МАТЕМАТИКА

УДК 517.956

С.А. Алдашев[1]

КОРРЕКТНОСТЬ ЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В статье рассмотрена корректность краевых задач на плоскости для эллиптических уравнений методом теории аналитических функций комплексного переменного.

Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка в областях с ребрами подробно ранее изучены.

В работах автора найдены явные виды классических решений задач Дирихле и Пуанкаре в цилиндрических областях для одного класса многомерных эллиптических уравнений. В данной статье показана однозначная разрешимость локальной краевой задачи, которая является обобщением задач Дирихле и Пуанкаре. Получен также критерий единственности регулярного решения.

Ключевые слова: многомерное эллиптическое уравнение, локальная краевая задача, цилиндрическая область, критерий единственности, функция Бесселя.

Корректность краевых задач на плоскости для эллиптических уравнений методом теории аналитических функций комплексного переменного хорошо изучена в [1; 2].

При исследовании аналогичных вопросов, когда число независимых переменных больше двух, возникают трудности принципиального характера. Весьма привлекательный и удобный метод сингулярных интегральных уравнений теряет свою силу из-за отсутствия сколько-нибудь полной теории многомерных сингулярных интегральных уравнений [3].

Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка в областях с ребрами подробно изучены в [4–6].

В работах [7; 8], используя предложенный в [9; 10] метод, найдены явные виды классических решений задач Дирихле и Пуанкаре в цилиндрических областях для одного класса многомерных эллиптических уравнений.

В данной работе показана однозначная разрешимость локальной краевой задачи, которая является обобщением задач Дирихле и Пуанкаре. Получен также критерий единственности регулярного решения.

Алдашев Серик Аймурзаевич (aldash51@mail.ru), кафедра фундаментальной и прикладной математики, Казахский национальный педагогический университет им. Абая, 050010, Республика Казахстан, г. Алматы, пр. Достык, 13.

1. Постановка задачи и результат

Пусть $D_\alpha -$ цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, ..., x_m, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : |x| = = 1\}$, плоскостями $t = = \alpha > 0$ и $t = 0$, где $|x| -$ длина вектора $x = (x_1, ..., x_m)$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_α области D_α обозначим через Γ_α, S_α, S_0 соответственно.

В области D_α рассмотрим взаимно сопряженные многомерные эллиптические уравнения

$$Lu \equiv \Delta_x u + u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u = 0, \tag{1}$$

$$L^* \upsilon \equiv \Delta_x \upsilon + \upsilon_{tt} - \sum_{i=1}^{m} a_i \upsilon_{x_i} - b\upsilon_t + d\upsilon = 0, \tag{1*}$$

где $\Delta_x -$ оператор Лапласа по переменным $x_1, ..., x_m$, $m \geqslant 2$, а $d(x,t) = c - \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ix_i} - - b_t$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, ..., x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, ..., \theta_{m-1}, t$, $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta_1 < 2\pi$, $0 \leqslant \theta_i \leqslant \pi$, $i = 2, 3, ..., m-1$.

Рассмотрим следующую локальную краевую задачу

Задача 1. Найти решение уравнения (1) в области D_α из класса $C^1(\bar{D}_\alpha) \cap \cap C^2(D_\alpha)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_{S_\alpha} = \varphi_1(r,\theta),\ u\Big|_{\Gamma_\alpha} = \psi(t,\theta),\ (\beta u + \gamma u_t)\Big|_{S_0} = \varphi_2(r,\theta), \tag{2}$$

где $\beta, \gamma = const$, $\beta^2 + \gamma^2 \neq 0$, которая является обобщением задач Дирихле ($\gamma = 0$) и Пуанкаре ($\beta = 0$), исследованные в [7, 8].

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}-$система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_{m-1})$, $W_2^l(S_0)$, $l = 0, 1, ... -$ пространства Соболева.

Имеет место [11]

Лемма 1. Пусть $f(r,\theta) \in W_2^l(S_0)$. Если $l \geqslant m-1$, то ряд

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{3}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leqslant l - m + 1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Лемма 2. Для того чтобы $f(r,\theta) \in W_2^l(S_0)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (3) удовлетворяли неравенствам

$$|f_0^1(r)| \leqslant c_1,\ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f_n^k(r)|^2 \leqslant c_2,\ \ c_1, c_2 = const.$$

Через $\tilde{a}_{in}^k(r,t)$, $a_{in}^k(r,t)$, $\tilde{b}_n^k(r,t)$, $\tilde{c}_n^k(r,t)$, $\tilde{d}_n^k(r,t)$, ρ_n^k, $\bar{\varphi}_{1n}^k(r)$, $\bar{\varphi}_{2n}^k(r)$, $\psi_n^k(t)$ обозначим коэффициенты ряда (3) соответственно функций $a_i(r,\theta,t)\rho(\theta)$, $a_i \frac{x_i}{r}\rho$, $b(r,\theta,t)\rho$, $c(r,\theta,t)\rho$, $d(r,\theta,t)\rho$, $\rho(\theta)$, $i = 1, ..., m$, $\varphi_1(r,\theta)$, $\varphi_2(r,\theta)$, $\psi(t,\theta)$, причем $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$,
$H -$ единичная сфера в E_m.

Пусть $a_i(r,\theta,t), b(r,\theta,t), c(r,\theta,t) \in W_2^l(D_\alpha) \subset C(\bar{D}_\alpha)$, $i = 1, ..., m$, $l \geqslant m+1$, $c(r,\theta,t) \leqslant 0$, $\forall (r,\theta,t) \in D_\alpha$.

Тогда справедлива.

Теорема 1. Если $\varphi_1(r,\theta)\in W_2^l(S_\alpha)$, $\psi(t,\theta)\in W_2^l(\Gamma_\alpha)$, $\varphi_2(r,\theta)\in W_2^l(S_0)$, $l>\frac{3m}{2}$ и

$$\beta\,\mathrm{th}\,\mu_{s,n}\alpha\neq\mu_{s,n}\gamma,\ s=1,2...,\tag{4}$$

то задача 1 разрешима, где $\mu_{s,n}-$ положительные нули функций Бесселя первого рода $J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(z)$.

Теорема 2. Если $b(r,\theta,0)=0$, $\forall(r,\theta)\in S_0$, то решение задачи 1 единственно тогда и только, тогда, когда выполняется условие (4).

Заметим, что если $\beta=0$ или $\gamma=0$, то соотношение (4) выполняется всегда, поэтому в дальнейшем будем считать, что $\beta\neq0$ и $\gamma\neq0$.

Доказательство теоремы 1. В сферических координатах уравнения (1) имеют вид

$$Lu\equiv u_{rr}+\frac{m-1}{r}u_r-\frac{\delta u}{r^2}+u_{tt}+\sum_{i=1}^m a_i(r,\theta,t)u_{x_i}+b(r,\theta,t)u_t+c(r,\theta,t)u=0,\tag{5}$$

$$\delta\equiv-\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{g_j sin^{m-j-1}\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(sin^{m-j-1}\theta_j\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right),\ g_1=1,\ g_j=(sin\theta_1...sin\theta_{j-1})^2,\ j>1.$$

Известно [11], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n=n(n+$ $+m-\ -2)$, $n=0,1,...$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Искомое решение задачи 1 будем искать в виде

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\bar u_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta),\tag{6}$$

где $\bar u_n^k(r,t)-$ функции, подлежащие определению.

Подставляя (6) в (5), умножив затем полученное выражение на $\rho(\theta)\neq0$ и проинтегрировав по единичной сфере H, для $\bar u_n^k$ получим [9; 10]

$$\begin{gathered}\rho_0^1\bar u_{0rr}^1+\rho_0^1\bar u_{0tt}^1+\left(\frac{m-1}{r}\rho_0^1+\sum_{i=1}^m a_{i0}^1\right)\bar u_{0r}^1+\tilde b_0^1\bar u_{0t}^1+\tilde c_0^1\bar u_0^1+\\+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\rho_n^k\bar u_{nrr}^k+\rho_n^k\bar u_{ntt}^k+\left(\frac{m-1}{r}\rho_n^k+\sum_{i=1}^m a_{in}^k\right)\bar u_{nr}^k+\tilde b_n^k\bar u_{nt}^k+\right.\\\left.+\left[\tilde c_n^k-\lambda_n\frac{\rho_n^k}{r^2}+\sum_{i=1}^m(\tilde a_{in-1}^k-na_{in}^k)\right]\bar u_n^k\right\}=0.\end{gathered}\tag{7}$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho_0^1\bar u_{0rr}^1+\rho_0^1\bar u_{0tt}^1+\frac{m-1}{r}\rho_0^1\bar u_{0r}^1=0,\tag{8}$$

$$\rho_1^k\bar u_{1rr}^k+\rho_1^k\bar u_{1tt}^k+\frac{m-1}{r}\rho_1^k\bar u_{1r}^k-\frac{\lambda_1}{r^2}\rho_1^k\bar u_1^k=-\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^m a_{i0}^1\bar u_{0r}^1+\tilde b_0^1\bar u_{0t}^1+\tilde c_0^1\bar u_0^1\right),\ n=1,\ k=\overline{1,k_1},\tag{9}$$

$$\begin{gathered}\rho_n^k\bar u_{nrr}^k+\rho_n^k\bar u_{ntt}^k+\frac{m-1}{r}\rho_n^k\bar u_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\rho_n^k\bar u_n^k=-\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^m a_{in-1}^k\bar u_{n-1r}^k+\tilde b_{n-1}^k\bar u_{n-1t}^k+\right.\\\left.+\left[\tilde c_{n-1}^k+\sum_{i=1}^m(\tilde a_{in-2}^k-(n-1)a_{in-1}^k)\right]\bar u_{n-1}^k\right\},\ k=\overline{1,k_n},\ n=2,3....\end{gathered}\tag{10}$$

Суммируя уравнение (9) от 1 до k_1, а уравнение (10) от 1 до k_n, а затем сложив полученные выражения вместе с (8), приходим к уравнению (7).

Отсюда следует, что если $\{\bar{u}_n^k\}$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,....$ — решение системы (8)–(10), то оно является решением уравнения (7).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (8)–(10) можно представить в виде

$$\bar{u}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k+\bar{u}_{ntt}^k=f_n^k(r,t), \tag{11}$$

где $f_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $f_0^1(r,t)\equiv\ \equiv 0$.

Далее, из краевого условия (2) в силу (6) с учетом леммы 1 будем иметь

$$\bar{u}_n^k(r,\alpha)=\bar{\varphi}_{1n}^k(r),\quad \bar{u}_n^k(1,t)=\psi_n^k(t),\quad \beta\bar{u}_n^k(r,0)+\gamma\bar{u}_{nt}^k(r,0)=\bar{\varphi}_{2n}^k(r), k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\ldots. \tag{12}$$

В (11), (12) произведя замену $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)=\bar{u}_n^k(r,t)-\psi_n^k(t)$, получим

$$\bar{\upsilon}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\bar{\upsilon}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\bar{\upsilon}_n^k+\bar{\upsilon}_{ntt}^k=\bar{f}_n^k(r,t), \tag{13}$$

$$\bar{\upsilon}_n^k(r,\alpha)=\varphi_{1n}^k(r),\quad \bar{\upsilon}_n^k(1,t)=0, \beta\bar{\upsilon}_n^k(r,0)+\gamma\bar{\upsilon}_{nt}^k(r,0)=\varphi_{2n}^k(r), \tag{14}$$

$$\bar{f}_n^k(r,t)=f_n^k(r,t)-\psi_{ntt}^k+\frac{\lambda_n}{r^2}\psi_n^k,\ \varphi_{1n}^k(r)=\bar{\varphi}_{1n}^k(r)-\psi_n^k(\alpha),\ \varphi_{2n}^k(r)=\bar{\varphi}_{2n}^k(r)-\beta\psi_n^k(0)-\gamma\psi_{nt}^k(0),$$

$$k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\ldots.$$

Произведя замену $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)=r^{\frac{(1-m)}{2}}\upsilon_n^k(r,t)$, задачу (13), (14) приведем к следующей задаче:

$$L\upsilon_n^k\equiv\upsilon_{nrr}^k+\upsilon_{ntt}^k+\frac{\bar{\lambda}_n}{r^2}\upsilon_n^k=\tilde{f}_n^k(r,t), \tag{15}$$

$$\upsilon_n^k(r,\alpha)=\tilde{\varphi}_{1n}^k(r),\quad \upsilon_n^k(1,t)=0,\ \beta\upsilon_n^k(r,0)+\gamma\upsilon_{nt}^k(r,0)=\tilde{\varphi}_{2n}^k(r), \tag{16}$$

$$\bar{\lambda}_n=\frac{[(m-1)(3-m)-4\lambda_n]}{4},\quad \tilde{f}_n^k(r,t)=r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{f}_n^k(r,t),\quad \tilde{\varphi}_{1n}^k(r)=r^{\frac{(m-1)}{2}}\varphi_{1n}^k(r),$$

$$\tilde{\varphi}_{2n}^k(r)=r^{\frac{(m-1)}{2}}\varphi_{2n}^k(r).$$

Решение задачи (15), (16) ищем в виде

$$\upsilon_n^k(r,t)=\upsilon_{1n}^k(r,t)+\upsilon_{2n}^k(r,t), \tag{17}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L\upsilon_{1n}^k=\tilde{f}_n^k(r,t), \tag{18}$$

$$\upsilon_{1n}^k(r,\alpha)=0,\ \upsilon_{1n}^k(1,t)=0,\ \beta\bar{\upsilon}_{1n}^k(r,0)+\gamma\bar{\upsilon}_{1nt}^k(r,0)=0, \tag{19}$$

а $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$L\upsilon_{2n}^k=0, \tag{20}$$

$$\upsilon_{2n}^k(r,\alpha)=\tilde{\varphi}_{1n}^k(r),\ \upsilon_{2n}^k(1,t)=0,\ \beta\bar{\upsilon}_{2n}^k(r,0)+\gamma\bar{\upsilon}_{2nt}^k(r,0)=\tilde{\varphi}_{2n}^k(r). \tag{21}$$

Решение вышеуказанных задач рассмотрим в виде

$$\upsilon_n^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}R_s(r)T_s(t), \tag{22}$$

при этом пусть

$$\tilde{f}^k_n(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}a^k_{s,n}(t)R_s(t),\ \tilde{\varphi}^k_{1n}(r)=\sum_{s=1}^{\infty}b^k_{s,n}R_s(r),\ \tilde{\varphi}^k_{2n}(r)=\sum_{s=1}^{\infty}e^k_{s,n}R_s(r). \qquad (23)$$

Подставляя (22) в (18), (19), с учетом (23) получим

$$R_{srr}+\frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}R_s+\mu R_s=0,\ 0<r<1, \qquad (24)$$

$$R_s(1)=0,\ |R_s(0)|<\infty, \qquad (25)$$

$$T_{stt}-\mu T_s(t)=a^k_{s,n}(t),\ 0<t<\alpha, \qquad (26)$$

$$T_s(\alpha)=0,\ \beta T_s(0)+\gamma T_{st}(0)=0. \qquad (27)$$

Ограниченным решением задачи (24), (25) является [12]

$$R_s(r)=\sqrt{r}J_\nu(\mu_{s,n}r), \qquad (28)$$

где $\nu=n+\frac{(m-2)}{2},\ \mu=\mu^2_{s,n}$.

Общее решение уравнения (26) представимо в виде [12]

$$T_{s,n}(t)=c_{1s}\operatorname{ch}\mu_{s,n}t+c_{2s}\operatorname{sh}\mu_{s,n}t+\frac{\operatorname{ch}\mu_{s,n}t}{\mu_{s,n}}\int_0^t a^k_{s,n}(\xi)\operatorname{sh}\mu_{s,n}\xi d\xi-$$

$$-\frac{\operatorname{sh}\mu_{s,n}t}{\mu_{s,n}}\int_0^t a^k_{s,n}(\xi)\operatorname{ch}\mu_{s,n}\xi d\xi, \qquad (29)$$

где c_{1s}, c_{2s} — произвольные постоянные, удовлетворив условию (27), получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} c_{1s}\operatorname{ch}\mu_{s,n}\alpha+c_{2s}\operatorname{sh}\mu_{s,n}\alpha=\frac{\operatorname{sh}\mu_{s,n}\alpha}{\mu_{s,n}}\int\limits_0^\alpha a^k_{s,n}(\xi)\operatorname{ch}\mu_{s,n}\xi d\xi-\frac{\operatorname{ch}\mu_{s,n}\alpha}{\mu_{s,n}}\int\limits_0^\alpha a^k_{s,n}(\xi)\operatorname{sh}\mu_{s,n}\xi d\xi,\\ \beta c_{1s}+\gamma\mu_{s,n}c_{2s}=0, \end{cases} \qquad (30)$$

которое имеет единственное решение, если выполняется условие (4).

Подставляя (28) в (23), получим

$$r^{-\frac{1}{2}}\widetilde{f}^k_n(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}a^k_{s,n}(t)J_\nu(\mu_{s,n}r),\ r^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varphi}^k_{1n}(r)=\sum_{s=1}^{\infty}b^k_{s,n}J_\nu(\mu_{s,n}r),$$
$$r^{-\frac{1}{2}}\tilde{\varphi}^k_{2n}(r)=\sum_{s=1}^{\infty}e_{s,n}J_\nu(\mu_{s,n}r),\ 0<r<1. \qquad (31)$$

Ряды (31) — разложения в ряды Фурье — Бесселя [13], если

$$a^k_{s,n}(t)=2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int_0^1\sqrt{\xi}\widetilde{f}^k_n(\xi,t)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \qquad (32)$$

$$b^k_{s,n}=2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int_0^1\sqrt{\xi}\tilde{\varphi}^k_{1n}(\xi)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi,\ e^k_{s,n}=2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2}\int_0^1\sqrt{\xi}\tilde{\varphi}^k_{2n}(\xi)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)d\xi, \qquad (33)$$

$\mu_{s,n}$, $s=1,2,...$ – положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$, расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (28), (29) получим решение задачи (18), (19) в виде

$$\upsilon_{2n}^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}\sqrt{r}T_{s,n}(t)J_\nu(\mu_{s,n}r), \tag{34}$$

где $a_{s,n}^k(t)$, c_{1s}, c_{2s} определяются из (30), (32).

Далее, подставляя (28) в (20), (21), с учетом (23) будем иметь задачу

$$V_{stt}-\mu_{s,n}^2V_s=0, \tag{35}$$

$$V_s(\alpha)=b_{s,n}^k,\ \beta V_s(0)+\gamma V_{st}(0)=e_{s,n}^k. \tag{36}$$

Общее решение уравнения (35) имеет вид

$$V_{s,n}(t)=c'_{1s}\operatorname{ch}\mu_{s,n}t+c'_{2s}\operatorname{sh}\mu_{s,n}t, \tag{37}$$

где c'_{1s},c'_{2s} — произвольные постоянные, удовлетворив условию (36), получим

$$\begin{cases} c'_{1s}\operatorname{ch}\mu_{s,n}\alpha+c'_{2s}\operatorname{sh}\mu_{s,n}\alpha=b_{s,n}^k, \\ \beta c'_{1s}+\gamma\mu_{s,n}c'_{2s}=e_{s,n}^k. \end{cases} \tag{38}$$

Из (28), (37) будем иметь

$$\upsilon_{2n}^k(r,t)=\sum_{s=1}^{\infty}\sqrt{r}V_{s,n}(t)J_\nu(\mu_{s,n}r), \tag{39}$$

где $b_{s,n}^k$, $e_{s,n}^k$, c'_{1s}, c'_{2s} находятся из (33),(38).

Следовательно, сначала решив задачу (8), (12) ($n=0$), а затем (9), (12) ($n=1$), найдем последовательно все $\upsilon_n^k(r,t)$ из (17), где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$, $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ определяются из (34), (39), $k=\overline{1,k_n}$, $\quad n=0,1,\ldots$.

Итак, в области D_α имеет место

$$\int\limits_H \rho(\theta)Lu\,dH=0. \tag{40}$$

Пусть $f(r,\theta,t)=R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r)\in V_0$, V_0 плотна в $L_2((0,1))$, $\rho(\theta)\in C^\infty(H)$ плотна в $L_2(H)$, а $T(t)\in V_1$, V_1 плотна в $L_2((0,\alpha))$. Тогда $f(r,\theta,t)\in V$, $V=V_0\otimes H\otimes V_1-$ плотна в $L_2(D_\alpha)$ [14].

Отсюда и из (40) следует, что

$$\int\limits_{D_\alpha} f(r,\theta,t)Lu\,dD_\alpha=0$$

и

$$Lu=0,\ \forall(r,\theta,t)\in D_\alpha.$$

Таким образом, решением задачи 1 является ряд

$$u(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\psi_n^k(t)+r^{\frac{(1-m)}{2}}\left[\upsilon_{1n}^k(r,t)+\upsilon_{2n}^k(r,t)\right]\right\}Y_{n,m}^k(\theta), \tag{41}$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$, $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ находятся из (34), (39).

Используя формулы (13), (15) $\ 2J'_\nu(z)=J_{\nu-1}(z)-J_{\nu+1}(z)$ и

$$|J_\nu(z)|\leqslant\frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu, \tag{42}$$

решение (41) можно оценить как степенной ряд.

Далее, учитывая условия на заданные функции $\varphi_1(r,\,\theta),\ \psi(t,\,\theta), \varphi_2(r,\theta)$ и леммы, оценки [11]

$$|k_n| \leqslant c_1 n^{m-2}, \ \left|\frac{\partial^q}{\partial\theta_j^q} Y_{n,m}^k(\theta)\right| \leqslant c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q}, \ j=\overline{1,m-1}, \ q=0,1,...,$$

по интегральному признаку Коши показано, что ряд (41) и продифференцированные ряды сходятся равномерно и абсолютно.

Это означает, что искомое решение в виде (41) принадлежит классу $C^1(\bar{D}_\alpha)\cap C^2(D_\alpha)$, если $l>\frac{3m}{2}$.

Следовательно, разрешимость задачи 1 установлена.

2. Доказательство теоремы 2

Сначала покажем единственность решения задачи 1. Для этого построим решение краевой задачи для уравнения (1*) с данными

$$\upsilon\big|_{S_\alpha\cup\Gamma_\alpha}=0, \ (\beta\upsilon+\gamma\upsilon_t)\big|_{S_0}=\varphi_2(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\overline{\varphi}_{2n}^k(r)Y_{n,m}^k(\theta), \quad k=\overline{1,k_n}, \quad n=0,1,..., \tag{43}$$

где $\bar{\varphi}_{2n}^k(r)\in G,\ G-$ множество функций $\varphi(r)$ из класса $C\left([0,1]\right)\cap C^1\left((0,1)\right)$. Множество G плотно всюду в $L_2((0,1))$ [14].

Решение задачи (1*), (43) будем искать в виде (6), где функции $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)$ будут определены ниже. Тогда аналогично п. 2 функции $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)$ удовлетворяют системы уравнений (8)–(10), где $\tilde{a}_{in}^k,\ a_{in}^k,\ \tilde{b}_n^k$ заменены соответственно на $-\tilde{a}_{in}^k,\ -a_{in}^k,\ -\tilde{b}_n^k$, а $\tilde{c}_n^k$ на $\tilde{d}_n^k,\ i==1,...,m,\ k=\overline{1,k_n}, \quad n=0,1,\dots$.

Далее из краевого условия (43) в силу (6) получим

$$\bar{\upsilon}_n^k(r,\alpha)=\bar{\upsilon}_n^k(1,t)=0, \ \beta\bar{\upsilon}_n^k(r,0)+\gamma\bar{\upsilon}_{nt}^k(r,0)=\bar{\varphi}_{2n}^k(r), \ k=\overline{1,k_n}, \quad n=0,1,\dots. \tag{44}$$

Как ранее замечено, что каждое уравнение системы (8)–(10) представимо в виде. В n. 2 показано, что задача (11),(44) имеет единственное решение, если выполнено соотношение (4).

Таким образом, решение задачи (1*), (43) в виде ряда (41) построено, она в силу (42) принадлежит классу $C^1(\bar{D}_\alpha)\cap C^2(D_\alpha)$.

Из определения сопряженных операторов $L,\ L^*$ [16]

$$\upsilon Lu-uL^*\upsilon=-\upsilon P(u)+uP(\upsilon)-u\upsilon Q,$$

где

$$P(u)=\sum_{i=1}^m u_{x_i}\cos\left(N^\perp,x_i\right)+u_t\cos\left(N^\perp,t\right), \ Q=\sum_{i=1}^m a_i\cos\left(N^\perp,x_i\right)-b\cos\left(N^\perp,t\right),$$

а $N^\perp-$ внутренняя нормаль к границе ∂D_α, по формуле Грина имеем

$$\int\limits_D(\upsilon Lu-uL^*\upsilon)dD_\alpha=\int\limits_{\partial D_\alpha}\left[\left(\upsilon\frac{\partial u}{\partial N}-u\frac{\partial\upsilon}{\partial N}\right)M+u\upsilon Q\right]ds, \tag{45}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial N}=\sum_{i=1}^m\cos\left(N^\perp,x_i\right)\frac{\partial}{\partial x_i}+\cos\left(N^\perp,t\right)\frac{\partial}{\partial t}, \ M^2=\sum_{i=1}^m\cos^2\left(N^\perp,x_i\right)+\cos^2\left(N^\perp,t\right).$$

Из (45), принимая во внимание однородные граничные условия (2) и условия (43), получим

$$\int_{S_0} \varphi_2(r,\theta)u(r,\theta,0)ds = 0. \tag{46}$$

Поскольку $\{\overline{\varphi}^k_{2n}(r)\}$ плотна в $L_2((0,1))$ по предположению, а $\{Y^k_{n,m}(\theta)\}$ плотна в $L_2(H)$ ([11]), то линейная оболочка система функций $\{\overline{\varphi}^k_{2n}(r)Y^k_{n,m}(\theta)\}$ будет плотна в $L_2(S_0)$ ([11]), поэтому из (46) заключаем, что $u(r,\theta,0)=0$, $\forall(r,\theta)\in S_0$.

Следовательно, в силу единственности решения задачи Дирихле [1–3] : $Lu = 0$, $u\big|_{S_0\cup\Gamma_\alpha\cup S_\alpha} = 0$, будем иметь $u=0$ в $\overline{D}_\alpha$.

Пусть теперь условие (4) нарушено, хотя бы для одного $s=l$.

Тогда, если решение однородной задачи, соответствующей задаче 1, будем искать в виде ряда (6), то приходим к краевой задаче

$$L\upsilon^k_n = \widetilde{f}^k_n(r,t),$$

$$\upsilon^k_n(r,\alpha) = \upsilon^k_n(1,t) = 0,\ \beta\upsilon^k_n(r,0) + \gamma\upsilon^k_{nt}(r,0) = 0,\ k=\overline{1,k_n},\quad n=0,1,\ldots.$$

В силу (29), (30), (37), (38) ее решением является функция

$$\mu_{l,n}\upsilon^k_n(r,t) = \sqrt{r}[\mu_{l,n}(\beta\operatorname{sh}\mu_{l,n}t - \gamma\mu_{l,n}\operatorname{ch}\mu_{l,n}t) + (\operatorname{ch}\mu_{l,n}t)\int_0^t a^k_{l,n}(\xi)\operatorname{sh}\mu_{l,n}\xi d\xi -$$

$$-(\operatorname{sh}\mu_{l,n}t)\int_0^t a^k_{l,n}(\xi)\operatorname{ch}\mu_{l,n}\xi d\xi]J_{\frac{n+(m-2)}{2}}(\mu_{l,n}r).$$

Следовательно, нетривиальные решения однородной задачи 1 записываются в виде ряда

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{-p} r^{\frac{(1-m)}{2}}\upsilon^k_n(r,t)Y^k_{n,m}(\theta).$$

Из (42) следует, что $u\in C^1(\overline{D}_\alpha)\cap C^2(D_\alpha)$, если $p>\frac{3m}{2}$.

Теорема 2 доказана.

Литература

[1] Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 164 с.

[2] Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.:Наука, 1966. 203 с.

[3] Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.

[4] Мазья В.Г., Пламеневский Б.А. О задаче косой производной в области с кусочно-гладкой границей // Функциональный анализ. 1971. № 5(3). С. 102–103.

[5] Мазья В.Г., Пламеневский Б.А. Шаудеровские оценки решений эллиптических краевых задач в областях с ребрами на границе // Труды семинара С.Л. Соболева. 1978. № 2. С. 69–102.

[6] Кондратьев В.А., Олейник О.А. Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38. Вып. 2(30). С. 3–76.

[7] Алдашев С.А. Корректность задачи Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптических уравнений // Вестник НГУ. Сер.: Математика, механика, инрформатика. 2012. Т. 12. Вып. 1. С. 7–13.

[8] Алдашев С.А. Корректность задачи Пуанкаре в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптических уравнений// Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2014. № 10(121). С. 17–25.

[9] Алдашев С.А. О задачах Дарбу для одного класса многомерных гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34. № 1. С. 64–68.

[10] Алдашев С.А. Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы: Гылым, 1994. 170 с.

[11] Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 254 с.

[12] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965. 703 с.

[13] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1974. Т. 2. 295 с.

[14] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 543 с.

[15] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.

[16] Смирнов В.И. Курс высшей математики. М.: Наука, 1981. Т. 4. Ч. 2. 550 с.

References

[1] Bitsadze A.V. Uravneniia smeshannogo tipa [Equations of a mixed type]. M.: Izd. AN SSSR, 1959, 164 p. [in Russian].

[2] Bitsadze A.V. Kraevye zadachi dlia ellipticheskikh uravnenii vtorogo poriadka [Boundary value problems for elliptic equations of the second order]. M.: Nauka, 1966, 203 p. [in Russian].

[3] Bitsadze A.V. Nekotorye klassy uravnenii v chastnykh proizvodnykh [Some classes of partial differential equations]. M.: Nauka, 1981, 448 p. [in Russian].

[4] Mazya V.G., Plamenevsky B.A. O zadache kosoi proizvodnoi v oblasti s kusochnogladkoi granitsei [On the task of directional derivative in the area with piecewise-smooth boundary]. *Funktsional'nyi analiz* [Functional analysis], 1971, 5:3, pp. 102-103 [in Russian].

[5] Mazya V.G., Plamenevsky B.A. Shauderovskie otsenki reshenii ellipticheskikh kraevykh zadach v oblastiakh s rebrami na granitse [Shauder decision assessment of elliptic boundary conditions in the areas key-staged on the boundaries] in *Trudy seminara S.L.Soboleva* [Proceedings of the seminar devoted to S.L. Sobolev], 1978, no. 2, pp. 69–102 [in Russian].

[6] Kondratiev V.A., Oleynik O.A. Kraevye zadachi dlia uravnenii chastnymi proizvodnymi v negladkikh oblastiakh [Boundary value problems for equations with partial derivatives in non-smooth areas]. *Uspekh mat. nauk* [Russian Mathematical Surveys], 1983, Vol. 38, Issue 2(30), pp. 3–76 [in Russian].

[7] Aldashev S.A. Korrektnost' zadachi Dirikhle v tsilindricheskoi oblasti dlia odnogo klassa mnogomernykh ellipticheskikh uravnenii [Correctness of Dirichlet problem in the cylindrical domain for one class of multidimensional elliptical equations]. *Vestnik NGU. Seriia: Matematika, mekhanika, informatika* [Siberian Journal of Pure and Applied Mathematics]. Novosibirsk, 2012, Vol. 12, Issue 1, pp. 7–13 [in Russian].

[8] Aldashev S.A. Korrektnost' zadachi Puankare v tsilindricheskoi oblasti dlia odnogo klassa mnogomernykh ellipticheskikh uravnenii [Correctness of Puankare problem for one

class of multidimensional elliptical equations]. *Vestnik SamGU. Estestvennonauchnaia seriia* [Vestnik SamGU. Natural Science Series]. Samara, 2014, Vol. 10(121), pp. 17–25 [in Russian].

[9] Aldashev S.A. O zadachakh Darbu dlia odnogo klassa mnogomernykh giperbolicheskikh uravnenii [On Darboux problems for one class of multidimensional hyperbolic equations]. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential equations], 1998, Vol. 34, no. 1, pp. 64–68 [in Russian].

[10] Aldashev S.A. Kraevye zadachi dlia mnogomernykh giperbolicheskikh i smeshannykh uravnenii [Boundary value problems for multidimensional hyperbolic and mixed equations]. Almaty: Gylym, 1994, 170 p. [in Russian].

[11] Mikhlin S.G. Mnogomernye singuliarnye integraly i integral'nye uravneniia [Multidimensional singular integrals and integral equations]. M.: Fizmatgiz, 1962, 254 p. [in Russian].

[12] Kamke E. Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniiam [Reference book on ordinary differential equations]. M.: Nauka, 1965, 703 p. [in Russian].

[13] Beitmen G., Erdeyn A. Vysshie transtsendentnye funktsii [Higher transcendental functions]. Vol.2. M.: Nauka, 1974, 295 p. [in Russian].

[14] Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza [Elements of the theory of functions and functional analysis]. M.: Nauka, 1976, 543 p. [in Russian].

[15] Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Uravneniia matematicheskoi fiziki [Equations of mathematical physics]. M.: Nauka, 1966, 724 p. [in Russian].

[16] Smirnov V.I. Kurs vysshei matematiki [Course of higher mathematics]. Vol. 4, r. 2. M.: Nauka, 1981, 550 p. [in Russian].

S.A. Aldashev[2]

CORRECTNESS OF THE LOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM IN A CYLINDRICAL DOMAIN FOR ONE CLASS OF MULTIDIMENSIONAL ELLIPTIC EQUATIONS

Correctness of boundary value problems in a plane for elliptical equations has been studied properly using the method of the theory of analytic functions. At investigation of analogous problems, when the number of independent variables is more than two, there arise principle difficulties. Quite good and convenient method of singular integral equations has to be abandoned because there is no complete theory of multidimensional singular integral equations. Boundary value problems for second-order elliptical equations in domains with edges have been studied properly earlier. Explicit classical solutions to Dirichlet and Poincare problems in cylindrical domains for one class of multidimensional elliptical equations can be found in the author's works. In this article,the author proved that the local boundary value problem, which is the generalization of Dirichet and Poincare problem, has only solution. Besides, the criterion of uniqueness of regular solution is obtained.

Key words: multidimensional elliptical equation, local boundary value problem, cylindrical domain, criterion of uniqueness, Bessel function.

Статья поступила в редакцию $29/I/2016$.
The article received $29/I/2016$.

[2]*Aldashev Serik Aimurzaevich* (`aldash51@mail.ru`), Department of Fundamental and Applied Mathematics, Abai Kazakh National Pedagogical University, 13, Dostyk Ave., Almaty, 050010, Republic of Kazakhstan.