УДК 511.334

Г.В. Воскресенская[1]

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ФОРМЫ С ХАРАКТЕРАМИ УРОВНЯ P[2]

В статье доказываются структурные теоремы для пространств параболических форм с характерами уровня p. Пространства разлагаются в прямую сумму трех подпространств, причем первое подпространство является существенным. Важную роль в исследованиях играют эта-частные. У этих функций дивизор сосредоточен в параболических вершинах. Также доказана теорема о структуре пространств модулярных форм с характерами. Обсуждается вопрос о порождающей системе этих пространств и проблема К. Оно. Размерности пространств вычисляются по формуле Коэна — Остерле, порядки модулярных форм в параболических вершинах — по формуле Биаджиоли.

Ключевые слова: модулярные формы, параболические формы, эта-функция Дедекинда, параболические вершины, ряды Эйзенштейна, дивизор функции, структурные теоремы, формула Коэна — Остерле.

Введение

Изучение структур пространств модулярных форм является интересной и актуальной темой. Классические обозначения и факты, используемые в статье, можно найти в монографиях [1–3], также доказываются структурные теоремы для пространств параболических форм с характерами нечетного простого уровня p. Эти исследования являются продолжением работ автора [4; 5]. Мы будем использовать свойства функций специального вида, которые называются эта-частными. Их определение и основные свойства содержатся в статьях [6–8]. Размерности пространств вычисляются по формуле Коэна — Остерле [9], порядки модулярных форм в параболических вершинах — по формуле Биаджиоли [10].

Теорема 1 в статье цитируется, теоремы 2–4 являются новыми.

1. Предварительные сведения

В этом пункте мы приведем основные формулы, на которых основаны доказательства.

2.1 Размерности.

Для доказательства нам понадобятся размерности пространств

Воскресенская Галина Валентиновна (galvosk@mail.ru), кафедра алгебры и геометрии, Самарский университет, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

[2]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 16-01-00154А.

$S_k(\Gamma_0(p),\chi)$, $S_k(\Gamma_0(p))$, $M_k(\Gamma_0(p),\chi)$, $M_k(\Gamma_0(p))$. Вычислять будем по формуле Коэна — Остерле.

Мы используем обозначения:

$$D_{1,\chi} = \sum_{x:x^2+1\equiv 0(N)} \chi(x), \qquad D_{1,\chi_0} = D_1, \qquad D_{2,\chi} = \sum_{x:x^2+x+1\equiv 0(N)} \chi(x), \qquad D_{2,\chi_0} = D_2.$$

$$\nu_k = \begin{cases} 0, & k \equiv 1 \ (mod\ 2), \\ -\frac{1}{4}, & k \equiv 2 \ (mod\ 4), \\ \frac{1}{4}, & k \equiv 0 \ (mod\ 4) \end{cases}$$

$$\mu_k = \begin{cases} 0, & k \equiv 1 \ (mod\ 3), \\ -\frac{1}{3}, & k \equiv 2 \ (mod\ 3), \\ \frac{1}{3}, & k \equiv 0 \ (mod\ 3) \end{cases}$$

Теорема 1.

Пусть k — натуральное число,

$\chi(d) = \left(\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}{d}\right)$ — *характер Дирихле. Тогда*

$$dim_{\mathbf{C}} S_k(\Gamma_0(p),\chi) = \frac{(k-1)(p+1)}{12} - 1 + \ \nu_k D_{1,\chi} + \mu_k D_{2,\chi};$$

$$dim_{\mathbf{C}} S_k(\Gamma_0(p)) = \frac{(k-1)(p+1)}{12} - 1 + \ \nu_k D_1 + \mu_k D_2;$$

$$dim_{\mathbf{C}} M_k(\Gamma_0(p),\chi) = \frac{(k-1)(p+1)}{12} + 1 - \ \nu_{2-k} D_1 - \mu_{2-k} D_2;$$

$$dim_{\mathbf{C}} M_k(\Gamma_0(p)) = \frac{(k-1)(p+1)}{12} + 1 - \ \nu_{2-k} D_1 - \mu_{2-k} D_2;$$

$$dim_{\mathbf{C}} S_2(\Gamma_0(p)) = \frac{(p+1)}{12} - \frac{1}{4}D_1 - \frac{1}{3}D_2.$$

Эта теорема получается из общей формулы Коэна — Остерле при $N = p$.

2.2. Порядки в параболических вершинах.

Относительно группы $\Gamma_0(p)$ существуют два класса неэквивалентных параболических вершин: 0 и ∞.

Если

$$f(z) = \prod_{j=1}^{s} \eta^{t_j}(a_j z), \quad a_j \in \mathbf{N},\ t_j \in \mathbf{Z},$$

то ее порядок в ∞ равен

$$ord_\infty(f) = \frac{1}{24}\sum_{j=1}^{s} a_j \cdot t_j.$$

Используя формулу Биаджиоли, получим

$$ord_0(f) = \frac{1}{24}\sum_{j=1}^{s} \frac{p\cdot t_j}{a_j}.$$

2. Рассечение функцией с характером

В этом параграфе мы докажем структурную теорему для случая, когда рассекающая функция имеет нетривиальный характер.

Теорема 2.

Пусть k — натуральное нечетное число,
$p = 7 + 24m, \quad \chi(d) = \left(\frac{-p}{d}\right)$ *— характер Дирихле. Тогда*

$$S_k(\Gamma_0(p),\chi) = \eta^{\frac{p-1}{2}}(pz)\eta^{\frac{p-1}{2}}(z)M_{k-\frac{p-1}{2}}(\Gamma_0(p)) \oplus < \eta^{\frac{p-1}{2}}(pz)\eta^{\frac{p-1}{2}}(z) >^{\perp} \cdot G(z) \oplus$$

$$\oplus S_2(\Gamma_0(p))(\eta^p(pz)\eta^{-1}(z) + \eta^{-1}(pz)\eta^p(z))H(z).$$

Функции $G(z)$ и $H(z)$ выписаны в табл. 1.

Таблица 1

k	$G(z)$	$H(z)$
$1+6l$	$E_4 \cdot E_6^{l-1-2m}$	$E_4^2 \cdot E_6^{l-2-2m}$
$3+6l$	E_6^{l-2m}	$E_4 \cdot E_6^{l-1-2m}$
$5+6l$	$E_4^2 \cdot E_6^{l-1-2m}$	E_6^{l-2m}

Пространство $< \eta^{\frac{p-1}{2}}(pz)\eta^{\frac{p-1}{2}}(z) >^{\perp}$ — ортогональное дополнение к функции $\eta^{\frac{p-1}{2}}(pz)\eta^{\frac{p-1}{2}}(z)$ в пространстве $S_{\frac{p-1}{2}}(\Gamma_0(p),\chi)$.

Доказательство.

В этом случае $D_1 = D_{1,\chi} = 0$.

Покажем, что в этом случае $D_2 = D_{2,\chi} = 2$.

Действительно, пусть $a^2 + a + 1 \equiv 0(p)$. Тогда $a^3 = 1,\ a \neq 1$. Если $\chi(a) = -1$, то $\chi(a^3) = -1$, но $\chi(1) = 1$. Значит, $\chi(a) = 1$ и $D_{2,\chi} = 2$.

Разберем подробно случай $k = 3 + 6l$. Два оставшихся случая доказываются аналогично.

$\mu = \frac{1}{3}, \quad \mu_{2-k} = -\frac{1}{3}$.

Введем обозначения:

$W = S_k(\Gamma_0(p),\chi)$,

$W_1 = \eta^{\frac{p-1}{2}}(pz)\eta^{\frac{p-1}{2}}(z) \cdot M_{k-\frac{p-1}{2}}(\Gamma_0(p))$,

$W_2 =< \eta^{\frac{p-1}{2}}(pz)\eta^{\frac{p-1}{2}}(z) >^{\perp} \cdot E_6^{l-2m}$,

$W_3 = S_2(\Gamma_0(p)) \cdot (\eta^p(pz)\eta^{-1}(z) + \eta^{-1}(pz)\eta^p(z) \cdot E_4 \cdot E_6^{l-1-2m}$.

1. Докажем сначала, что сумма размерностей пространств справа равна сумме размерностей пространств слева. Используя формулы из пункта 2, получим

$dim\ W = \frac{(k-1)(p+1)}{12} - \frac{1}{3}$,

$dim\ W_1 = \frac{(k-\frac{p+1}{2})(p+1)}{12} + \frac{5}{3}$,

$dim\ W_2 = \frac{(\frac{p-3}{2})(p+1)}{12} - \frac{4}{3}$,

$dim\ W_3 = \frac{p+1}{12} - \frac{2}{3}$.

Вычислим сумму:

$$dim\ W_1 + dim\ W_2 + dim\ W_3 = \frac{(p+1)(k - \frac{p+1}{2} + \frac{p-3}{2} + 1)}{12} + \frac{5}{3} - \frac{4}{3} - \frac{2}{3} =$$

$$= \frac{(p+1)(k-1)}{12} - \frac{1}{3} = dim\ W.$$

2. Докажем, что $W \cong W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$.

Пусть $f_1(z) = \eta^{\frac{p-1}{2}}(pz)\eta^{\frac{p-1}{2}}(z)$. Тогда $ord_\infty(f_1) = ord_0(f_1) = \frac{p^2-1}{48}$.

Сначала покажем, что пространство W_j имеет попарные нулевые пересечения. Этот результат имеет самостоятельное значение.

Докажем, что $W_1 \cap W_2 = 0$.

Дивизор функции$f_1(z)$ сосредоточен в параболических вершинах.

Пусть $f_1(z)h_1(z) = g(z)E_6^{l-2m}(z)$. Тогда в любой параболической вершине s $ord_s(g(z)) \geqslant ord_s(f_1(z))$, так как $E_6^{l-2m}(z)$ не имеет нулей в параболических вершинах. Тогда $\frac{g(z)}{f_1(z)} \in M_0(\Gamma_0(p))$, то есть $g(z) = cf_1(z)$, а это неверно.

Докажем, что $W_2 \cap W_3 = 0$.

Обозначим $f_2 = \eta^p(pz)\eta^{-1}(z) + \eta^{-1}(pz)\eta^p(z)$.

Пусть $g(z) \cdot E_6^{l-2m}(z) = h(z)f_2(z) \cdot E_4(z)E_6^{l-1-2m}(z)$,

$g(z) \cdot E_6(z) = h(z)f_2(z) \cdot E_4(z)$.

Так как $E_6(i) = 0$, $\quad E_4(i) \neq 0$, то $h(i) = 0$.

Функция $h(z)$ имеет вес 2, получаем $\frac{(h(z)^3}{E_6(z)} = Const$.

Отсюда следует, что $E_6(z)$ является параболической формой, а это неверно. Получено противоречие.

Докажем, что $W_1 \cap W_3 = 0$.

Пусть $f_1(z)h_1(z) = h(z)f_2(z)E_4(z)E_6^{l-1-2m}(z)$.

Так как функция $f_2(z)E_4(z)E_6^{l-1-2m}(z)$ не имеет нулей в параболических вершинах, то в любой параболической вершине $ord_s h(z) \geqslant ord_s f_1(z)$. Дивизор $f_1(z)$ сосредоточен в параболических вершинах, но $deg(div h(z)) < deg(div f_1(z))$, так как уровни у них одинаковы, а вес у функции $h(z)$ меньше. Получено противоречие.

Для корректного завершения доказательства достаточно показать,

что $W_1 \cap (W_2 \oplus W_3) = \{0\}$.

Пусть $f(z) \in W_1$, порядки $f(z)$ в параболических вершинах равны и максимальны для функций из этого пространства. Пусть $g(z) \in W_2 \oplus W_3$, тогда $g(z) = g_2(z) + g_3(z)$, $g_2(z) \in W_2$, $g_3(z) \in W_3$.

Существует параболическая вершина s такая, что $ord_s f(z) > ord_s g_2(z)$,

так как функция $G(z)$ не имеет нулей в параболических вершинах.

Так как $ord_s g(z) = min\{ord_s g_2(z),\ ord_s g_3(z)\}$.

Следовательно, $ord_s f(z) > ord_s g(z)$.

Значит, равенство этих функций невозможно.

Теорема доказана.

Аналогичные теоремы можно получить для $p \equiv 11(24)$ и $p \equiv 23(24)$.

Для $p \equiv 1(4)$ нельзя выбрать эта-произведение $\eta^{l_1}(pz)\eta^{l_2}(z)$ с характером $(\frac{-p}{d})$, то есть нечетного веса. Действительно, $l_1 + l_2 = 2 + 4l$, $l_1 p + l_2 = 24m$. Получим $l_1(p-1) = 2 + 4\alpha$. Но $4|p-1$. Получено противоречие. Однако при $p \equiv 1(4)$ можно рассматривать пространства четного веса с нетривиальными характерами, что мы увидим в примере 3 и в параграфе 4.

3. Важные примеры

Мы разберем три примера: в первом обсуждается уровень 3, второй пример иллюстрирует материал этого параграфа, пример 3 содержит идеи, которые используются в следующем параграфе.

Пример 1.

Для уровня 3 имеет место точное рассечение

$$S_k(\Gamma_0(3),(\frac{-3}{p}))=\eta^6(3z)\eta^6(z)\cdot M_{k-6}(\Gamma_0(3),(\frac{-3}{p})),\qquad k\geqslant 6.$$

Для меньших весов эти пространства нулевые. Особенно интересен случай, когда вес делится на 3, в этом случае каждая параболическая форма является однородным многочленом от функций $\eta^9(3z)\eta^{-3}(z), \quad \eta^{-3}(3z)\eta^9(z)$.

Пример 2.

Пусть $p=7, \quad k$ — нечетное число.

В этом случае рассекающая функция $\eta^3(7z)\eta^3(z)$ является мультипликативным эта-произведением, ее порядки в ∞ и 0 равны 1. Характер $\chi(d)=(\frac{-7}{d})=(\frac{d}{7})$. Имеем точное рассечение

$$S_k(\Gamma_0(7),\chi)=\eta^3(7z)\eta^3(z)M_{k-3}(\Gamma_0(7)).$$

Обозначим:

$f_1(z)=\eta^3(7z)\eta^3(z); \quad f_2(z)=\eta^7(7z)\eta^{-1}(z); \quad f_3(z)=\eta^{-1}(7z)\eta^7(z)$.

Эти функции образуют базис в $M_3(\Gamma_0(7),\chi(d))$. Первая функция является произведением второй и третьей.

По индукции получается, что $S_k(\Gamma_0(7),\chi(d))$ порождается функциями $f_2(z)$ и $f_3(z)$, которые являются эта-частными. Это дает пример к проблеме Кена Оно — проблеме нахождения всех пространств, порожденных эта-частными.

Пример 3.

Пусть $p=5, \quad k$ — четное число, характер $\chi(d)=(\frac{5}{d})$.

Рассекающая функция $\eta^4(5z)\eta^4(z)$ также является мультипликативным эта-произведением, ее порядки в каждой параболической вершине равны 1.

Имеем точное рассечение

$$S_k(\Gamma_0(5),\chi)=\eta^4(5z)\eta^4(z)\cdot M_{k-4}(\Gamma_0(5),\chi),\qquad k\geqslant 6.$$

Обозначим:

$f_1(z)=\eta^5(5z)\eta^{-1}(z)$;

$f_2(z)=\eta^{-1}(5z)\eta^5(z)$.

Эти функции образуют базис пространства $M_2(\Gamma_0(5),\chi)$.

Если $k\equiv 2(4), \quad k\geqslant 6$, то любой элемент из $M_k(\Gamma_0(5),\chi)$ является однородным многочленом от $f_1(z)$ и $f_2(z)$, что дает пример к проблеме Кена Оно.

Базис пространства $M_k(\Gamma_0(5))$ при $k\equiv 0(4)$ уже не может быть выписан с помощью эта-частных.

4. Общие теоремы

В этом параграфе мы докажем две общие теоремы. В первой из них рассматриваются пространства четного или нечетного веса в зависимости от вычета простого числа $p>2$ по модулю 4 : $k\equiv\frac{p-1}{2}(4), \ k>p-1$. Возникающие при описании структуры этих пространств функции $G(z)$ и $H(z)$ зависят от веса и уровня, возникает 18 значений, которые приведены в табл. 2.

Пусть $f_1(z) = \eta^{p-1}(pz)\eta^{p-1}(z)$, $f_2(z) = \eta^p(pz)\eta^{-1}(z) + \eta^p(z)\eta^{-1}(pz)$, $\chi(d) = (\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot p}{d})$.

Теорема 3.

Справедливо разложение:

$$S_k(\Gamma_0(p), \chi) = f_1(z)M_{k-p+1}(\Gamma_0(p), \chi) \oplus < f_1 >^{\perp} \cdot f_2(z)G(z) \oplus$$
$$\oplus S_2(\Gamma_0(p)) \cdot f_2(z) \cdot H(z).$$

Пространство $< f_1 >^{\perp}$ *— ортогональное дополнение к функции* $f_1(z)$ *в пространстве* $S_{p-1}(\Gamma_0(p))$*. Функции* $G(z)$ *и* $H(z)$ *выписаны в табл. 2.*

Таблица 2

p	$\chi(p)$	k	$G(z)$	$H(z)$
$p = 5 + 24m$	$(\frac{p}{d})$	$k = 2 + 4l$	E_4^{l-1-9m}	$E_4^{l-2-3m} \cdot E_6$
$p = 5 + 24m$	$(\frac{p}{d})$	$k = 4l$	$E_4^{l-3-9m} \cdot E_6$	E_4^{l-1-3m}
$p = 13 + 24m$	$(\frac{p}{d})$	$k = 2 + 4l$	E_4^{l-4-9m}	$E_4^{l-3-4m} \cdot E_6$
$p = 13 + 24m$	$(\frac{p}{d})$	$k = 4l$	$E_4^{l-6-9m} \cdot E_6$	E_4^{l-2-3m}
$p = 17 + 24m$	$(\frac{p}{d})$	$k = 2 + 4l$	$E_4^{l-7-9m} \cdot E_6$	E_4^{l-2-3m}
$p = 17 + 24m$	$(\frac{p}{d})$	$k = 4l$	E_4^{l-6-9m}	$E_4^{l-4-3m} \cdot E_6$
$p = 7 + 24m$	$(\frac{-p}{d})$	$k = 1 + 6l$	$E_4 \cdot E_6^{l-2-6m}$	$E_4^2 \cdot E_6^{l-2-2m}$
$p = 7 + 24m$	$(\frac{-p}{d})$	$k = 3 + 6l$	E_6^{l-1-6m}	$E_4 \cdot E_6^{l-1-2m}$
$p = 7 + 24m$	$(\frac{-p}{d})$	$k = 5 + 6l$	$E_4^2 \cdot E_6^{l-2-6m}$	E_6^{l-2m}
$p = 11 + 24m$	$(\frac{-p}{d})$	$k = 1 + 6l$	$E_4 \cdot E_6^{l-3-6m}$	E_6^{l-1-2m}
$p = 11 + 24m$	$(\frac{-p}{d})$	$k = 3 + 6l$	E_6^{l-2-6m}	$E_4^2 \cdot E_6^{l-2-2m}$
$p = 11 + 24m$	$(\frac{-p}{d})$	$k = 5 + 6l$	$E_4^2 \cdot E_6^{l-3-6m}$	$E_4 \cdot E_6^{l-1-2m}$
$p = 19 + 24m$	$(\frac{-p}{d})$	$k = 1 + 6l$	$E_4 \cdot E_6^{l-5-6m}$	$E_4^2 \cdot E_6^{l-3-2m}$
$p = 19 + 24m$	$(\frac{-p}{d})$	$k = 3 + 6l$	E_6^{l-4-6m}	$E_4 \cdot E_6^{l-2-2m}$
$p = 19 + 24m$	$(\frac{-p}{d})$	$k = 5 + 6l$	$E_4^2 \cdot E_6^{l-5-6m}$	E_6^{l-1-2m}
$p = 23 + 24m$	$(\frac{-p}{d})$	$k = 1 + 6l$	$E_4 \cdot E_6^{l-6-3m}$	E_6^{l-2-2m}
$p = 23 + 24m$	$(\frac{-p}{d})$	$k = 3 + 6l$	E_6^{l-5-6m}	$E_4^2 \cdot E_6^{l-3-2m}$
$p = 23 + 24m$	$(\frac{-p}{d})$	$k = 5 + 6l$	$E_4^2 \cdot E_6^{l-6-6m}$	$E_4 \cdot E_6^{l-2-2m}$

Доказательство.

Обозначим:
$W = S_k(\Gamma_0(p), \chi)$,
$W_1 = f_1(z)M_{k-p+1}(\Gamma_0(p), \chi)$,
$W_2 =< f_1 >^{\perp} \cdot f_2(z)G(z)$,
$W_3 = S_2(\Gamma_0(p))f_2(z)H(z)$.

1. Докажем сначала, что сумма размерностей пространств справа равна сумме размерностей пространств слева. Используем формулы из пункта 2.

Узнаем, к чему сводится равенство $dim\ W_1 + dim\ W_2 + dim\ W_3 = dim\ W$.

$$\frac{(k-p)(p+1)}{12} + 1 - \nu_{1-k+p} \cdot D_{1,\chi} - \mu_{1-k+p} \cdot D_{2,\chi} + \frac{(p-2)(p+1)}{12} - 1 +$$
$$+ \nu_{p-1} \cdot D_1 + \mu_{p-1} \cdot D_2 - 1 + \frac{p+1}{12} - \frac{1}{4} \cdot D_1 - \frac{1}{3} \cdot D_2 =$$
$$= \frac{(k-1)(p+1)}{12} + \nu_k \cdot D_{1,\chi} + \mu_k \cdot D_{2,\chi}.$$

Это эквивалентно равенству

$$(*)(\nu_k + \nu_{1-k+p})D_{1,\chi} + (\mu_k + \mu_{1-k+p})D_{2,\chi} + (\frac{1}{4} - \nu_{p-1})D_1 + (\frac{1}{3} - \mu_{p-1})D_2 = 0.$$

При $p \equiv 11(24)$, $p \equiv 23(24)$ значения $D_1 = D_{1,\chi} = D_2 = D_{2,\chi} = 0$.

При $p \equiv 5(24)$, $p \equiv 17(24)$ значения $D_2 = D_{2,\chi} = 0$.

В соотношении (*) осталось проверить два равенства $\frac{1}{4} - \nu_{p-1} = 0$, $\nu_{2-k} = -\nu_k$. Эти равенства верны при данных p и любых k.

При $p \equiv 7(24)$, $p \equiv 19(24)$ значения $D_1 = D_{1,\chi} = 0$.

В соотношении (*) осталось проверить два равенства $\frac{1}{4} - \nu_{p-1} = 0$, $\mu_{2-k} = -\mu_k$. Эти равенства верны при данных p и любых k.

При $p \equiv 13(24)$ надо вычислить все выражение (*) без сокращений, но значения во всех четырех скобках равны 0.

2. Докажем, что $W \cong W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$. .

Заметим, что $ord_\infty(f_1) = ord_0(f_1) = \frac{p^2-1}{24}$.

Доказательство в каждом из 18 возможных случаев непринципально отличается в деталях. Мы разберем случай 1, остальные случаи разбираются аналогично.

Докажем, что $W_1 \cap W_2 = 0$.

Дивизор функции$f_1(z)$ сосредоточен в параболических вершинах.

Пусть $f_1(z)h_1(z) = g(z)E_4^{l-1-9m}(z)$. Тогда в любой параболической вершине $ord_s(g(z)) \geqslant ord_s(f_1(z))$, так как E_4^{l-1-9m} не имеет нулей в параболических вершинах.

Тогда $\frac{g(z)}{f_1(z)} \in M_0(\Gamma_0(p))$, то есть $g(z) = cf_1(z)$, а это неверно.

Докажем, что $W_2 \cap W_3 = 0$.

Пусть $g(z) \cdot f_2(z) \cdot E_4^{l-1-9m}(z) = h(z) \cdot E_4^{l-2-3m}(z) \cdot E_6$.

Это эквивалентно выражению

$g(z)E_4(z) = h(z)E_6^{4m+1}$.

Так как $E_4(\omega) = 0$, $E_6(\omega) \neq 0$, то $h(\omega) = 0$.

Функция $h(z)$ имеет вес 2, $\frac{(h(z)^2}{E_4(z)} = Const$.

Отсюда следует, что $E_4(z)$ является параболической формой, а это неверно. Получено противоречие.

Докажем, что $W_1 \cap W_3 = 0$.

Пусть $f_1(z)h_1(z) = h(z)f_2(z) \cdot E_4^2 \cdot E_6^{l-2-2m}$.

Так как функция $f_2(z)E_4^2 \cdot E_6^{l-2-2m}$ не имеет нулей в параболических вершинах, то в любой параболической вершине $ord_s h(z) \geqslant ord_s f_1(z)$. Дивизор $f_1(z)$ сосредоточен в параболических вершинах, но $deg(div h(z)) < deg(div f_1(z))$. Получено противоречие.

Свойство $W_1 \cap (W_2 \oplus W_3) = \{0\}$ доказывается так же, как и в пункте 3.

Теорема доказана.

В заключение докажем теорему о связи пространств модулярных и параболических форм одного уровня с одинаковыми характерами.

Теорема 4.

Пусть $k \geqslant p+3$, $\chi(d) = (\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot p}{d})$

Тогда

$$M_k(\Gamma_0(p), \chi) = S_k(\Gamma_0(p), \chi) \oplus < \frac{\eta(pz)^p}{\eta(z)} E_4^l(z) E_6^m(z) > \oplus < \frac{\eta(z)^p}{\eta(pz)} E_4^l(z) E_6^m(z) >,$$

$k = p - 1 + l + m$.

Доказательство.

Из формулы размерности получаем $dim M_k(\Gamma_0(p), \chi) = dim S_k(\Gamma_0(p), \chi) + 2$.

Обозначим:

$g_1 = \frac{\eta(pz)^p}{\eta(z)} E_4^l(z) E_6^m(z)$,

$g_2 = \frac{\eta(z)^p}{\eta(pz)} E_4^l(z) E_6^m(z)$.

Из условий $ord_0(g_1(z)) = 0$, $ord_0(g_2(z)) \neq 0$, $ord_\infty(g_2(z)) \neq 0$, $ord_\infty(g_2(z)) = 0$ следует, что эти функции линейно независимы, и их нетривиальная линейная комбинация не лежит в $S_k(\Gamma_0(p), \chi)$.

Литература

[1] Ono K. The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series. A.M.S., Providence, 2004, 216 p.

[2] Коблиц Н. Введение в эллиптические кривые и модулярные формы. М.: Мир, 1988. 320 с.

[3] Кнэпп Э. Эллиптические кривые. М.: Факториал Пресс, 2004, 488 с.

[4] Воскресенская Г.В. О представлении модулярных форм в виде однородных многочленов // Вестник Самарского государственного университета. 2015. № 6(128). С. 40–49.

[5] Воскресенская Г.В. О пространствах модулярных форм четного веса // Вестник Самарского государственного университета, 2014. № 10(121). С. 38–47.

[6] Gordon B., Sinor D. Multiplicative properties of $\eta-$products. // L.N.M. 1987. V. 1395. P. 173–200.

[7] Voskresenskaya G.V. One special class of modular forms and group representations // Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux. 1999. V. 11. P. 247–262.

[8] Dummit D.,Kisilevsky H., MacKay J. Multiplicative products of $\eta-$functions // Contemp. Math. 1985. V. 45. P. 89–98.

[9] Cohen H., Oesterle J. Dimensions des espaces de formes modulaires // LNM. 1976. V. 627. P. 69–78.

[10] Biagioli A.J.F. The construction of modular forms as products of transforms of the Dedekind eta-function // Acta Arithm. 1990. V. LIV. № 4. P. 273–300.

References

[1] Ono K. The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series. A.M.S., Providence, 2004, 216 p. [in English].

[2] Koblitz N. Vvedenie v ellipticheskie krivye i moduliarnye formy [Introduction in elliptic curves and modular forms]. M.: Mir, 1988, 320 p. [in Russian].

[3] Knapp A. Ellipticheskie krivye [Elliptic curves]. M.: Faktorial Press, 2004, 488 p. [in Russian].

[4] Voskresenskaya G.V. O predstavlenii moduliarnykh form v vide odnorodnykh mnogochlenov [On representation of modular forms as homogeneous polynomials]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2015, no. 6(128), pp.40–49 [in Russian].

[5] Voskresenskaya G.V. O prostranstvakh moduliarnykh form chetnogo vesa [On spaces of modular forms of even weight]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta* [Vestnik of Samara State University], 2014, no. 10(121), pp. 38–47 [in Russian].

[6] Gordon B., Sinor D. Multiplicative properties of $\eta-$products. *L.N.M.*, 1987, V. 1395, pp. 173–200 [in Russian].

[7] Voskresenskaya G.V. One special class of modular forms and group representations. *Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux*, 1999, Vol. 11, pp. 247–262 [in English].

[8] Dummit D., Kisilevsky H., MacKay J. Multiplicative products of η-functions. *Contemp. Math.*, 1985, Vol. 45, pp. 89-98 [in English].

[9] Cohen H., Oesterle J. Dimensions des espaces de formes modulaires. *LNM*, 1976, Vol. 627, pp. 69–78 [in French].

[10] Biagioli A.J.F. The construction of modular forms as products of transforms of the Dedekind eta-function. *Acta Arithm.*, 1990, Vol. LIV, no. 4, pp. 273–300 [in English].

G.V. Voskresenskaya[3]

CUSP FORMS WITH CHARACTERS OF THE LEVEL P[4]

In the article we prove structure theorems for spaces of cusp forms with characters of a level p. The spaces are decomposed in the direct sum of three subspaces. The first subspace is essencial. The eta-quotions play an important role in the investigations. The divisor of the functions is concentrated in cusps. The theorem about the structure of spaces of modular forms with characters is proved. We discuss the question about generators of these spaces and K.Ono's problem. Dimensions of spaces are calculated by the Cohen — Oesterle formula, the orders in cusps are calculated by the Biagioli formula.

Key words: modular forms, cusp forms, Dedekind eta-function, cusps, Eisenstein series, divisor of function, structure theorems, Cohen — Oesterle formula

Статья поступила в редакцию 29/I/2016.
The article received 29/I/2016.

[3] *Voskresenskaya Galina Valentinovna* (galvosk@mail.ru), Department of Algebra and Geometry, Samara University, 34, Moskovskoye Shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

[4] The work is carried out at the financial support of the grant of the Russian Foundation for Basic Research 16-01-00154A.