УДК 517.95

А.В. Дюжева[1]

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ПО ВРЕМЕНИ УСЛОВИЕМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ И НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В статье рассмотрен вопрос о разрешимости обратной задачи восстановления правой части линейного гиперболического уравнения с условиями интегрального по времени переопределения. Граничные условия изучаемой задачи являются нелокальными и представляют собой условия смещения. Получены условия на входные данные, выполнение которых гарантирует существование единственного решения поставленной задачи.

Ключевые слова: обратная задача, нелокальные условия, интегральное переопределение, обобщенное решение, гиперболическое уравнение.

Введение

В области $Q_T = (0, l) \times (0, T)$, где $l, T < \infty$, для уравнения

$$u_{tt} - (a(x)u_x)_x + c(x,t)u = h(x)f(x,t) \tag{1}$$

поставим следующую задачу:

найти пару функций $(u(x,t), h(x))$, удовлетворяющих уравнению (1), начальным данным

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \tag{2}$$

граничным условиям

$$\begin{aligned} u_x(0,t) &= \alpha_1(t)u(0,t) + \beta_1(t)u(l,t), \\ u_x(l,t) &= \alpha_2(t)u(0,t) + \beta_2(t)u(l,t) \end{aligned} \tag{3}$$

и условию переопределения:

$$\int\limits_0^T K(t)u(x,t)dt = E(x). \tag{4}$$

Функции $a(x)$, $E(x)$, $c(x,t)$, $f(x,t)$, $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $K(t)$ заданы в областях $[0,l]$, $\overline{Q}_T$ и $[0,T]$ соответственно, кроме того, будем считать, что $0 < a_0 \leqslant a(x)$ всюду в $[0,l]$.

Дюжева Александра Владимировна (aduzheva@rambler.ru), кафедра математики и бизнес-информатики, Самарский университет, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Обратные задачи с интегральным условием переопределения для параболических уравнений изучались во многих работах. Отметим статьи [1; 4] и список литературы в них. Работ, посвященных исследованию разрешимости обратной задачи для гиперболического уравнения, существенно меньше. Отметим наиболее близкие к тематике данной статьи работы [3; 6; 10].

В предлагаемой статье рассматривается обратная задача с интегральным по времени условием переопределения и с нелокальными граничными условиями. Найдены условия на входные данные, обеспечивающие существование единственного решения поставленной задачи.

1. Формулировка основного результата

Введем понятие решения задачи (1)–(4).

Пусть $\int_0^T K(t)f(x,t)dt \neq 0 \ \forall x \in [0,l], \ K(T) = K'(T) = 0$

Тогда функцию $h(x)$, подлежащую определению, можно выразить через $u(x,t)$ и известные функции, входящие в уравнение (1) и условия (4), если считать их достаточно гладкими. А именно справедливо следующее соотношение:

$$h(x) = G^{-1}(x)[\int_0^T H(x,t)u(x,t)dt - (a(x)E'(x))'], \tag{5}$$

где обозначено

$$G(x) = \int_0^T K(x)f(x,t)dt, \quad H(x,t) = K''(x) + c(x,t)K(x).$$

Действительно, предполагая, что $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2), (4), умножим соотношение (1) на $K(t)$ и проинтегрируем по t от 0 до T. Получим

$$K(T)u_t(x,T) - K'(T)u(x,T)+$$
$$+\int_0^T (K''(t) + Kc)udt - (aE')' = h(x)\int_0^T K(x)f(x,t)dt.$$

Учитывая свойства функции $K(t)$, приходим к (5).

Обозначим $\hat{W}_2^1(Q_T) = \{v(x,t) : v(x,t) \in W_2^1(Q_T), v(x,T) = 0\}$. Пусть $v(x,t) \in \in \hat{W}_2^1(Q_T)$. Используя известную процедуру [5], выведем равенство

$$\int_0^T\int_0^l (-u_tv_t + a(x)u_xv_x + a_xu_xv + cuv)dxdt+$$
$$+\int_0^T a(0)v(0,t)[\alpha_1(t)u(0,t) + \beta_1(t)u(l,t)]dt-$$
$$-\int_0^T a(l)v(l,t)[\alpha_2(t)u(0,t) + \beta_2(t)u(l,t)]dt = \int_0^T\int_0^l hfvdxdt. \tag{6}$$

Определение. Обобщенным решением задачи (1)–(4) будем называть пару функций $(u(x,t),h(x))$ таких, что $u(x,0) = 0$, выполняется тождество (6) для всех функций $v(x,t) \in \hat{W}_2^1(Q_T)$, и справедливо (5), понимаемое как равенство в $L_2(0,l)$.

Основной результат работы состоит в доказательстве существования единственного обобщенного решения поставленной задачи.

Пусть выполняются следующие условия:

(i) $c \in C(\overline{Q}_T), \ f \in C(\overline{Q}_T), \ a \in C[0,l], \ E \in C^2[0,l];$

(ii) $\alpha_i,\ \ \beta_i \in C^1[0,T], a(0)\beta_1(t) + a(l)\alpha_2(t) = 0,$
$\alpha_1(t)\beta_2(t) + \alpha_2(t)\beta_1(t) \geqslant 0,\ \ \alpha_1'(t)\beta_2'(t) + \alpha_2'(t)\beta_1'(t) \geqslant 0,$
(iii) $K \in C^2[0,T],\ \int_0^T K(t)f(x,t)dt \neq 0\ \ \forall x \in [0,l],\ K(T) = K'(T) = 0.$ Заметим, что при выполнении этих условий найдутся числа $c_0 > 0,\ A > 0,\ \gamma > 0$ такие, что

$$\max_{\bar{Q}_T} |c(x,t)| \leqslant c_0,\ \ \max_{\bar{Q}_T} |f(x,t)| \leqslant \gamma,$$

$$\max_{[0,T], i=1,2} |\alpha_i(t),\ \ \alpha_i'(t),\ \ \beta_i(t),\ \ \beta_i'(t)| \leqslant A.$$

Введем еще некоторые обозначения.

$$B = \max_{\bar{Q}_T} |H(x,t)|,\ \ c_1 = \max\{c_0, A\},\ \ m_0 = \min\{a_0, 1\},\ \ c = c_1/m_0.$$

Теорема. Пусть выполняются условия (i)–(iii) и справедливы следующие соотношения:

$$G^2(x) \geqslant G_0 > 0,\ \ \gamma B \frac{e^{cT} - 1}{cG_0} < 1.$$

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1)–(4).

2. Доказательство теоремы

Доказательство проведем по следующей схеме: сначало построим последовательность приближенных решений, затем покажем, что последовательность сходится в $W_2^1(Q_T)$. И на заключительном этапе покажем, что ее предел и есть искомое решение.

Будем искать приближенное решение задачи (1)–(4) из соотношений

$$\int_0^T \int_0^l (-u_t^n v_t + a u_x^n v_x + a_x u_x^n v + c u^n v) dx dt +$$
$$+ \int_0^T a(0) v(0,t)[\alpha_1(t) u^n(0,t) + \beta_1(t) u^n(l,t)] dt -$$
$$- \int_0^T a(l) v(l,t)[\alpha_2(t) u^n(0,t) + \beta_2(t) u^n(l,t)] dt = \int_0^T \int_0^l h^n f v dx dt, \tag{7}$$

$$h^n = (G(x))^{-1}[\int_0^T H u^{n-1} dt - (aE')']. \tag{8}$$

Положим $u^0(x,t) = 0$. Тогда из (8) найдем $h^1(x) = -(a(x)E'(x))'G(x)$ и подставим ее в (7) для $n = 1$.

Заметим, что полученное для $n = 1$ равенство (7) представляет собой тождество, с помощью которого определено обобщенное решение задачи (1)–(3) в случае известной правой части.

В [11] было доказано существование единственного обобщенного решения $u(x,t) \in W_2^1(Q_T)$ этой задачи. Следовательно, найдено $u^1(x,t)$. На следующим шаге найдем $h^2(x)$ и продолжим процесс для $n = 2, ...$

Заметим, что в силу условий теоремы каждый раз $h^n(x) f(x,t) \in L_2(Q_T)$.

В результате этих действий мы получим последовательность приближенных решений $\{u^n(x,t), h^n(x)\}$.

Покажем, что $u^n \to u,\ h^n \to h$ при $n \to \infty$ в $W_2^1(Q_T)$ и $L_2(0,l)$ соответственно.

Обозначим:

$$z^n = u^n - u^{n-1},\ \ r^n = h^n - h^{n-1}.$$

Тогда справедливо соотношение:

$$\int_0^T \int_0^l (-z_t^n v_t + a z_x^n v_x + a_x z_x^n v + c z^n v) dx dt +$$
$$+ \int_0^T a(0) v(0,t) [\alpha_1(t) z^n(0,t) + \beta_1(t) z^n(l,t)] dt - \tag{9}$$
$$- \int_0^T a(l) v(l,t) [\alpha_2(t) z^n(0,t) + \beta_2(t) z^n(l,t)] dt = \int_0^T \int_0^l r^n f v dx dt,$$

$$r^n = G^{-1} [\int_0^T H z^{m-1} dt]. \tag{10}$$

Равенство (9) можно трактовать как тождество, определяющее обобщенное решение задачи (1)–(3) для уравнения (1) с правой частью $r^n f$. Как было замечено, эта задача однозначно разрешима и справедлива оценка [11]:

$$||z^n||^2_{W_2^1(Q_T)} \leqslant \frac{e^{cT} - 1}{c} ||r^n f||_{L_2(0,l)} \leqslant \gamma \frac{e^{cT} - 1}{c} ||h^n||^2_{L_2(0,l)}. \tag{11}$$

Из (10) с учетом условий теоремы следует неравенство

$$||r^n||^2_{L_2(0,T)} \leqslant \frac{B}{G_0} ||z^{n-1}||^2_{L_2(Q_T)} \leqslant \frac{B}{G_0} ||z^{n-1}||^2_{W_2^1(Q_T)}.$$

Тогда из (11)

$$||z^n||^2_{W_2^1(Q_T)} \leqslant \gamma B \frac{e^{cT} - 1}{c G_0} ||z^{n-1}||_{W_2^1(Q_T)}. \tag{12}$$

Так как по условию $\gamma B \frac{e^{cT}-1}{cG_0} < 1$, то в силу признака Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} ||z^n||$ сходится равномерно.

Для r^n получим

$$||r^n||^2_{L_2(0,T)} \leqslant \frac{B}{G_0} \frac{e^{cT} - 1}{c} ||r^{n-1}||^2_{L_2(0,l)}.$$

Таким образом, в силу признака Даламбера ряд $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ также сходится равномерно.

Заметим, что u^n, h^n являются частичными суммами этих рядов, и, стало быть, последовательности $\{u^n\}$, $\{h^n\}$ сходятся соответственно в $W_2^1(Q_T)$ и $L_2(0,T)$ к u, h.

Переходя к пределу в (7)–(8), убеждаемся в существовании обобщенного решения задачи. Единственность решения следует из полученных оценок и доказанной в [11] единственности решения прямой задачи.

Литература

[1] Cannon J.R., Yanping Lin An Inverse of Finding a Parameter in a Semi-Linear Heat Equation // Journal of mathematical analysis and applicatijns.1990. № 145. P. 470–484.

[2] Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. М: Из-во иностр. лит., 1961, 120 с.

[3] Денисов А.М. Обратная задача для гиперболического уравнения с нелокальным краевым условием, содержащим запаздывающий аргумент // Труды Института математики и механики УрОРАН. 2012. Т. 18. № 1.

[4] Камынин В.Л. Об обратной задаче определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения // Мат. заметки. 2013. Т. 94. Вып. 2.

[5] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.

[6] Павлов С.С. Нелинейные обратные задачи для многомерных гиперболических уравнений с интегральным переопределением // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18. Вып. 2.

[7] Павлов С.С. Обратная задача восстановления внешнего воздействия в многомерном волновом уравнении с интегральным переопределением // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18. Вып. 1.

[8] Сафиуллова Р.Р. Обратная задача с неизвестным составным внешним воздействием при составном переопределении // Мат. заметки ЯГУ. 2006. Т. 13. Вып. 2.

[9] Савенкова А.Е. Обратная задача с интегральным условием переопределения для гиперболического уравнения // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2014. № 3(114). С. 83–92.

[10] Сафиуллова Р.Р. Линейная обратная задача для гиперболического уравнения с неизвестной правой частью специального вида // Мат. заметки ЯГУ. 2008. Т. 15. № 2, С. 48–69.

[11] Пулькина Л.С., Дюжева А.В. Нелокальная задача с переменными по времени краевыми условиями Стеклова для гиперболического уравнения // Вестник СамГУ. 2010. № 4(78). С. 56–64.

References

[1] Cannon J.R., Yanping Lin. An Inverse of Finding a Parameter in a Semi-Linear Heat Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applicatijns*, 145, 1990, pp. 470–484 [in English].

[2] Gording L. Zadacha Koshi dlia giperbolicheskikh uravnenii [Cauchy problem for hyperbolic equations]. M: Iz-vo inostrannoi literatury, 1961, 120 p. [in Russian].

[3] Denisov A.M. Obratnaia zadacha dlia giperbolicheskogo uravneniia s nelokal'nym kraevym usloviem, soderzhashchim zapazdyvaiushchii argument [Inverse problem for hyperbolic equation with non-local boundary condition, containing retarded argument]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki UrORAN* [Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences], 2012, Vol.18, no.1 [in Russian].

[4] Kamynin V.L. Ob obratnoi zadache opredeleniia mladshego koeffitsienta v parabolicheskom uravnenii pri uslovii integral'nogo nabliudeniia [On inverse problem of definition of lower coefficient in the parabolic equation on condition of integrated supervision]. *Mat.zametki* [Mathematical Notes], 2013, Vol. 94, Issue 2.

[5] Ladyzhenskaya O.A. Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki [Boundary value problems of mathematical physics]. M.: Nauka, 1973, 407 p. [in Russian].

[6] Pavlov S.S. Nelineinye obratnye zadachi dlia mnogomernykh giperbolicheskikh uravnenii s integral'nym pereopredeleniem [Nonlinear inverse problems for multidimensional hyperbolic equations with integrated overdetermination]. *Matematicheskie Zametki YaGU* [Mathematical Notes of Yakutsk State University], 2011, Vol. 18, Issue 2 [in Russian].

[7] Pavlov S.S. Obratnaia zadacha vosstanovleniia vneshnego vozdeistviia v mnogomernom volnovom uravnenii s integral'nym pereopredeleniem [Inverse problem of reconstruction of external action]. *Matematicheskie Zametki YaGU* [Mathematical Notes of Yakutsk State University], 2011, Vol.18, Issue 1 [in Russian].

[8] Safiulova R.R. Obratnaia zadacha s neizvestnym sostavnym vneshnim vozdeistviem pri sostavnom pereopredelenii [Inverse problem with unknown complex external action]. *Matematicheskie Zametki YaGU* [Mathematical Notes of Yakutsk State University], 2006, Vol. 13. Issue 2 [in Russian].

[9] Savenkova A.E. Obratnaia zadacha s integral'nym usloviem pereopredeleniia dlia giperbolicheskogo uravneniia [Inverse problem with integral condition of overdetermination for a hyperbolic equation]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik of SamSU. Natural Science Series], 2014, no. 3(114), pp. 83–92 [in Russian].

[10] Safiulova R.R. Lineinaia obratnaia zadacha dlia giperbolicheskogo uravneniia s neizvestnoi pravoi chast'iu spetsial'nogo vida [Linear inverse problem for hyperbolic equation with unknown right member of a special form]. *Matematicheskie Zametki YaGU* [Mathematical Notes of Yakutsk State University], Vol. 15, 2008, no. 2, pp. 48–69 [in Russian].

[11] Pulkina L.S., Duzheva A.V. Nelokal'naia zadacha s peremennymi po vremeni kraevymi usloviiami Steklova dlia giperbolicheskogo uravneniia [Nonlocal problem for] Нелокальная задача с переменными по времени краевыми условиями Стеклова для гиперболического уравнения // Вестник СамГУ, 2010, № 4(78), С. 56–64.

***A.V. Duzheva*[2]**

INVERSE PROBLEM WITH INTEGRAL IN TIME OVERDETERMINATION AND NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS FOR HYPERBOLIC EQUATION

In this article, we consider a question of sovability of an inverse problem for a linear hyprbolic equation. Properties of the solution of an associated nonlocal initial-boundary problem with displacement in boundary conditions are used to develop an existence result for the identification of the unknown source. Overdetermination is represented as integral with respect to time-variable.

Key words: inverse problem, nonlocal conditions, integral overdetermination, generalized solution, hyperbolic equation.

Статья поступила в редакцию 28/*I*/2016.
The article received 28/*I*/2016.

[2] *Duzheva Alexandra Vladimirovna* (aduzheva@rambler.ru), Department of Mathematics and Business Informatics, Samara University, 34, Moskovskoye Shosse, Samara, 443086, Russian Federation.