УДК 517.956

*Л.С. Пулькина, А.Е. Савенкова*[1]

# НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ВТОРОГО РОДА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В статье рассмотрена задача с нелокальными интегральными условиями второго рода для гиперболического уравнения на плоскости и доказана ее однозначная разрешимость. Для доказательства этого предложен метод, основанный на преобразовании нелокальных условий к виду, позволяющему эффективно ввести понятие обобщенного решения, базирующееся на выведенном интегральном тождестве, получить априорные оценки решения и воспользоваться свойствами пространств Соболева. Предложенный метод позволил обнаружить связь нелокальных условий с динамическими условиями.

**Ключевые слова:** нелокальная задача, интегральные условия, гиперболическое уравнение, обобщенное решение, динамические условия.

## 1. Постановка задачи

В статье рассматривается задача отыскания решения в ограниченной области $Q_T = (0,l) \times (0,T)$ гиперболического уравнения

$$u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x + c(x,t)u = f(x,t), \tag{1}$$

удовлетворяющего начальным данным

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \tag{2}$$

а также условиям

$$\begin{aligned} u(0,t) + \int_0^l K_1(x)u(x,t)dx = 0,\\ u(l,t) + \int_0^l K_2(x)u(x,t)dx = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Условия (3) содержат следы искомого решения во внеинтегральных членах, поэтому являются условиями второго рода. Для исследования разрешимости нелокальных задач с условиями такого вида можно применить как метод вспомогательных задач, так и метод сведения к задаче с классическими краевыми условиями для



*Пулькина Людмила Степановна* (louise@samdiff.ru), кафедра уравнений математической физики, Самарский университет, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

*Савенкова Алеся Евгеньевна* (alesya.savenkova@mail.ru), кафедра общей математики и информатики, Самарский государственный технический университет, 443100, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

нагруженного уравнения [1]. Заметим, что оба эти метода предполагают выполнение таких условий на ядра интегральных членов нелокальных условий, которые обеспечивают обратимость интегрального оператора, возникающего при их реализации.

Мы предлагаем в этой статье другой подход, позволяющий воспользоваться идеей метода компактности [2], который зарекомендовал себя как эффективный метод обоснования разрешимости как начально-краевых задач [3], так и нелокальных [4]. Предложенный метод позволил снять некоторые ограничения на ядра интегральных условий.

Начнем изучение поставленной задачи с доказательства утверждения, которое обнаруживает связь условий (3) с условиями, содержащими значения производных на боковой границе области $Q_T$, в том числе по пространственной переменной.

**Теорема 1.** Если $u \in C^2(Q_T) \cap C^1(\bar{Q}_T)$, удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2),

$$K_i \in C^2(0,l) \cap C^1[0,l], \quad \Delta = K_1(0)K_2(l) - K_1(l)K_2(0) \neq 0,$$
$$a \in C[0,l] \cap C^1(0,l), \;\; c \in C(\bar{Q}_T), \;\; f \in L_2(Q_T),$$

то условия (3) эквивалентны граничным условиям

$$\begin{aligned} a(0,t)u_x(0,t) &= \alpha_{11}u(0,t) + \alpha_{12}u(l,t) + \beta_{11}u_{tt}(0,t) + \beta_{12}u_{tt}(l,t) + \\ &\quad + \int_0^l H_1(x,t)u(x,t)dx + \int_0^l S_1(x)f(x,t)dx, \\ a(l,t)u_x(l,t) &= \alpha_{21}u(0,t) + \alpha_{22}u(l,t) + \beta_{21}u_{tt}(0,t) + \beta_{22}u_{tt}(l,t) + \\ &\quad + \int_0^l H_2(x,t)u(x,t)dx + \int_0^l S_2(x)f(x,t)dx, \end{aligned} \tag{4}$$

где обозначено

$$\alpha_{11}(t) = \frac{K_2(l)K_1'(0) - K_1(l)K_2'(0)}{\Delta}a(0,t), \;\; \alpha_{12}(t) = \frac{K_1(l)K_2'(l) - K_2(l)K_1'(l)}{\Delta}a(l,t),$$
$$\alpha_{21}(t) = \frac{K_2(0)K_1'(0) - K_1(0)K_2'(0)}{\Delta}a(0,t), \;\; \alpha_{22}(t) = \frac{K_1(0)K_2'(l) - K_2(0)K_1'(l)}{\Delta}a(l,t),$$
$$\beta_{11} = \frac{K_2(l)}{\Delta}, \quad \beta_{12} = -\frac{K_1(l)}{\Delta}, \quad \beta_{21} = \frac{K_2(0)}{\Delta}, \quad \beta_{22} = -\frac{K_1(0)}{\Delta},$$
$$H_1(x,t) = \frac{[(aK_1')_x - cK_1]K_2(l) - [(aK_2')_x - cK_2]K_1(l)}{\Delta},$$
$$H_2(x,t) = \frac{[(aK_1')_x - cK_1]K_2(0) - [(aK_2')_x - cK_2]K_1(0)}{\Delta},$$
$$S_1(x) = \frac{K_1(x)K_2(l) - K_2(x)K_1(l)}{\Delta}, \quad S_2(x) = \frac{K_1(x)K_2(0) - K_2(x)K_1(0)}{\Delta}.$$

**Доказательство** этого утверждения становится почти очевидным после дифференцирования по переменной $t$ равенств (3) в предположении о выполнении условий теоремы. Преобразования, приводящие к (4), элементарны, но громоздки, поэтому мы их здесь не приводим. Предполагая затем, что выполняются равенства (1), (2) и (4), интегрируя слагаемые в (4) $\int_0^l (aK_i')_x u dx$ дважды, после некоторых преобразований и решения возникшей при этом задачи Коши для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений придем к (3).

Доказанное в теореме 1 утверждение позволяет перейти от задачи (1)—(3) к задаче с нелокальными условиями (4): найти в $Q_T$ решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) и (4).

Поясним смысл перехода от задачи (1)—(3 к задаче (1), (2, (4). Заметим, что условие (4) в отличие от условия (3) содержит в качестве внеинтегрального члена значения выводящей производной искомой функции на боковой границе, а именно $u_x(0,t)$, $u_x(l,t)$, что и позволит нам воспользоваться основными идеями метода компактности. Это становится видно на первом шаге доказательства разрешимости задачи в процессе вывода интегрального тождества, на котором и базируется определение решения. Действительно, применяя стандартную процедуру [3], отправной точкой которой является интегрирование по $Q_T$ (1), умноженного на подходящую гладкую функцию $v(x,t)$, получим равенство

$$\int_0^T\int_0^l(-u_tv_t+au_xv_x+cuv)dxdt+\int_0^T v(0,t)[\alpha_{11}u(0,t)+\alpha_{12}u(l,t)]dt-$$
$$-\int_0^T v_t(0,t)[\beta_{11}u_t(0,t)+\beta_{12}u_t(l,t)]dt+\int_0^T v(0,t)\int_0^l H_1udxdt-$$
$$-\int_0^T v(l,t)[\alpha_{21}u(0,t)+\alpha_{22}u(l,t)]dt+$$
$$+\int_0^T v_t(l,t)[\beta_{21}u_t(0,t)+\beta_{22}u_t(l,t)]dt-\int_0^T v(l,t)\int_0^l H_2udxdt=$$
$$=\int_0^T\int_0^l fvdxdt-\int_0^T v(0,t)\int_0^l S_1fdxdt+\int_0^T v(l,t)\int_0^l S_2fdxdt. \tag{5}$$

Обозначим

$$\Gamma_0=\{(x,t):x=0,t\in[0,T]\},\ \ \Gamma_l=\{(x,t):\ \ x=l,t\in[0,T]\},\ \ \Gamma=\Gamma_0\cup\Gamma_l,$$
$$W(Q_T)=\{u:u\in W_2^1(Q_T),\ \ u_x(0,t)=0,\ \ u_t\in L_2(\Gamma)\},$$
$$\hat{W}(Q_T)=\{v(x,t):v(x,t)\in W(Q_T),\ \ v(x,T)=0\}.$$

**Определение.** Обобщенным решением задачи (1), (2, (4) будем называть функцию $u(x,t)\in W(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(x,0)=0$ и тождеству (5) для любой $v\in\hat{W}(Q_T)$.

## 2. Разрешимость задачи

**Теорема 2.** Пусть выполняются следующие условия:

$$(i)\ \ a\in C(\bar{Q}_T),\quad a_t\in C(\bar{Q}_T),\quad a(x,t)>0\ \ \forall(x,t)\in\bar{Q}_T\quad c\in C(\bar{Q}_T),$$

$$(ii)\ \ H_i\in C(\bar{Q}_T),\ \ S_i\in C[0,l],\quad f\in L_2(Q_T),f_t\in L_2(Q_T),$$

$$(iii)\ \ \alpha_{11}\xi^2-2\alpha_{21}\xi\eta-\alpha_{22}\eta^2\geqslant0,\quad \beta_{11}\xi^2+2\beta_{21}\xi\eta-\beta_{22}\eta^2\geqslant0,$$
$$(iiii)\ \ \alpha_{12}+\alpha_{21}=0,\quad \alpha_{11}'(t)<0,\quad \alpha_{22}'(t)>0,\quad \beta_{12}+\beta_{21}=0.$$

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1), (2, (4).

**Доказательство.**

*Единственность решения.* Предположим, что существует два различных решения этой задачи, $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Тогда их разность, $u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ удовлетворяет условию $u(x,0)=0$ и тождеству

$$\int_0^T\int_0^l(-u_tv_t+au_xv_x+cuv)dxdt+\int_0^T v(0,t)[\alpha_{11}u(0,t)+\alpha_{12}u(l,t)]dt-$$
$$-\int_0^T v_t(0,t)[\beta_{11}u_t(0,t)+\beta_{12}u_t(l,t)]dt+\int_0^T v(0,t)\int_0^l H_1udxdt-$$
$$-\int_0^T v(l,t)[\alpha_{21}u(0,t)+\alpha_{22}u(l,t)]dt+$$
$$+\int_0^T v_t(l,t)[\beta_{21}u_t(0,t)+\beta_{22}u_t(l,t)]dt-\int_0^T v(l,t)\int_0^l H_2udxdt=0. \tag{6}$$

Выберем в тождестве (6) функцию $v(x,t)$, положив

$$v(x,t)=\begin{cases}\int\limits_\tau^t u(x,\eta)d\eta, & 0\leqslant t\leqslant\tau,\\ 0, & \tau\leqslant t\leqslant T,\end{cases}$$

где $\tau\in[0,T]$ произвольно.

Элементарные преобразования тождества (6), состоящие, как обычно, в интегрировании по частям с выбранной указанным образом функцией $v(x,t)$, приводят к равенству

$$\int_0^l[u^2(x,\tau)+a(x,0)v_x^2(x,0)]dx=-\int_0^\tau\int_0^l a_tv_x^2dxdt+$$
$$+\int_0^\tau[\alpha'_{22}v^2(l,t)+2\alpha'_{21}v(0,t)v(l,t)-\alpha'_{11}v^2(0,t)]dt+$$
$$+\alpha_{22}(0)v^2(l,0)+2\alpha_{21}v(0,0)v(l,0)-\alpha_{11}(0)v^2(0,0)+$$
$$+\beta_{22}u^2(l,\tau)-2\beta_{21}u(0,\tau)u(l,\tau)-\beta_{11}u^2(0,\tau)+$$
$$+\int_0^\tau v(0,t)\int_0^l H_1udxdt-\int_0^\tau v(l,t)\int_0^l H_2udxdt+\int_0^\tau\int_0^l cvv_tdxdt, \tag{7}$$

где уже учтено условие $(iiii)$ теоремы. Оценим правую часть последнего равенства. Заметим, что из условий теоремы следует существование чисел $c_0,h_0,A,\sigma$ таких, что

$$\max_{\bar Q_T}|c(x,t)|\leqslant c_0,\quad \max_{[0,T]}|\alpha_{ij},\alpha'_{ij}|\leqslant A, i,j=1,2,\ \max_{\bar Q_T}|a_t(x,t)|\leqslant a_1,$$

$$\max_{[0,T]}\int_0^l H_i^2(x,t)dx\leqslant h_0,\quad \max_{[0,l]}S_i(x)\leqslant\sigma.$$

Применяя неравенства Коши, Коши — Буняковского, неравенства

$$v^2(s_i,t) \leqslant 2l\int_0^l v_x^2 dx + \frac{2}{l}v^2 dx, \quad i=0,1, \quad s_0=0, s_1=l,$$

которые легко выводятся из представления

$$v(s_i,t) = \int_x^{s_i} v_\xi(\xi,t)d\xi + v(x,t),$$

а также неравенство

$$v^2(x,t) \leqslant \tau\int_0^\tau u^2 dt,$$

вытекающее из представления функции $v(x,t)$, получим

$$\int_0^l [u^2(x,\tau) + a(x,0)v_x^2(x,0)]dx \leqslant A_1\int_0^\tau\int_0^l v_x^2 dxdt + A_2\int_0^\tau\int_0^l u^2 dxdt, \tag{8}$$

где $A_1 = 2l(2A+1)$, $A_2$ зависит лишь от $c_0, h, \sigma, a_1, A$.

Введем функцию $w(x,t) = \int_0^t u_x(x,\eta)d\eta$. Тогда, как нетрудно заметить,

$$v_x(x,t) = w(x,t) - w(x,\tau), \quad v_x(x,0) = -w(x,\tau),$$
$$v_x^2(x,t) \leqslant 2w^2(x,t) + 2w^2(x,\tau).$$

Учитывая эти соотношения, из (8) получим

$$\int_0^l [u^2(x,\tau) + a(x,0)w^2(x,\tau)]dx \leqslant 2A_1\tau\int_0^l w^2(x,\tau)dx +$$

$$+2A_1\int_0^\tau\int_0^l w^2(x,t)dxdt + A_2\int_0^\tau\int_0^l u^2(x,t)dxdt. \tag{9}$$

Пусть $a(x,t) \geqslant a_0 > 0$ $\forall (x,t) \in \bar{Q}_T$. Пользуясь произволом $\tau$, выберем его так, чтобы $a_0 - 2A_1\tau > 0$. Для определенности будем считать, что $a_0 - 2A_1\tau \geqslant \frac{a_0}{2}$. Тогда первое слагаемое правой части (9) можно перенести в левую часть, и для всех $\tau \in [0, \frac{a_0}{4A_1}]$ будет справедливо неравенство

$$m_0\int_0^l [u^2(x,\tau) + w^2(x,\tau)]dx \leqslant A_3\int_0^\tau\int_0^l [u^2(x,t) + w^2(x,t)]dxdt,$$

где $m_0 = \min\{1, \frac{a_0}{2}\}$, $A_3 = \max\{2A_1, A_2\}$, применение к которому неравенства Гронуолла моментально влечет выполнение равенства $u(x,t) = 0$, $t \in [0, \frac{a_0}{4A_1}]$. Повторяя рассуждения для $\tau \in [\frac{a_0}{4A_1}, \frac{a_0}{2A_1}]$ и продолжая этот процесс, мы за конечное число шагов убедимся в том, что $u(x,t) = 0$ $\forall t \in [0,T]$, что и приводит к противоречию с предположением о существовании более одного решения.

*Существование решения.* Доказательство существования обобщенного решения проведем по следующей схеме: построим последовательность приближенных решений; выведем априорную оценку; покажем, что полученная оценка позволяет выделить слабо сходящуюся подпоследовательность; убедимся в том, что предел выделенной подпоследовательности и есть искомое решение.

Перейдем к реализации нашего плана. Пусть функции $w_k(x) \in C^2[0,l]$ образуют линейно независимую и полную в $W_2^1(0,l)$ систему. Будем искать приближенное решение задачи в виде

$$u^m(x,t) = \sum_{k=1}^{m} c_k(t) w_k(x) \tag{10}$$

из соотношений

$$\int_0^l (u_{tt}^m w_j + a u_x^m w_j' + c u^m w_j) dx +$$

$$+ w_k(0)[\alpha_{11} u^m(0,t) + \alpha_{12} u^m(l,t) + \beta_{11} u_{tt}^m(0,t) + \beta_{12} u^m(l,t) + \int_0^l H_1(x,t) u(x,t) dx] -$$

$$- w_k(l)[\alpha_{21} u^m(0,t) + \alpha_{22} u^m(l,t) + \beta_{21} u_{tt}^m(0,t) + \beta_{22} u^m(l,t) + \int_0^l H_2(x,t) u(x,t) dx] =$$

$$= \int_0^l f(x,t) w_j(x) dx - w_j(0) \int_0^l S_1(x) f(x,t) dx + w_j(l) \int_0^l S_2(x) f(x,t) dx. \tag{11}$$

Дополнив соотношения (11), которые представляют собой систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $c_k(t)$, начальными условиями $c_k(0) = 0, \quad c_k'(0) = 0$, приходим к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (11), разрешимость которой гарантирована условиями теоремы. Прежде всего покажем, что система (11) разрешима относительно старших производных. Подставив в (11) $u^m(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k(t) w_k(x)$, запишем ее в виде

$$\sum_{k=1}^{m} A_{kj} c_k''(t) + \sum_{k=1}^{m} B_{kj}(t) c_k(t) = f_j(t),$$

$$A_{kj} = \int_0^l w_k(x) w_j(x) dx +$$

$$+ \beta_{11} w_k(0) w_j(0) + \beta_{12} w_k(l) w_j(0) - \beta_{21} w_k(0) w_j(l) - \beta_{22} w_k(l) w_j(l),$$

$$B_{kj}(t) = \int_0^l (a(x,t) w_k'(x) w_j'(x) + c(x,t) w_k(x) w_j(x)) dx +$$

$$+ \alpha_{11} w_k(0) w_j(0) + \alpha_{12} w_k(l) w_j(0) - \alpha_{21} w_k(0) w_j(l) - \alpha_{22} w_k(0) w_j(0),$$

$$f_j(t) = \int_0^l f(x,t) w_j(x) dx - w_j(0) \int_0^l S_1(x) f(x,t) dx + w_j(l) \int_0^l S_2(x) f(x,t) dx.$$

Рассмотрим квадратичную форму с коэффициентами $A_{kj} : q = \sum\limits_{k,l=1}^{m} A_{kl} \xi_k \xi_l$, где $z = \sum\limits_{i=1}^{m} \xi_i w_i(x)$. Подставив выражение коэффициентов $A_{kj}$, получим

$$q = \int\limits_0^l |z(x)|^2 dx + \beta_{11}|z(0)|^2 + 2\beta_{12}|z(0)||z(l)| - \beta_{22}|z(l)|^2.$$

В силу условия $(iii)$ теоремы 2 $q \geqslant 0$, причем равенство нулю возможно лишь при $z = 0$. Так как функции $w_i(x)$ линейно независимы, то $z = 0$ только в том случае, когда $\xi_i = 0 \quad \forall i = 1, ..., m$. Стало быть, квадратичная форма $q$, а с ней и матрица из коэффициентов при старших производных системы (11) положительно определена, что и означает разрешимость системы относительно старших производных. В силу условий теоремы коэффициенты системы ограничены, а свободные члены $f_j \in L_1(0, T)$. Таким образом, мы приходим к выводу о существовании решения задачи Коши для системы (11), причем $c_k'' \in L_1(0, T)$. Это в свою очередь означает, что последовательность приближенных решений построена.

Для дальнейших шагов в доказательстве существования обобщенного решения поставленной задачи нам потребуется априорная оценка, к выводу которой мы и перейдем.

Умножим каждое из равенств (11) на $c_j'(t)$, просуммируем по $j$ от 1 до $m$, а затем проинтегрируем от 0 до $\tau$, в результате чего придем к равенству

$$\int\limits_0^\tau \int\limits_0^l (u_{tt}^m u_t^m + a u_x^m u_{xt}^m + c u^m u_t^m) dx dt +$$
$$+ \int\limits_0^\tau u_t^m(0,t)[\alpha_{11} u^m(0,t) + \alpha_{12} u^m(l,t) + \beta_{11} u_{tt}^m(0,t) + \beta_{12} u_{tt}^m(l,t)] dt +$$
$$+ \int\limits_0^\tau u_t^m(0,t) \int\limits_0^l H_1(x,t) u^m(x,t) dx dt -$$
$$- \int\limits_0^\tau u_t^m(l,t)[\alpha_{21} u^m(0,t) + \alpha_{22} u^m(l,t) + \beta_{21} u_{tt}^m(0,t) + \beta_{22} u_{tt}^m(l,t)] dt -$$
$$- \int\limits_0^\tau u_t^m(l,t) \int\limits_0^l H_2(x,t) u^m(x,t) dx dt = \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l f(x,t) u_t^m(x,t) dx dt -$$
$$- \int\limits_0^\tau u_t^m(0,t) \int\limits_0^l S_1(x) f(x,t) dx dt + \int\limits_0^\tau u_t^m(l,t) \int\limits_0^l S_2(x) f(x,t) dx dt. \tag{12}$$

Интегрируя по частям, преобразуем равенство (12). Получим

$$\frac{1}{2} \int\limits_0^l [(u_t^m)^2 + a(u_x^m)^2]\big|_{t=\tau} dx + \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l c u^m u_t^m dx dt - \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l a_t (u_x^m)^2 dx dt -$$
$$- \frac{1}{2} \int\limits_0^\tau \alpha_{11}' (u^m(0,t))^2 dt + \int\limits_0^\tau \alpha_{12} u_t^m(0,t) u^m(l,t) dt +$$

$$+\frac{1}{2}\alpha_{11}(\tau)(u_t^m(0,\tau))^2+\int\limits_0^\tau \beta_{12}u_t^m(0,t)u_{tt}^m(l,t)dt-$$

$$-\int\limits_0^\tau u^m(0,t)\int\limits_0^l H_1(x,t)u_t^m(x,t)dxdt-\int\limits_0^\tau u^m(0,t)\int\limits_0^l H_{1t}(x,t)u^m(x,t)dxdt+$$

$$+u^m(0,\tau)\int\limits_0^l H_1(x,\tau)u^m(x,\tau)dx+\int\limits_0^\tau \alpha_{21}u^m(l,t)u_t^m(0,t)dt+\int\limits_0^\tau \alpha_{21}'u^m(l,t)u^m(0,t)dt-$$

$$-\alpha_{21}(\tau)u^m(l,\tau)u^m(0,\tau)+\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau \alpha_{22}'(u^m(l,t))^2dt-\frac{1}{2}\alpha_{22}(\tau)(u^m(l,\tau))^2+$$

$$+\int\limits_0^\tau \beta_{21}u_{tt}^m(l,t)u_t^m(0,t)dt-\beta_{21}u_t^m(l,\tau)u_t^m(0,\tau)-\frac{1}{2}\beta_{22}(u_t^m(l,\tau))^2+$$

$$+\int\limits_0^\tau u^m(l,t)\int\limits_0^l H_2u_t^m dxdt+\int\limits_0^\tau u^m(l,t)\int\limits_0^l H_{2t}u^m dxdt-$$

$$-u^m(l,\tau)\int\limits_0^l H_2(x,\tau)u^m(x,\tau)dx=\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l fu_t^m dxdt+\int\limits_0^\tau u^m(0,t)\int\limits_0^l S_1f_t dxdt-$$

$$-u^m(0,\tau)\int\limits_0^l S_1f dx-\int\limits_0^\tau u^m(l,t)\int\limits_0^l S_2f_t dxdt+u_t^m(l,\tau)\int\limits_0^l S_2f_t dx. \qquad (13)$$

Прежде чем приступать к оценке, учтем условие $(iii)$ теоремы и сгруппируем оставшиеся слагаемые в удобном для дальнейших рассуждений порядке.

$$\int\limits_0^l [(u_t^m)^2+a(u_x^m)^2]\big|_{t=\tau}dx-\int\limits_0^\tau \alpha_{11}'(u^m(0,t))^2dt+\int\limits_0^\tau \alpha_{22}'(u^m(l,t))^2dt+$$

$$+\alpha_{11}(\tau)(u_t^m(0,\tau))^2-2\alpha_{21}(\tau)u^m(l,\tau)u^m(0,\tau)+\alpha_{22}(\tau)(u^m(l,\tau))^2+$$
$$+\beta_{11}(u_t^m(0,\tau))^2+2\beta_{21}u_t^m(l,\tau)u_t^m(0,\tau)-\beta_{22}(u_t^m(l,\tau))^2=$$

$$=-2\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l cu^mu_t^m dxdt+\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l a_t(u_x^m)^2dxdt+$$

$$+2\int\limits_0^\tau u^m(0,t)\int\limits_0^l H_1(x,t)u_t^m(x,t)dxdt+2\int\limits_0^\tau u^m(0,t)\int\limits_0^l H_{1t}(x,t)u^m(x,t)dxdt-$$

$$-2u^m(0,\tau)\int\limits_0^l H_1(x,\tau)u^m(x,\tau)dx-2\int\limits_0^\tau \alpha_{21}'u^m(l,t)u^m(0,t)dt-$$

$$-2\int\limits_0^\tau u^m(l,t)\int\limits_0^l H_2u_t^m dxdt-2\int\limits_0^\tau u^m(l,t)\int\limits_0^l H_{2t}u^m dxdt+$$

$$+u^m(0,\tau)\int\limits_0^l H_2(x,\tau)u^m(x,\tau)dx+\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l fu_t^m dxdt+\int\limits_0^\tau u^m(0,t)\int\limits_0^l S_1f_t dxdt-$$

$$-u^m(0,\tau)\int\limits_0^l S_1fdx-\int\limits_0^\tau u^m(l,t)\int\limits_0^l S_2f_t dxdt+u_t^m(l,\tau)\int\limits_0^l S_2f_t dx. \qquad (14)$$

Применяя условие теоремы $(iiii)$, неравенства Коши, Коши — Буняковского, очевидное неравенство $(u^m(x,\tau))^2\leqslant\tau\int\limits_0^\tau(u_t^m(x,t))^2dt$ и условия теоремы, с помощью той же техники, что и при доказательстве единственности решения, получим из (13) неравенство

$$\int\limits_0^l[(u^m)^2+(u_t^m)^2+(u_x^m)^2]\Big|_{t=\tau}dx+\int\limits_0^\tau[(u^m(0,t))^2+(u^m(l,t))^2]dt\leqslant$$

$$\leqslant A_4\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l[(u^m)^2+(u_t^m)^2+(u_x^m)^2]dxdt+A_5\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l(f^2+f_t^2)dxdt, \qquad (15)$$

где $A_i$ зависят лишь от постоянных $c_0,k_0,c_1,a_0,a_1,h_0$ и не зависят от $m$. Из этого неравенства, справедливого для любого $m$, в силу леммы Гронуолла вытекает *априорная оценка*

$$||u^m||^2_{W_2^1(Q_T)}+||u_t^m||^2_{L_2(\Gamma)}\leqslant R. \qquad (16)$$

Стало быть, из построенной последовательности $\{u^m(x,t)\}$ приближенных решений можно выделить слабо сходящуюся в $W(Q_T)$ подпоследовательность, за которой во избежание громоздкой записи сохраним прежнее обозначение.

Покажем теперь, что предел выделенной подпоследовательности, $u\in W(Q_T)$, и есть искомое приближенное решение.

Умножим каждое из равенств (11) на $d_j\in C^1(0,T),\ d_j(T)=0$, просуммируем по $l$ от 1 до $m$, а затем проинтегрируем от 0 до $T$. После интегрирования первого слагаемого полученного равенства по частям и обозначив $\eta(x,t)=\sum\limits_{j=1}^m d_j(t)w_j(x)$, получим

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l(-u_t\eta_t+au_x\eta_x+cu\eta)dxdt+\int\limits_0^T\eta(0,t)[\alpha_{11}u(0,t)+\alpha_{12}u(l,t)]dt-$$

$$-\int\limits_0^T\eta_t(0,t)[\beta_{11}u_t(0,t)+\beta_{12}u_t(l,t)]dt+\int\limits_0^T\eta(0,t)\int\limits_0^l H_1udxdt-$$

$$-\int\limits_0^T\eta(l,t)[\alpha_{21}u(0,t)+\alpha_{22}u(l,t)]dt+$$

$$+\int\limits_0^T\eta_t(l,t)[\beta_{21}u_t(0,t)+\beta_{22}u_t(l,t)]dt-\int\limits_0^T\eta(l,t)\int\limits_0^l H_2udxdt=$$

$$=\int\limits_0^T\int\limits_0^l f\eta dxdt-\int\limits_0^T\eta(0,t)\int\limits_0^l S_1fdxdt+\int\limits_0^T\eta(l,t)\int\limits_0^l S_2fdxdt. \qquad (17)$$

Совокупность функций вида $\sum\limits_{j=1}^{m} d_j(t)w_j(x)$ обозначим $\mathcal{N}_m$. Зафиксируем произвольно функцию $\eta(x,t)$ из какого-либо множества $\mathcal{N}_{m_i}$. В (16) можно перейти к пределу при $m \to \infty$ в силу обоснованной выше слабой сходимости выделенной подпоследовательности. В результате мы приходим к тождеству (5) для предельной функции $u \in W(Q_T)$, справедливому для произвольной функции $\eta \in \mathcal{N}_{m_i}$. Так как $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \mathcal{N}_m$ плотно в $\hat{W}$, полученное в результате предельного перехода тождество выполняется для любой функции из $\hat{W}(Q_T)$, что и завершает доказательство существования обобщенного решения и, следовательно, теоремы.

**Замечание 1.** Однородность начальных условий (2) не ограничивает общность. Действительно, если $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$, то, введя новую неизвестную функцию $v(x,t) = u(x,t) - \varphi(x) - t\psi(x)$, получим для нее уравнение, отличающееся от (1) лишь правой частью, тогда как начальные условия для $v(x,t)$ однородны.

**Замечание 2.** Новые интегральные условия (4) интересны еще и тем, что являются динамическими. Некоторые задачи с динамическими граничными условиями рассмотрены в [5–8], с динамическими нелокальными — в [9].

**Замечание 3.** Отметим некоторые статьи, в которых авторы обращают внимание на особенности нелокальных задач, не позволяющие применять для обоснования их разрешимости методы доказательства разрешимости классических начально-краевых задач: [10–17].

## Литература

[1] Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 9. С. 1166–1179.

[2] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 588 с.

[3] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука. 1973. 407 с.

[4] Дмитриев В.Б. Нелокальная задача с интегральными условиями для волнового уравнения //Вестник СамГУ. 2006. № 2(42). С. 15–27.

[5] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004. 798 с.

[6] Федотов И.А., Полянин А.Д., Шаталов М.Ю. Теория свободных и вынужденных колебаний твердого стержня, основанная на модели Рэлея // ДАН. 2007. Т. 417. № 1.

[7] Doronin G.G., Lar'kin N.A., Souza A.J. A hyperbolic problem with nonlinear second-order boundary damping // EJDE. 1998. № 28. P. 1–10.

[8] Корпусов М.О. Разрушение в неклассических волновых уравнениях. М.: URSS, 2010. 237 с.

[9] Pulkina L. Solution to nonlocal problems of pseudohyperbolic equations // EJDE. 2014. № 116. P. 1–9.

[10] Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 2. С. 294–304.

[11] Скубачевский А.Л., Стеблов Г.М. О спектре дифференциальных операторов с областью определения, не плотной в $L_2(0,1)$ // ДАН СССР. 1991. Т. 321. № 6. С. 1158–1163.

[12] Гордезиани Д.Г., Авалишвили Г.А. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // Матем. моделир. 2000. Т. 12. № 1. С. 94–103.

[13] Лажетич Н.Л. О классической разрешимости смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 2006. № 42(8). С. 1072–1077.

[14] Кожанов А.И. О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для линейных параболических уравнений // Вестник СамГУ. 2008. № 3(62). С. 165–174.

[15] Стригун М.В. Об одной нелокальной задаче с интегральными граничным условием для гиперболического уравнения // Вестник СамГУ. 2009. № 8(74). С. 78–87.

[16] Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D. On integral nonlocal boundary problems for some partial differential equations // Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences. 2011. Vol. 5. № 1. P. 31–37.

[17] Пулькина Л.С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода // Известия вузов. Сер.: Математика. 2012. № 4. С. 74—83.

[18] Пулькина Л.С. Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений. Самара: Изд-во "Самарский университет". 2012.

# References

[1] Kozhanov A.I., Pulkina L.S. O razreshimosti kraevykh zadach s nelokal'nym granichnym usloviem integral'nogo vida dlia mnogomernykh giperbolicheskikh uravnenii [On the Solvability of Boundary Value Problems with a Nonlocal Boundary Condition of Integral Form for Multidimentional Hyperbolic Equations]. *Differents. uravneniia* [Differential Equations], 2006, Vol. 42, no.9, pp. 1233–1246 [in Russian].

[2] Lions J.L. Nekotorye metody resheniia nelineinykh kraevykh zadach [Quelques methods de resolution des problems aux limites non lineares]. M.: Mir, 1972 [in Russian].

[3] Ladyzhenskaya O.A. Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki [Boundary-value problems of mathematical physics]. M.: Nauka, 1973, 407 p. [in Russian].

[4] Dmitriev V.B. Nelokal'naia zadacha s integral'nymi usloviiami dlia volnovogo uravneniia [Nonlocal problem with integral conditions for wave equation]. *Vestnik SamGU* [Vestnik of Samara State University], 2006, no. 2(42), pp. 15–27 [in Russian].

[5] Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Uravneniia matematicheskoi fiziki [Equations of Mathematical Physics]. M.: Nauka, 2004, 798 p. [in Russian].

[6] Fedotov I.A., Polyanin A.D., Shatalov M.Yu. Teoriia svobodnykh i vynuzhdennykh kolebanii tverdogo sterzhnia, osnovannaia na modeli Releia [Theory of free vibration of rigid rod based on Rayleigh model]. *DAN* [Proceedings of the USSR Academy of Sciences], 2007, Vol. 417, no. 1, pp. 56–61 [in Russian].

[7] Doronin G.G., Lar'kin N.A., Souza A.J. A hyperbolic problem with nonlinear second-order boundary damping. *EJDE*, 1998, no. 28, pp. 1–10 [in English].

[8] Korpusov M.O. Razrushenie v neklassicheskikh volnovykh uravneniiakh [Destruction in nonclassical wave equations]. M.: URSS, 2010, 237 p. [in Russian].

[9] Pulkina L. Solution to nonlocal problems of pseudohyperbolic equations. *EJDE*, 2014, no. 116, pp. 1–9 [in English].

[10] Ionkin N.I. Reshenie odnoi kraevoi zadachi teorii teploprovodnosti s neklassicheskim kraevym usloviem [Solution of a certain boundary value problem in heat conduction with nonclassical boundary condition]. *Differents. uravneniia* [Differential Equations], 1977, Vol. 13, no. 2, pp. 294–304 [in Russian].

[11] Skubachevskii A.L., Steblov G.M. O spektre differentsial'nykh operatorov s oblast'iu opredeleniia, ne plotnoi v $L_2(0,1)$ [On spectrum of differential operators with nondense in $L_2$ domain]. *DAN SSSR* [Proceedings of the USSR Academy of Sciences], 1991, Vol. 321, no. 6, pp. 1158–1163 [in Russian].

[12] Gordeziani D.G., Avalishvili G.A. [Solutions of Nonlocal Problems for One-dimensional Oscillations of the Medium]. *Matem. modelir.* [Mathematical Models and Computer Simulations], 2000, Vol. 12, no.1, pp. 94–103 [in Russian].

[13] Lazhetich N.L. O klassicheskoi razreshimosti smeshannoi zadachi dlia odnomernogo giperbolicheskogo uravneniia vtorogo poriadka [On classical solvability of a mixed problem for one-dimensional hyperbolic equation of the second order]. *Differents. uravneniia* [Differential Equations], 2006, 42(8), pp. 1072–1077 [in Russian].

[14] Kozhanov A.I. O razreshimosti nekotorykh prostranstvenno nelokal'nykh kraevykh zadach dlia lineinykh parabolicheskikh uravnenii [On solvability of some spacial nonlocal boundary problems for linear parabolic equations]. *Vestnik SamGU* [Vestnik of Samara State University], 2008. no. 3(62), pp. 165–174 [in Russian].

[15] Strigun M.V. Ob odnoi nelokal'noi zadache s integral'nymi granichnym usloviem dlia giperbolicheskogo uravneniia [On a certain nonlocal problem with integral boundary condition for a hyperbolic equation]. *Vestnik SamGU* [Vestnik of Samara State University], 2009, no. 8(74), pp. 78–87 [in Russian].

[16] Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D. On integral nonlocal boundary problems for some partial differential equations. *Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences*, 2011, Vol. 5, no. 1, pp. 31–37 [in Russian].

[17] Pulkina L.S. Kraevye zadachi dlia giperbolicheskogo uravneniia s nelokal'nymi usloviiami I i II roda [Boundary value problems for a hyperbolic equation with nonlocal conditions of the I and II kind]. *Izvestiia vuzov. Matematika* [Russian Mathematics (Iz.VUZ)], 2012, no. 4, pp. 74–83 [in Russian].

[17] Pulkina L.S. Zadachi s neklassicheskimi usloviiami dlia giperbolicheskikh uravnenii [Problems with nonclassical conditions for hyperbolic equations]. Samara: Izd-vo "Samarskii universitet", 2012.

***L.S. Pulkina, A.E. Savenkova***[2]

# A PROBLEM WITH SECOND KIND INTEGRAL CONDITIONS FOR HYPERBOLIC EQUATION

In this paper, we consider a problem for one-dimensional hyperbolic equation with second kind integral conditions and prove unique solvability. To prove this statement we suggest a new approach. The main idea of it is that given nonlocal integral condition is equivalent with a different condition, nonlocal as well but this new condition enables us to introduce a definition of a generalized solution bazed on an integral identity and derive a priori estimates of a required solution in Sobolev space. This approach shows that integral conditions are closely connected with dynamical conditions.

**Key words:** nonlocal problem, integral conditions, hyperbolic equation, generalized solution, dynamical conditions.

Статья поступила в редакцию 28/*III*/2016.
The article received 28/*III*/2016.

[2]*Pulkina Ludmila Stepanovna* (louise@samdiff.ru), Department of Equations of Mathematical Physics, Samara University, 34, Moskovskoye Shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

*Savenkova Alesya Evgen'evna* (alesya.savenkova@mail.ru), Department of General Mathematics and Informatics, Samara State Technical University, 244, Molodogvardeyskaya Street, Samara, 443100, Russian Federation.