\begin{aligned} &P_1 = S_{1,2}S_{1,3}S_{1,4}S_{1,5}S_{1,6}S_{1,7}S_{2,7}S_{3,7}S_{4,7}S_{5,7}S_{6,7}, \\ &P_2 = S_{2,3}S_{2,4}S_{2,5}S_{2,6}S_{3,6}S_{4,6}S_{5,6}, \\ &P_3 = S_{3,4}S_{3,5}S_{4,5}. \end{aligned}$$

Рассмотрим оператор

$$P = P_p \cdots P_2 P_1.$$

Лемма 4.6. Для любой пары $(i, j) \in \Pi$ существует такой m, что $(i, j) \in \Gamma_m$. Тогда $\partial_{i,j}(P_m(a)) = 0$ для любого $a \in A_D$.

Доказательство. Так как $(i, j) \in \Gamma_m$, то возможны следующие варианты: $i = m$ или $j = n - m + 1$.

1. Случай $i = m$. Из леммы 4.4 вытекает, что

$$\begin{aligned} &\partial_{m,j}(P_m(a)) = \partial_{m,j}(S_{m,m+1}\cdots S_{m-1,j}S_{m,j}\cdots S_{n-m,n-m+1}(a)) = \\ &= S_{m,m+1}\cdots S_{m-1,j}\partial_{m,j}(S_{m,j}\cdots S_{n-m,n-m+1}(a)) = 0, \end{aligned}$$

   поскольку $\partial_{m,j}(S_{m,j}(b)) = 0$ для любого $b \in A_D$.

2. Случай $j = n - m + 1$. Оператор $\partial_{i,n-m+1}$ коммутирует со всеми $S_{\alpha,\beta}$, где $(\alpha, \beta) \in \Gamma_m$, кроме случая, когда $(\alpha, \beta) = (m, i)$. Применяя лемму 4.4, получаем

$$
\begin{aligned}
&\partial_{i,n-m+1}(P_m(a)) = \\
&= S_{m,m+1}\cdots\partial_{i,n-m+1}(S_{m,i}\cdots S_{i,n-m+1}\cdots S_{n-m,n-m+1}(a)) = \\
&= S_{m,m+1}\cdots S_{m,i}\partial_{i,n-m+1}(S_{m,i+1}\cdots S_{i,n-m+1}\cdots S_{n-m,n-m+1}(a)) + \\
&+ S_{m,m+1}\cdots C_{m,i}S_{m,i}\partial_{m,n-m+1}(S_{m,i+1}\cdots S_{m,n-m+1}\cdots S_{n-m,n-m+1}(a)) = \\
&= S_{m,m+1}\cdots S_{m,i}\cdots\partial_{i,n-m+1}(S_{i,n-m+1}\cdots S_{n-m,n-m+1}(a)) + \\
&+ S_{m,m+1}\cdots C_{m,i}S_{m,i}\cdots\partial_{m,n-m+1}(S_{m,n-m+1}\cdots S_{n-m,n-m+1}(a)) = 0
\end{aligned}
$$

для любого $a \in A_D$.

Лемма 4.7. Если $(i,j) \in \Gamma_m$ и $(k,l) \in \Gamma_t$, где $t > m$, то либо $\partial_{i,j}$ коммутирует с $S_{k,l}$, либо

$$\partial_{i,j}(S_{k,l}(a)) = S_{k,l}(\partial_{i,j}(a)) + F\partial_{\alpha,\beta}(a),$$

где F — некоторый оператор в A_D и $(\alpha,\beta) \in \Gamma_m$.

Доказательство. Непосредственно вытекает из леммы 4.4.

Теорема 4.8 Оператор $P\colon A_D \to A_D$ является проектором на A_D^U.

Доказательство. Элемент $a \in A_D$ является U-инвариантом тогда и только тогда, когда $\partial_{i,j}(a) = 0$ для любых $(i,j) \in \Pi$. Отсюда легко видеть, что $P(a) = a$ для любого U-инварианта $a \in A_D$.

Осталось показать, что для любого $a \in A_D$ образ $P(a)$ является U-инвариантом, то есть

$$\partial_{i,j}(P(a)) = 0 \text{ для любых } (i,j) \in \Pi.$$

Пусть $(i,j) \in \Pi$. Тогда $(i,j) \in \Gamma_m$ для некоторого номера $1 \leqslant m \leqslant p$. Тогда по леммам 4.6 и 4.7

$$\partial_{i,j}(P(a)) = \partial_{i,j}(P_pP_{p-1}\cdots P_m(\tilde{a})) = \sum_{(\alpha,\beta)\in\Gamma_m} F_{\alpha,\beta}\partial_{\alpha,\beta}P_m(\tilde{a}) = 0,$$

где $\tilde{a} = P_{m-1}\cdots P_1(a)$ и $F_{\alpha,\beta}$ — некоторый оператор на A_D. Из леммы 4.6 $\partial_{\alpha,\beta}(P_m(\tilde{a})) = 0$ для всех $(\alpha,\beta) \in \Gamma_m$. Таким образом, для любого $(i,j) \in \Pi^+$ $\partial_{i,j}(P(a)) = 0$.

Следующая цель: примерить проектор P для нахождения системы образующих элементов в поле U-инвариантов. Для этого построим сечение L и введем следующие обозначения:
$\mathcal{D}' = \{(a,b) \in \Pi \mid a+b = n+1,\ b \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]\}$ — элементы побочной диагонали, лежащие под главной диагональю.
Для любой пары $(a,b) \in \mathcal{D}'$ рассмотрим наборы:
$\Gamma^+_{a,b} = \{(m,b) \mid b \leqslant m < a\}$ — столбец над (a,b),
$\Gamma^-_{a,b} = \{(a,k) \mid b < k < a\}$ — строка справа от (a,b).

$$\Gamma = \bigcup_{(a,b)\in D'_0} (\Gamma^+_{a,b} \cup \Gamma^-_{a,b}).$$

Рассмотрим подмножество $L \subset V$, состоящее из матриц вида:

$$L = \{X \in \mathrm{Mat}(n,K) \mid x_{i,j} = 0 \text{ при } (i,j) \in \Gamma \text{ и } x_{i,j} \neq 0 \text{ при } (i,j) \in \mathcal{D}'\}. \quad (4.5)$$

Теорема 4.9. Алгебра A_D^U есть кольцо многочленов от $\{P(x_{i,j})|\ (i,j) \in \Pi\setminus\Gamma\}$, локализованное по системе знаменателей, порожденной

$$P(\mathcal{D}') = \{P(x_{i,j})|\ (i,j) \in \mathcal{D}'\}.$$

Доказательство. Рассмотрим множество L, задаваемое условием (4.5). Обозначим через Res_L отображение ограничения $f \to f|_L$ алгебры U-инвариантов A_D^U в $K(L)$.

Известно, что замыкание TLT^{-1} всюду плотно в X (смотри [4]). Поэтому отображение ограничения Res_L является вложением $A_D^U \hookrightarrow K(L)$.

Заметим, что

- при $i+j < n+1\ :\ \mathrm{Res}_L(C_{i,j}) = \mathrm{Res}_L\left(\frac{W_{[1,\ldots,i,j]/\{i\}}}{\Delta_{n-i+1}}\right) = 0,$
- при $i+j \geqslant n+1\ :\ \mathrm{Res}_L(C_{i,j}) = \mathrm{Res}_L\left(-\frac{M_{[i,j,\ldots,n]/\{j\}}}{\Delta_j}\right) = 0$

для всех $(i,j) \in \Pi \setminus \Gamma$.

Поэтому $\mathrm{Res}_L S_{i,j}(f) = \mathrm{Res}_L f$, для любого $f \in A_D$ и любых $(i,j) \in \Pi^+$. Как следствие $\mathrm{Res}_L P(f) = \mathrm{Res}_L f$ для любого $f \in A_D$. Рассмотрим систему U-инвариантов
$$\{P(x_{i,j})\ \mid\ (i,j) \in \Pi \setminus \Gamma\}.$$
При ограничении на L получаем систему $\{\mathrm{Res}_L(x_{i,j})\ \mid\ (i,j) \in \Pi \setminus \Gamma\}$, свободно порождающую кольцо многочленов на L. Поэтому $\mathrm{Im}(\mathrm{Res}_L)$ содержит кольцо многочленов на L.

Так как
$$\mathrm{Res}_L(\Delta_i) = \mathrm{Res}_L(x_{n,1}\cdots x_{i,n-i+1}) = \mathrm{Res}_L\left(P(x_{n,1})\cdots P(x_{i,n-i+1})\right),$$
то $\Delta_i = P(x_{n,1})\cdots P(x_{i,n-i+1})$. Локализации по D и $P(\mathcal{D}')$ совпадают; образ $\mathrm{Im}(\mathrm{Res}_L)$ совпадает с кольцом регулярных функций $K[L]$, являющимся локализацией кольца многочленов на L по системе знаменателей, порожденной
$$\{\mathrm{Res}_L(x_{i,j})\}_{(i,j)\in\mathcal{D}'}.$$
Отсюда A_D^U – кольцо многочленов от $\{P(x_{i,j})|\ (i,j) \in \Pi \setminus \Gamma\}$, локализованное по системе знаменателей, порожденной $P(\mathcal{D}')$.

Теорема 4.10. Поле U-инвариантов есть поле рациональных функций от
$$\{P(x_{i,j})|\ (i,j) \in \Pi \setminus \Gamma\}.$$

Доказательство. Как и в теоремах 2.15 и 3.2, используя тот факт, что поле инвариантов унипотентной группы U является полем частных кольца инвариантов A_D^U, и учитывая результат теоремы 4.9, получаем доказательство.

Автор благодарна А.Н. Панову за помощь и внимание к статье.

Литература

[1] Miyata K., Invariants of certain groups // Nagoya Math. Journal. 1971. № 1(41). C. 69–73.

[2] Винберг Э.Б., Попов В.Л. Теория инвариантов // Алгебраическая геометрия. Итоги науки и техн. Сер.: Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. 1989. № 4(55). С. 137–309.

[3] Винберг Э.Б. Рациональность поля инвариантов треугольной группы // Вестник МГУ. Сер.: Математика и механика. 1982. № 2. С. 23–24.

[4] Вяткина К.А., Панов А.Н. Поле U-инвариантов присоединенного действия группы $\mathrm{GL}(n,k)$ // Мат. заметки. 2013. № 1(93). С. 144–147.

[5] Вяткина К.А. Поле инвариантов борелевской группы присоединенного представления $\mathrm{GL}(n, K)$ // Вестник Самарского государственного университета, Естественнонаучная серия. 2014. № 3(114). С. 34–40.

[6] Panyushev D.I. Complexity and rank of actions in invariant theory // Jounal of Mathematical Sciences. 1999. № 1(95). С. 1925–1985.

References

[1] Miyata K. Invariants of certain groups. *Nagoya Math. Journal*, 1971, no. 1(41), pp. 69–73 [in English].

[2] Vinberg E.B., Popov V.L. Invariant theory. *Algebraicheskaia geometriia. Itogi nauki i tekhn. Ser.: Sovrem. probl. mat. Fundam. napravleniia* [Algebraic geometry. Itogi Nauki i Tekhniki. Seriya "Sovremennye Problemy Matematiki. Fundamental'nye Napravleniya"]. Moscow, 1989, no. 4(55), pp. 137-–309 [in Russian].

[3] Vinberg E.B. Rationality of the field of invariants of a triangular group. *Vestn. MGU. Ser.: Matematika i mekhanika* [Moscow University Mechanics Bulletin and Moscow University Mathematics Bulletin], 1982, no. 2, pp. 23–24. [in Russian]

[4] Vyatkina K.A., Panov A.N. Field of U-invariants of adjoint representation of the group $\mathrm{GL}(n, K)$. *Mat. zametki* [Mathematical Notes], 2013, no. 1(93), pp. 144–147 [in Russian].

[5] Vyatkina K.A Field of borel group invariant of adjoint reprepentation of the group $GL(n, K)$. [Vestnik of Samara State University. Natural Science series], 2014, no. 3(114), pp. 34–40 [in Russian].

[6] Panyushev D.I. Complexity and rank of actions in invariant theory. *Jounal of Mathematical Sciences*, 1999, no. 1(95), pp. 1925–1985 [in English].

K.A. Vyatkina[3]

U-PROJECTION FOR THE ADJOINT REPRESENTATION OF THE GROUP GL(n, K)[4]

In the paper we study rings and fields of invariants for the adjoint representation of the group GL(n, K) over the field of zero characteristic. The aim of this paper is to construct the special linear operator, we call it U-projector, that maps any polynomial on the matrix algebra to an U-invariant rational function. In this paper we present two different constructions of U-projector. Using the U-projector we obtain the system of generators of the field of U-invariants of the adjoint representation of the group GL(n, K). We obtain the system of generators of the field of U-invariants for the restriction of the adjoint representation to the subgroup of block-diagonal matrices.

Key words: field of invariants, adjoint representation, unitriangular group, solvable group, algebra of invariants, representations of groups, locally nilpotent derivation, system of generators.

Статья поступила в редакцию 25/IX/2015.
The article received 25/IX/2015.

[3] *Vyatkina Kseniya Anatolievna* (vjatkina.k@gmail.com), Department of Algebra and Geometry, Samara State University, 1, Acad. Pavlov Street, Samara, 443011, Russian Federation.
[4] The work of the author is supported by the grants of the Russian Foundations for Basic Research 14-01-97017 and 14-01-31052.