УДК 512.8, 517.98, 621.391

С.Я. Новиков, М.Е. Федина[1]

ВОССТАНОВЛЕНИЕ СИГНАЛА ПО МОДУЛЯМ ИЗМЕРЕНИЙ[2]

Рассмотрены вопросы выбора векторов в конечномерных вещественных и комплексных пространствах так, чтобы по модулям измерений скалярных произведений этих векторов с неизвестным вектором оказалось возможным восстановить его.

Исследуется инъективность нелинейных отображений.

Ключевые слова: пространство, сигнал, системы векторов, инъективность отображения, скалярные произведения.

1. Введение

Пусть V — пространство с комплексным скалярным произведением и ортонормированным базисом (ОНБ) $\{u_i\}_{i=1}^{M}$. Каждый "сигнал" $v \in V$ единственным образом представляется суммой

$$v = \sum_{i=1}^{M} \langle v, u_i \rangle u_i.$$

Комплексные коэффициенты представления $\langle v, u_i \rangle$ дают возможность полного восстановления сигнала и часто понимаются как "измерения" сигнала. Реальные измерения получаются вещественными, и зазор между $\langle v, u_i \rangle$ и $|\langle v, u_i \rangle|$ оказывается непреодолимым при восстановлении сигнала.

Представляя сигнал в различных базисах, мы получаем разностороннюю информацию о нем. Так, переходя от представления по ортам в $\mathbb{C}^M$ к представлению в базисе Фурье, получаем частотные характеристики сигнала, дающие широкие возможности для его цифровой обработки.

Последние годы значительное количество работ [1, 2, 3, 4] посвящено решению такой задачи:

Существуют ли системы $\Phi = \{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ такие, для которых возможно восстановить v по набору чисел $|\langle v, \varphi_i \rangle|$?

В классе ОНБ такая задача неразрешима.

Новиков Сергей Яковлевич (`nvks@ssau.ru`), кафедра теории вероятностей и математической статистики, Самарский университет, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Федина Мария Ефимовна (`phedina@ssau.ru`), кафедра безопасности информационных систем, Самарский университет, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

[2] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части государственного задания, проект № 204.

В англоязычной литературе сформулированная выше задача и связанные с ней вопросы составили раздел прикладных исследований под названием "PHASE RETRIEVAL (возвращение, воспроизведение фазы)".

Пионерской работой в этом направлении оказалась работа [1], в которой была доказана теоретическая возможность точного восстановления сигнала (с точностью до унимодулярного множителя), если в качестве системы представления использовать избыточные системы.

Дальнейшее развитие этого направления идет по двум ветвям:

1) поиск таких систем "измерительных" векторов $\Phi = \{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{I}}$, которые позволят восстановить произвольный сигнал $v \in V$ по набору вещественных чисел $|\langle v, \varphi_i\rangle|$;

2) обоснование возможности восстановления произвольного сигнала с большой вероятностью для относительно небольшого числа "случайно выбранных" измерительных векторов.

Второй подход весьма близок теории сжатого зондирования (в английских статьях "Compressed sensing", перевод предложен Б.С. Кашиным).

В данной работе будут изложены результаты, полученные в первом направлении, и сформулированы некоторые нерешенные задачи. То, что касается второго, будет предметом отдельной статьи.

Основная проблема, поставленная в [3], до сих пор далека от окончательного решения:

Найти необходимые и достаточные условия на систему векторов представления $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^N$ (т.н. "измерительных векторов"), которые обеспечивают инъективность и устойчивость отображения "измерения амплитуды" сигнала x

$$(\mathcal{A}(x))(n) := |\langle x, \varphi_n\rangle|^2.$$

Естественной областью определения этого отображения является пространство $V = \mathbb{R}^M$ или $\mathbb{C}^M$. Заметим, однако, что $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(y)$, если $y = cx$ для некоторого скаляра c с единичным модулем. Поэтому, строго говоря, отображение $\mathcal{A} : V \to \mathbb{R}^N$ не может быть инъективным. В дальнейшем изложении будем считать областью определения $\mathcal{A}$ либо $\mathbb{R}^M/\{\pm 1\}$, либо $\mathbb{C}^M/\mathbb{T}$, где $\mathbb{T}$ — окружность единичного радиуса на комплексной плоскости. При таком соглашении вопросы об инъективности и устойчивости отображения $\mathcal{A}$ являются содержательными.

2. Инъективность в $\mathbb{R}^M$

Восстановить сигнал x невозможно, если отображение $\mathcal{A}$ не является инъективным.

Следующее определение конкретизирует определение инъективности применительно к поставленной задаче.

Определение 1. *Набор векторов $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^N$ в $\mathbb{R}^M$ (или $\mathbb{C}^M$) обеспечивает* **воспроизведение фазы (ВФ)***, если для любых $x, y \in \mathbb{R}^M$ (или $\mathbb{C}^M$), таких, что $|\langle x, \varphi_i\rangle| = |\langle y, \varphi_i\rangle|$ для всех $i = 1, \dots, N$, имеем $x = cy$, где $c = \pm 1$ для $\mathbb{R}^M$ (и $c \in \mathbb{T}$ для $\mathbb{C}^M$, где $\mathbb{T}$ — единичная окружность на комплексной плоскости).*

Важным для анализа инъективности оказалось следующее свойство, которое мы назвали свойством *альтернативной полноты*, заменяя тем самым английское сочетание "complement property".

Определение 2. *Набор векторов $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^N$ в $\mathbb{R}^M$ ($\mathbb{C}^M$) назовем альтернативно полным (АП) если для любого $S \subseteq \{1,\dots,N\}$ либо $\{\varphi_n\}_{n\in S}$, либо $\{\varphi_n\}_{n\in S^c}$ полно в $\mathbb{R}^M$ ($\mathbb{C}^M$).*

Для пространства $\mathbb{R}^M$ свойство альтернативной полноты эквивалентно инъективности отображения $\mathcal{A}$.

Теорема 1. *Пусть $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^N \subseteq \mathbb{R}^M$ и отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^M/\{\pm 1\} \to \mathbb{R}^N$ определено равенствами $(\mathcal{A}(x))(n) := |\langle x, \varphi_n\rangle|^2$, $n = 1,\dots,N$. Тогда $\mathcal{A}$ инъективно тогда только тогда, когда Φ альтернативно полно.*

Доказательство.

Необходимость. Предположим, что $\Phi \notin$ (АП). Следовательно, найдется $S \subseteq \{1,\dots,N\}$ такое, что ни $\{\varphi_n\}_{n\in S}$, ни $\{\varphi_n\}_{n\in S^c}$ не полно в $\mathbb{R}^M$. Выбираем ненулевые векторы $u, v \in \mathbb{R}^M$ так, что $\langle u, \varphi_n\rangle = 0$ для всех $n \in S$ и $\langle v, \varphi_n\rangle = 0$ для всех $n \in S^c$. Для каждого n имеем

$$|\langle u \pm v, \varphi_n\rangle|^2 = |\langle u, \varphi_n\rangle|^2 \pm 2\langle u, \varphi_n\rangle\langle v, \varphi_n\rangle + |\langle v, \varphi_n\rangle|^2 = |\langle u, \varphi_n\rangle|^2 + |\langle v, \varphi_n\rangle|^2.$$

Отсюда следует, что $|\langle u + v, \varphi_n\rangle|^2 = |\langle u - v, \varphi_n\rangle|^2$ для каждого n, и $\mathcal{A}(u + v) = \mathcal{A}(u - v)$. Более того, так как u и v ненулевые, по предположению, то и $u + v \neq \pm(u - v)$. Таким образом, инъективности отображения $\mathcal{A}$ нет.

Достаточность. Предположим, что $\mathcal{A}$ не инъективно. Это означает, что существуют векторы $x, y \in \mathbb{R}^M$ такие, что $x \neq \pm y$ и $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(y)$. Обозначим $S := \{n : \langle x, \varphi_n\rangle = -\langle y, \varphi_n\rangle\}$. Имеем: $\langle x + y, \varphi_n\rangle = 0$ для каждого $n \in S$, и $\langle x - y, \varphi_n\rangle = 0$ для каждого $n \in S^c$. По предположению, $x \neq \pm y$, поэтому $x + y \neq 0$ и $x - y \neq 0$. Таким образом, и $\{\varphi_n\}_{n\in S}$, и $\{\varphi_n\}_{n\in S^c}$ не полны в $\mathbb{R}^M$. •

Таким образом оказалось, что система, которая допускает восстановление фазы, с необходимостью оказывается фреймом пространства $\mathbb{R}^M$. Из дальнейшего станет ясным, что аналогичная картина наблюдается и в $\mathbb{C}^M$.

Напомним, что система $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ называется фреймом (каркасом) пространства $\mathbb{R}^M$ ($\mathbb{C}^M$), если существуют константы $0 < A < B$ такие, что $\forall x \in \mathbb{R}^M$ ($\forall x \in \mathbb{C}^M$)

$$A\|x\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^N |\langle x, \varphi_i\rangle|^2 \leqslant B\|x\|^2.$$

В конечномерном пространстве понятие фрейма эквивалентно понятию полноты системы, т. е. равенству $\mathrm{span}\{\varphi_n\}_{n=1}^N = \mathbb{R}^M$ ($\mathrm{span}\{\varphi_n\}_{n=1}^N = \mathbb{C}^M$).

3. Инъективность в $\mathbb{C}^M$

Подробнее теория фреймов изложена в [5, 6]. В пространстве $\mathbb{C}^M$ не найдено практически применимой характеризации инъективности.

Прежде чем доказывать известный ныне критерий (теорема 4 ниже), рассмотрим следующее вспомогательное утверждение. Оно позволяет увидеть аналогию между теоремами 2 и 4. Если $a = (a_1,\dots,a_M)^T \in \mathbb{C}^M$ и $b = (b_1,\dots,b_M)^T \in \mathbb{C}^M$, то скалярное (внутреннее) произведение $\langle a, b\rangle$ можно представить в виде b^*a, где b^* — сопряженный вектор-строка $b^* = (\overline{b_1},\dots,\overline{b_M})$. Внешнее произведение ab^* дает $M \times M$-матрицу с элементами

$$\begin{pmatrix} a_1\overline{b_1} & a_1\overline{b_2} & \dots & a_1\overline{b_M} \\ a_2\overline{b_1} & a_2\overline{b_2} & \dots & a_2\overline{b_M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_M\overline{b_1} & a_M\overline{b_2} & \dots & a_M\overline{b_M} \end{pmatrix}.$$

Лемма 1. *Пусть* $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^N \subseteq \mathbb{R}^M$. *Рассмотрим множество* $\{\varphi_n\varphi_n^* u\}_{n=1}^N$ *векторов в* $\mathbb{R}^M$. *Альтернативная полнота* Φ *эквивалентна равенству* $\operatorname{span}\{\varphi_n\varphi_n^* u\}_{n=1}^N = \mathbb{R}^M$ *для любого* $u \in \mathbb{R}^M \setminus \{0\}$.

Доказательство. Очевидно, что $\{\varphi_n\varphi_n^* u\}_{n=1}^N = \{\langle u, \varphi_n\rangle\varphi_n\}_{n=1}^N$.

Необходимость. Предположим противное. Пусть существует вектор $u \in \mathbb{R}^M \setminus \{0\}$ такой, что

$$\operatorname{span}\{\langle u, \varphi_n\rangle\varphi_n\}_{n=1}^N \neq \mathbb{R}^M. \tag{**}$$

Пусть $S_1 = \{n : \langle u, \varphi_n\rangle = 0\}$. Ясно, что

$$\operatorname{span}\{\varphi_n\}_{n\in S_1} \neq \mathbb{R}^M. \tag{*}$$

Рассмотрим два случая:

1) число элементов в S_1 больше, чем $N - M$. Тогда число элементов в S_1^c меньше M. Вместе со (*) последнее противоречит АП Ф;

2) число элементов в S_1 меньше или равно $N - M$. Из АП Ф и (*) следует, что

$$\operatorname{span}\{\varphi_n\}_{n\in S_1^c} = \mathbb{R}^M. \tag{*}$$

Однако это противоречит (**).

Достаточность. Предположим противное. Пусть существует $S_1 \subseteq \{1, \ldots, N\}$ такое, что

$$\operatorname{span}\{\varphi_n\}_{n\in S_1} \neq \mathbb{R}^M \text{ и } \operatorname{span}\{\varphi_n\}_{n\in S_1^c} \neq \mathbb{R}^M. \tag{***}$$

Выберем u ортогональным $\operatorname{span}\{\varphi_n\}_{n\in S_1}$. Тогда $\operatorname{span}\{\langle u, \varphi_n\rangle\varphi_n\}_{n\in S_1^c} = \mathbb{R}^M$. Однако это противоречит (***). •

Теорема 2. *Пусть* $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^N \subseteq \mathbb{C}^M$ *и отображение* $\mathcal{A} : \mathbb{C}^M/\mathbb{T} \to \mathbb{R}^N$ *определено соотношениями* $(\mathcal{A}(x))(n) := |\langle x, \varphi_n\rangle|^2$, $n = 1, \ldots, N$. *Векторы* $\{\varphi_n\varphi_n^* u\}_{n=1}^N$ *будем рассматривать как векторы пространства* $\mathbb{R}^{2M}$. *Пусть* $S(u) := \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\varphi_n\varphi_n^* u\}_{n=1}^N$. *Эквивалентны следующие утверждения:*

(а) $\mathcal{A}$ *инъективно.*

(б) $\dim S(u) \geqslant 2M - 1$ *для каждого* $u \in \mathbb{C}^M \setminus \{0\}$.

(в) $S(u) = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{iu\}^\perp$ *для каждого* $u \in \mathbb{C}^M \setminus \{0\}$.

Доказательство. (а)⇒(в): Предположим, что отображение $\mathcal{A}$ инъективно. Требуется доказать, что линейная оболочка векторов $\{\varphi_n\varphi_n^* u\}_{n=1}^N$ является ортогональным дополнением вектора iu. Ортогональность в данном случае понимается в смысле вещественного скалярного произведения $\langle a, b\rangle_{\mathbb{R}} = \operatorname{Re}\langle a, b\rangle$. Заметим, что

$$|\langle u \pm v, \varphi_n\rangle|^2 = |\langle u, \varphi_n\rangle|^2 \pm 2\operatorname{Re}\langle u, \varphi_n\rangle\langle\varphi_n, v\rangle + |\langle v, \varphi_n\rangle|^2,$$

поэтому

$$\begin{aligned}|\langle u + v, \varphi_n\rangle|^2 - |\langle u - v, \varphi_n\rangle|^2 = 4\operatorname{Re}\langle u, \varphi_n\rangle\langle\varphi_n, v\rangle = \\ = 4\operatorname{Re}\varphi_n^* u\langle\varphi_n, v\rangle = 4\langle\varphi_n\varphi_n^* u, v\rangle_{\mathbb{R}}.\end{aligned} \tag{1}$$

Если $v \in S(u)^\perp$, то правая часть (1) равна нулю. В силу инъективности $\mathcal{A}$ получаем существование комплексного числа $\omega, |\omega| = 1$ такого, что $u + v = \omega(u - v)$. Так как $u \neq 0$, то $\omega \neq -1$. Имеем

$$v = -\frac{1-\omega}{1+\omega}u = -\frac{(1-\omega)(1+\bar{\omega})}{|1+\omega|^2}u = \frac{2\operatorname{Im}\omega}{|1+\omega|^2}iu,$$

т.е. $S(u)^\perp \subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{iu\}$.

Для доказательства включения $\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{iu\} \subseteq S(u)^{\perp}$ возьмем $v = \alpha i u$ с некоторым $\alpha \in \mathbb{R}$, положим $\omega := \frac{1+\alpha i}{1-\alpha i}$ и заметим, что $|\omega| = 1$. Имеем:

$$u + v = u + \alpha i u = (1 + \alpha i)u = \frac{1 + \alpha i}{1 - \alpha i}(u - \alpha i u) = \omega(u - v).$$

Следовательно, левая часть (1) равна нулю, и $v \in S(u)^{\perp}$. Заметим, что в доказательстве последнего включения инъективность $\mathcal{A}$ не требовалась. Это замечание будет использоваться в дальнейшем.

(б)$\Leftrightarrow$ (в): из (в) сразу следует (б). Для доказательства обратной импликации заметим сначала, что iu ортогонален каждому из $\varphi_n \varphi_n^* u$:

$$\langle \varphi_n \varphi_n^* u,\ iu \rangle_{\mathbb{R}} = \operatorname{Re}\langle \varphi_n \varphi_n^* u,\ iu \rangle = \operatorname{Re}\langle u, \varphi_n \rangle \langle \varphi_n,\ iu \rangle = -\operatorname{Re} i |\langle u, \varphi_n \rangle|^2 = 0.$$

Это означает, что $\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{iu\} \subseteq S(u)^{\perp}$. В силу (б), $\dim S(u)^{\perp} \leqslant 1$. Из последних двух соотношений получаем (в).

(в)$\Rightarrow$ (а): предположим, что $\mathcal{A}(x) = |\varphi_n^* x|^2 = |\varphi_n^* y|^2 = \mathcal{A}(y)$. Если $x = y$, инъективность получена. Если $x - y \neq 0$, то применим (в) к $u = x - y$. Следующие ниже преобразования покажут нам, что $x + y \in S(x - y)^{\perp}$. Действительно,

$$\begin{aligned}\langle \varphi_n \varphi_n^* (x - y), x + y \rangle_{\mathbb{R}} &= \operatorname{Re}\langle \varphi_n \varphi_n^* (x - y), x + y \rangle = \operatorname{Re}(x + y)^* \varphi_n \varphi_n^* (x - y) = \\ &= \operatorname{Re}\left(|\varphi_n^* x|^2 - x^* \varphi_n \varphi_n^* y + y^* \varphi_n \varphi_n^* x - |\varphi_n^* y|^2\right) = \\ &= \operatorname{Re}\left(-x^* \varphi_n \varphi_n^* y + \overline{x^* \varphi_n \varphi_n^* y}\right) = 0.\end{aligned}$$

Итак, $x + y \in S(x - y)^{\perp} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{i(x - y)\}$, то есть существует $\alpha \in \mathbb{R}$ такое, что $x + y = \alpha i (x - y)$, отсюда $y = \frac{1-\alpha i}{1+\alpha i} x$, что означает $x \equiv y \bmod \mathbb{T}$. •

Следующая теорема показывает, что инъективность отображения "измерений амплитуды" $(\mathcal{A}(x))(n) = |\langle x, \varphi_n \rangle|^2$, $n = 1, \dots, N$ в комплексном пространстве эквивалентна в широком смысле (с точностью до вещественного множителя) инъективности другого отображения

$$(\mathcal{B}(x))(n) := \arg\left(\langle x, \varphi_n \rangle^2\right),\ n = 1, \dots, N,$$

которое измеряет только фазы восстанавливаемого сигнала, то есть является отображением "измерений фазы". Будем считать, по определению, что $\arg\left(\langle x, \varphi_n \rangle^2\right) = 0$, если $|\langle x, \varphi_n \rangle| = 0$.

Теорема 3. *Пусть* $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^N \subseteq \mathbb{C}^M$ *и отображение* $\mathcal{A} : \mathbb{C}^M / \mathbb{T} \to \mathbb{R}^N$ *определено соотношениями* $(\mathcal{A}(x))(n) := |\langle x, \varphi_n \rangle|^2$, $n = 1, \dots, N$. *Отображение* $\mathcal{A}$ *инъективно тогда и только тогда, когда отображение* $(\mathcal{B}(x))(n) := \arg\left(\langle x, \varphi_n \rangle^2\right)$, $n = 1, \dots, N$ *инъективно по модулю* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, *то есть* $\mathcal{B}(x) = \mathcal{B}(y) \Rightarrow x \equiv y \bmod \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Доказательство. По теореме 2 инъективность $\mathcal{A}$ эквивалентна следующему утверждению:

$$\forall x \in \mathbb{C}^M \setminus \{0\}, \qquad \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\varphi_n \varphi_n^* x\}_{n=1}^N = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{ix\}^{\perp}. \tag{2}$$

Как было отмечено в доказательстве теоремы 2, включение $\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{ix\} \subseteq \left(\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\varphi_n \varphi_n^* x\}_{n=1}^N\right)^{\perp}$ справедливо для любого $x \in \mathbb{C}^M \setminus \{0\}$. Поэтому (2) эквивалентно следующей импликации:

$$\begin{gathered}\forall x \in \mathbb{C}^M \setminus \{0\},\ \operatorname{Re}\langle \varphi_n \varphi_n^* x,\ iy \rangle = 0\ \forall n = 1, \dots, N \implies y = 0 \\ \text{или } y \equiv x \bmod \mathbb{R} \setminus \{0\}.\end{gathered} \tag{3}$$

Докажем, что $\mathrm{Re}\langle \varphi_n\varphi_n^* x, iy\rangle = \mathrm{Im}\langle x,\varphi_n\rangle\overline{\langle y,\varphi_n\rangle} = 0$ тогда и только тогда, когда $\arg\left(\langle x,\varphi_n\rangle^2\right) = \arg\left(\langle y,\varphi_n\rangle^2\right)$. После этого оказывается возможным заменить левую часть импликации (3) на равенство $\arg\left(\langle x,\varphi_n\rangle^2\right) = \arg\left(\langle y,\varphi_n\rangle^2\right)$ и теорема будет доказана. Положим для краткости $a := \langle x,\varphi_n\rangle$ и $b := \langle y,\varphi_n\rangle$. Теперь остается доказать, что $\mathrm{Im}\, a\bar b = 0$ тогда и только тогда, когда имеет место хотя бы одно из трех равенств: $\arg(a^2) = \arg(b^2)$, $a = 0$ или $b = 0$.

($\Leftarrow$) Если a или b равно нулю, равенство очевидно. В оставшихся случаях имеем $2\arg(a) = \arg(a^2) = \arg(b^2) = 2\arg(b)$, отсюда $2(\arg(a) - \arg(b))$ кратно 2π, и $\arg(a\bar b) = \arg(a) - \arg(b)$ кратно π. Следовательно, $a\bar b \in \mathbb{R}$ и $\mathrm{Im}\, a\bar b = 0$.

($\Rightarrow$) Пусть $\mathrm{Im}\, a\bar b = 0$. Запишем полярное представление чисел $a = re^{i\theta}$ и $b = se^{i\phi}$. Из условия, $rs\sin(\theta - \phi) = 0$. Такое возможно когда либо r, либо s равны нулю. Если ни одна из этих возможностей не имеет места, то $\sin\theta\cos\phi = \cos\theta\sin\phi$. Отсюда получаем, что если θ кратно $\pi/2$, то и ϕ кратно $\pi/2$. Поэтому $\arg(a^2) = 2\arg(a) = \pi = 2\arg(b) = \arg(b^2)$. В оставшемся случае делим обе части равенства на $\cos\theta\cos\phi$ и получаем равенство $\tan\theta = \tan\phi$, из которого вытекает $\theta = \phi \bmod \pi$ и $\arg(a^2) = 2\arg(a) = 2\arg(b) = \arg(b^2)$. •

Лемма 2. *Пусть $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^N \subseteq \mathbb{C}^M$ и отображение $\mathcal{A} : \mathbb{C}^M/\mathbb{T} \to \mathbb{R}^N$ определено соотношениями $(\mathcal{A}(x))(n) := |\langle x,\varphi_n\rangle|^2$, $n = 1,\dots,N$. Если $\mathcal{A}$ инъективно, то отображение $\mathcal{C} : \mathbb{C}^M/\{\pm1\} \to \mathbb{C}^N$, определенное равенствами $(\mathcal{C}(x))(n) := \langle x,\varphi_n\rangle^2$, $n = 1,\dots,N$ также инъективно.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ инъективно. Справедливы следующие утверждения (первое по определению, второе — по теореме 3):

1) если $\forall n = 1,\dots,N$, $|\langle x,\varphi_n\rangle|^2 = |\langle y,\varphi_n\rangle|^2$, то $y \equiv x \bmod \mathbb{T}$;

2) если $\forall n = 1,\dots,N$, $\arg(\langle x,\varphi_n\rangle^2) = \arg(\langle y,\varphi_n\rangle^2)$, то $y \equiv x \bmod \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Пусть $\langle x,\varphi_n\rangle^2 = \langle x,\varphi_n\rangle^2$ для всех $n = 1,\dots,N$. Выполнены условия утверждений (1) и (2). Из равенства $y \equiv x \bmod \mathbb{T}$ вытекает, что $x = 0$ тогда и только тогда, когда $y = 0$. Если $x \neq 0$ и $y \neq 0$, то существует $\omega \in \mathbb{T}\cap\mathbb{R}\setminus\{0\} = \{\pm1\}$ такое, что $y = \omega x$. В любом случае $y \equiv x \bmod\{\pm1\}$, то есть $\mathcal{C}$ инъективно. •

Теорема 4. *Пусть $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^N \subseteq \mathbb{C}^M$ и отображение $\mathcal{A} : \mathbb{C}^M/\mathbb{T} \to \mathbb{R}^N$ определено соотношениями $(\mathcal{A}(x))(n) := |\langle x,\varphi_n\rangle|^2$, $n = 1,\dots,N$. Если $\mathcal{A}$ инъективно, то Φ удовлетворяет свойству альтернативной полноты.*

Интересно сравнить теорему 4 с теоремой 2 и понять, почему в комплексном случае не проходит доказательство первой части теоремы 2. Для комплексного поля равенство теоремы 2 принимает вид

$$|\langle u \pm v,\varphi_n\rangle|^2 = |\langle u,\varphi_n\rangle|^2 \pm 2\mathrm{Re}\langle u,\varphi_n\rangle\overline{\langle v,\varphi_n\rangle} + |\langle v,\varphi_n\rangle|^2 = |\langle u,\varphi_n\rangle|^2 + |\langle v,\varphi_n\rangle|^2.$$

В проведенном доказательстве теоремы 2 было показано, что отрицание свойства (АП) приводит к равенству $\mathcal{A}(u+v) = \mathcal{A}(u-v)$ и при этом $u+v \neq \pm(u-v)$, что противоречит инъективности $\mathcal{A}$ на $\mathbb{R}^M/\{\pm1\}$. Однако, может иметь место, например, такое равенство $u + v = i(u - v)$, и инъективность $\mathcal{A}$ на $\mathbb{C}^M/\mathbb{T}$ не доказана.

Доказательство теоремы 4. В силу леммы 2, инъективность $\mathcal{A}$ влечет инъективность $\mathcal{C}$ на $\mathbb{C}^M/\{\pm1\}$. Поэтому достаточно доказать, что если $\mathcal{C}$ инъективно на $\mathbb{C}^M/\{\pm1\}$, то $\Phi \in$ (АП). Будем рассуждать как в доказательстве теоремы 2. Предположим что $\Phi \notin$ (АП). Тогда существует $S \subseteq \{1,\dots,N\}$ такое, что ни $\{\varphi_n\}_{n\in S}$, ни $\{\varphi_n\}_{n\in S^c}$ не полны в $\mathbb{C}^M$. Следовательно, найдутся ненулевые векторы $u, v \in \mathbb{C}^M$ такие, что $\langle u,\varphi_n\rangle = 0$ для всех $n \in S$ и $\langle v,\varphi_n\rangle = 0$ для всех

$n \in S^c$. Для каждого n имеем

$$\langle u \pm v, \varphi_n \rangle^2 = \langle u, \varphi_n \rangle^2 \pm 2\langle u, \varphi_n \rangle \langle v, \varphi_n \rangle + \langle v, \varphi_n \rangle^2 = \langle u, \varphi_n \rangle^2 + \langle v, \varphi_n \rangle^2.$$

Так как $\langle u + v, \varphi_n \rangle^2 = \langle u - v, \varphi_n \rangle^2$ для каждого n, то $\mathcal{C}(u + v) = \mathcal{C}(u - v)$. Однако, так как u и v ненулевые, по предположению, то $u+v \neq \pm(u-v)$, что противоречит инъективности $\mathcal{C}$ на $\mathbb{C}^M/\{\pm 1\}$. •

Свойство альтернативной полноты недостаточно для инъективности отображения в пространстве $\mathbb{C}^M$. Достаточно рассмотреть векторы $(1, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, 1)$. Они удовлетворяют (АП), но $\mathcal{A}((1, i)) = (1, 1, 2) = \mathcal{A}((1; -i))$, хотя $(1, i) \not\equiv (1, -i) \bmod \mathbb{T}$; более того, векторы с вещественными координатами вообще не могут давать инъективные измерения в комплексном пространстве, так как они не различают векторы с комплексно сопряженными координатами.

4. Системы измерительных векторов

Поиск хороших достаточных условий для инъективности в комплексном пространстве остается актуальным. В вещественном пространстве найдены примеры хороших "измерительных векторов", например, так называемые "полные спарки": множество $\{\varphi_n\}_{n=1}^N \subseteq \mathbb{R}^M$ называется "полным спарком", если каждое его подмножество из M векторов полно в $\mathbb{R}^M$.

Лемма 3. *Всякий полный спарк $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ в $\mathbb{R}^M$ с $N \geqslant 2M - 1$ удовлетворяет свойству альтернативной полноты.*

Доказательство. Предположим противное: существует $S \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ такое, что ни $\{\varphi_n\}_{n \in S}$, ни $\{\varphi_n\}_{n \in S^c}$ не полны в $\mathbb{R}^M$. По определению полного спарка, отсюда следует, что $|S| < M$ и $|S^c| < M$, то есть $N < 2M - 1$, что противоречит условию. •

В силу теоремы 2 всякий полный спарк представляет собой хорошее множество для инъективности отображения в вещественном пространстве. С другой стороны, найдены эффективные методы построения полных спарков [7]. Оставаясь в рамках детерминированной модели, естественно возникает вопрос об определении для пространства размерности M наименьшего числа $N^*(M)$ "измерительных векторов", обеспечивающих инъективность отображения $\mathcal{A}$.

Для $\mathbb{R}^M$ число $N^*(M)$ может быть найдено с использованием теоремы 2.

Предложение 1. *Если $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^N$ в $\mathbb{R}^M$ и $N \leqslant 2M-2$, то отображение $\mathcal{A}: \mathbb{R}^M/\{\pm 1\} \to \mathbb{R}^N$ не является инъективным. Если $N = 2M - 1$, то отображение $\mathcal{A}$ инъективно тогда и только тогда, когда Φ — полный спарк.*

Доказательство. Если $N \leqslant 2M - 2$, то множество $\{1, 2, \ldots, N\}$ можно разбить на подмножества S и S^c так, чтобы мощность каждого не превосходила $M - 1$. Ни одно из множеств $\{\varphi_n\}_{n \in S}$, $\{\varphi_n\}_{n \in S^c}$ не может быть полным.

Если $N = 2M - 1$, и $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^N$ — полный спарк, то инъективность $\mathcal{A}$ следует из леммы 3 и теоремы 2. Обратно, если $\mathcal{A}$ инъективно, то $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^N$ является альтернативно полным семейством. Возьмем произвольное подмножество $S \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$ с $|S| = M$. Тогда $|S^c| = M - 1$ и $\{\varphi_n\}_{n \in S^c}$ не может быть полным. Следовательно, $\{\varphi_n\}_{n \in S}$ полно, и Φ — полный спарк. •

Таким образом, $N^*(M) = 2M - 1$ для $\mathbb{R}^M$.

Переходим к рассмотрению ситуации в $\mathbb{C}^M$.

В этом случае поставленный вопрос имеет историю. Весьма долго представлялась правдоподобной гипотеза о равенстве $N^*(M) = 3M - 2$. Эта гипотеза была опровергнута в [8], в этой работе было доказано, что $N^*(M) \geqslant 4M - 2\alpha(M-1) - 3$, где $\alpha(M-1) \leqslant \log_2(M)$ обозначает количество единиц в бинарном представлении числа $M - 1$.

С другой стороны, в [1] доказано, что $N^*(M) \leqslant 4M - 2$.

В настоящее время правдоподобной представляется

$(4M-4)$**-гипотеза.** *Пусть* $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^N \subseteq \mathbb{C}^M$ *и отображение* $\mathcal{A} : \mathbb{C}^M/\mathbb{T} \to \mathbb{R}^N$

определено соотношениями $(\mathcal{A}(x))(n) := |\langle x, \varphi_n\rangle|^2,\ n = 1, \ldots, N$.

Если $M \geqslant 2$, *то:*

1) если $N < 4M - 4$, *то* $\mathcal{A}$ *не является инъективным;*

2) если $N \geqslant 4M-4$, *то* $\mathcal{A}$ *может быть инъективным для некоторых фреймов.*

Ниже будет дано обоснование этой гипотезы.

Определим M^2-мерное пространство $\mathbb{H}^{M\times M}$ комплексных самосопряженных $M\times M$ матриц. Это пространство над полем вещественных чисел. Для заданного набора $\{\varphi_n\}_{n=1}^N \subseteq \mathbb{C}^M$ определим *оператор матричного анализа* $\mathbf{A} : \mathbb{H}^{M\times M} \to \mathbb{R}^N$ равенствами $(\mathbf{A}H)(n) = \langle H, \varphi_n\varphi_n^*\rangle_{HS}$, здесь $\langle \cdot, cdot\rangle_{HS}$ обозначает скалярное произведение Гильберта-Шмидта, индуцирующее матричную норму Фробениуса [9]. Подробнее,

$$\langle H, G\rangle_{HS} = \sum_{m,n=1}^{M} h_{mn}\overline{g_{mn}} = \mathrm{Tr}[G^*H].$$

Заметим, что $\mathbf{A}$ — линейный оператор, и

$$(\mathbf{A}xx^*)(n) = \langle xx^*, \varphi_n\varphi_n^*\rangle_{HS} = \mathrm{Tr}[\varphi_n\varphi_n^* xx^*] =$$
$$= \mathrm{Tr}[\varphi_n^* xx^* \varphi_n] = \varphi_n^* xx^* \varphi_n = |\langle x, \varphi_n\rangle|^2 = (\mathcal{A}(x))(n).$$

Полученное равенство показывает, что $x \bmod \mathbb{T}$ может быть расширен до xx^*, при таком расширении процесс измерения амплитуды становится линейным за счет увеличения размерности пространства, в котором проводятся измерения.

Посмотрим, как отражается инъективность при таком расширении.

Лемма 4. *Отображение* $\mathcal{A}$ *не является инъективным тогда и только тогда, когда в ядре оператора* $\mathbf{A}$ *существует матрица ранга* 1 *или* 2.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что $\mathcal{A}$ не инъективно, т. е. существуют $x, y \in \mathbb{C}^M/\mathbb{T}$ такие, что $x \neq y$ и $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(y)$. Отсюда следует, что $\mathbf{A}xx^* = \mathbf{A}yy^*$, и $xx^* - yy^* \in \ker \mathbf{A}$. Ранг матрицы $xx^* - yy^*$ равен 1 или 2 в зависимости от зависимости (независимости) векторов x и y.

Достаточность. Сначала предположим, что ядро оператора $\mathbf{A}$ содержит матрицу H ранга 1. Тогда существует $x \in \mathbb{C}^M$ такой, что $H = xx^*$ и $(\mathcal{A}(x))(n) = (\mathbf{A}xx^*)(n) = 0 = (\mathcal{A}(0))(n)$. Но $x \not\equiv 0 \bmod \mathbb{T}$, и $\mathcal{A}$ оказывается не инъективным.

Теперь предположим существование (самосопряженной) матрицы H ранга 2 в ядре оператора $\mathbf{A}$. По спектральной теореме существуют ортонормированные векторы $u_1,\ u_2 \in \mathbb{C}^M$ и ненулевые вещественные числа $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$ такие, что $H = \lambda_1 u_1 u_1^* + \lambda_2 u_2 u_2^*$. Так как $H \in \ker \mathbf{A}$, то для каждого n имеем:

$$0 = \langle H, \varphi_n\varphi_n^*\rangle_{HS} = \langle \lambda_1 u_1 u_1^* + \lambda_2 u_2 u_2^*, \varphi_n\varphi_n^*\rangle_{HS} =$$
$$= \lambda_1|\langle u_1, \varphi_n\rangle|^2 + \lambda_2|\langle u_2, \varphi_n\rangle|^2. \tag{4}$$

Положим $x := |\lambda_1|^{1/2}u_1$ и $y := |\lambda_2|^{1/2}u_2$, заметим, что $y \not\equiv x \bmod \mathbb{T}$, так как они ненулевые и ортогональные. Для завершения доказательства покажем, что $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(y)$. Если λ_1 и λ_2 имеют одинаковые знаки, то по (4), $|\langle x, \varphi_n\rangle|^2 + |\langle y, \varphi_n\rangle|^2 = 0$ для каждого n, следовательно, $|\langle x, \varphi_n\rangle|^2 = 0 = |\langle y, \varphi_n\rangle|^2$.

Если $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$, то $xx^* - yy^* = \lambda_1 u_1 u_1^* + \lambda_2 u_2 u_2^* = H \in \ker \mathbf{A}$, следовательно, $\mathcal{A}(x) = \mathbf{A}xx^* = \mathbf{A}yy^* = \mathcal{A}(y)$. •

Теорема 5. $(4M-4)$*-гипотеза верна для* $M = 2$.

Доказательство. (а) Пусть $N < 4M - 4 = 4$. Так как $\mathbf{A}$ определяет линейное отображение из 4-мерного вещественного пространства в N-мерное вещественное пространство, ядро $\mathbf{A}$ с необходимостью нетривиально, так как, по теореме о ранге и дефекте,

$$\dim \operatorname{Im}(\mathbf{A}) + \dim \ker(\mathbf{A}) = 4.$$

Кроме того каждый ненулевой элемент ядра имеет ранг 1 или 2, и, по лемме 4, $\mathcal{A}$ не будет инъективным.

(б) Рассмотрим матрицу, образованную 16 вещественными переменными:

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} x_1 + ix_2 & x_5 + ix_6 & x_9 + ix_{10} & x_{13} + ix_{14} \\ x_3 + ix_4 & x_7 + ix_8 & x_{11} + ix_{12} & x_{15} + ix_{16} \end{bmatrix} \tag{5}$$

Если обозначить n-й столбец $\Phi(x)$ через $\varphi_n(x)$, то получаем, что $\mathcal{A}$ инъективно именно тогда, когда $x \in \mathbb{R}^{16}$ порождает базис $\{\varphi_n(x)\varphi_n(x)^*\}_{n=1}^4$ в пространстве 2×2 самосопряженных матриц. В самом деле, в этом случае zz^* однозначно определяется через $\mathbf{A}zz^* = \{\langle zz^*, \varphi_n(x)\varphi_n(x)^*\rangle_{HS}\}_{n=1}^4 = \mathcal{A}(z)$, что определит и z с точностью до унимодулярного множителя. Пусть $\mathbf{A}(x)$ обозначает 4×4 матричное представление оператора матричного анализа, в котором n-я строка состоит из координат $\varphi_n(x)\varphi_n(x)^*$ в некотором базисе пространства $\mathbb{H}^{2\times 2}$, например,

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \right\}. \tag{6}$$

Тогда $V = \{x : \operatorname{Re}\det \mathbf{A}(x) = \operatorname{Im}\det\mathbf{A}(x) = 0\}$ оказывается вещественным алгебраическим многообразием в $\mathbb{R}^{16}$, и замечаем, что $\mathcal{A}$ инъективно, если $x \in V^c$. Так как V^c открыто в топологии Зарисского, оно либо пусто, либо плотно в евклидовой топологии. Но $V^c \neq \emptyset$, выбирая x так, что

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & i \end{bmatrix},$$

получаем $x \in V^c$ (см. теорему 4.1 в [5]). •

Для доказательства аналогичного результата для $M = 3$ в [3] предложен проверочный тест.

Тест Кахилла (Cahill) проверки инъективности отображения $\mathcal{A}$ при $M = 3$:

1) выбрать измерительные векторы $\{\varphi_n\}_{n=1}^N \subseteq \mathbb{C}^3$;

2) определить оператор матричного анализа $\mathbf{A} : \mathbb{H}^{3\times 3} \to \mathbb{R}^N$ так, чтобы $\mathbf{A}H = \{\langle H, \varphi_n\varphi_n^*\rangle_{HS}\}_{n=1}^N$;

3) если $\dim\ker(\mathbf{A}) = 0$, то $\mathbf{A}$ инъективно, а, следовательно, и $\mathcal{A}$ инъективно;

4) если $\dim\ker(\mathbf{A}) > 0$, то выбрать $H \in \ker(\mathbf{A})$, $H \neq 0$;

4 а) если $\dim\ker(\mathbf{A}) = 1$, и $\det(H) \neq 0$, то $\mathcal{A}$ инъективно;

4 б) во всех остальных случаях $\mathcal{A}$ неинъективно.

Теорема 6. *Для $M = 3$ тест Кахилла корректно определяет инъективность* $\mathcal{A}$.

Доказательство. Если $\mathbf{A}$ инъективно, то $\mathcal{A}(x) = \mathbf{A}xx^* = \mathbf{A}yy^* = \mathcal{A}(y)$, то есть, $y \equiv x \bmod \mathbb{T}$.

Далее, предположим, что $\mathbf{A}$ имеет одномерное ядро. По лемме 4, $\mathcal{A}$ инъективно тогда и только тогда, когда ядро $\mathbf{A}$ порождено матрицей полного ранга 3.

Наконец, если размерность ядра не меньше 2, то существуют линейно независимые (ненулевые) матрицы A и B в ядре. Если $\det(A) = 0$, то её ранг должен быть 1 или 2, и, по лемме 4, $\mathcal{A}$ не инъективно.

Если $\det(A) \neq 0$, рассмотрим функцию

$$f : t \mapsto \det(A \cos t + B \sin t) \quad t \in [0; \pi].$$

Так как $f(0) = \det(A)$ и $f(\pi) = \det(-A) = -\det(A)$, по теореме о промежуточных значениях существует $t_0 \in [0, \pi]$ такое, что $f(t_0) = 0$, то есть матрица $A \cos t_0 + B \sin t_0$ вырождена. Эта матрица ненулевая, так как A и B линейно независимы, поэтому она имеет ранг 1 или 2. По лемме 9, $\mathcal{A}$ неинъективно. •

Теорема 7. $(4M - 4)$*-гипотеза верна для* $M = 3$.

Доказательство. (а) Если $N < 4M - 4 = 8$, то, по теореме о ранге и дефекте (см. доказательство теоремы 5), размерность ядра оператора матричного анализа $\mathbf{A} : \mathbb{H}^{3\times3} \to \mathbb{R}^N$ не меньше 2, поэтому (тест Кахилла), $\mathcal{A}$ не является инъективным.

(б) Рассмотрим вещественную 3×8-матрицу, подобную (5). Отображение $\mathcal{A}$ инъективно, если $x \in \mathbb{R}^{48}$ порождает семейство $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{8} \subseteq \mathbb{C}^3$, которое удовлетворяет тесту Кахилла. Для этого, согласно теореме о ранге и дефекте, ядро оператора матричного анализа должно иметь размерность не больше 1 и порождаться несингулярной матрицей. Для представления оператора $\mathbf{A}(x)$ матричного анализа в виде 8×9-матрицы используется ортонормированный базис пространства $\mathbb{H}^{3\times3}$, подобный (6). Элементы этой матрицы, которую будем обозначать $\mathbf{A}(x)$, являются полиномами от x. Рассмотрим матрицу

$$B(x, y) = \begin{bmatrix} y^T \\ \mathbf{A}(x) \end{bmatrix},$$

где $y \in \mathbb{R}^9$, и пусть $u(x)$ обозначает вектор из миноров первой строки матрицы $B(x, y)$. Тогда $\langle y, u(x)\rangle = \det(B(x, y))$. Отсюда следует, что $u(x)$ лежит в ядре $\mathbf{A}(x)$, так как каждая строка $\mathbf{A}(x)$ ортогональна $u(x)$.

Вспомогательное утверждение. $u(x) = 0$ *тогда и только тогда, когда размерность ядра оператора* $\mathbf{A}(x)$ *не меньше* 2, *то есть строки* $\mathbf{A}(x)$ *линейно зависимы.*

($\Leftarrow$) Координаты вектора $u(x)$ являются знакопеременными определителями 8×8 подматриц матрицы $\mathbf{A}(x)$, которые с необходимостью будут нулевыми в силу линейной зависимости строк.

($\Rightarrow$) Имеем $0 = \langle y, 0\rangle = \langle y, u(x)\rangle = \det(B(x, y))$ для всех $y \in \mathbb{R}^9$. Это означает, что даже если $y \neq 0$ и ортогонален строкам $\mathbf{A}(x)$, строки $B(x, y)$ линейно зависимы а, следовательно, и строки $\mathbf{A}(x)$ должны быть линейно зависимыми. ∘

Используем доказанное вспомогательное утверждение для завершения доказательства теоремы. Определим матрицу $U(x) \in \mathbb{H}^{3\times3}$ с координатами вектора $u(x)$ в выбранном ранее базисе. Элементы матрицы $U(x)$ являются полиномами от x. Отображение $\mathcal{A}$ инъективно тогда и только тогда, когда $\det U(x) \neq 0$. Для обоснования рассмотрим три случая:

1) $U(x) = 0$, т. е. $u(x) = 0$, что эквивалентно $\dim\ker(\mathbf{A}(x)) \geqslant 2$. По тесту Кахилла, $\mathcal{A}$ не инъективно;

2) $\ker(U(x)) \neq 0$, но $\det U(x) = 0$. По тесту Кахилла, $\mathcal{A}$ не инъективно;

3) $\ker(U(x)) \neq 0$, и $\det U(x) \neq 0$. По тесту Кахилла, $\mathcal{A}$ инъективно.

Определим вещественное алгебраическое многообразие $V = \{x : \det U(x) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{48}$. Заметим, что $\mathcal{A}$ инъективно, только если $x \in V^c$. Множество V^c открыто в топологии Зарисского, поэтому оно либо пусто, либо всюду плотно в евклидовой топологии. Первая возможность исключается, так как, например, следующая матрица проходит тест Кахилла:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & i \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 2i & i & -1 \end{bmatrix}.$$

При таком выборе координат ядро оператора матричного анализа $\mathbf{A}$ одномерно и порождается невырожденной матрицей. Следовательно, соответствующее отображение $\mathcal{A}$ инъективно. $\bullet$

Теорема 7 опровергает высказанную ранее т. н. гипотезу Райта (Wright) [10] о том, что

$$N^*(M) \leqslant 3M - 2.$$

Авторы благодарны И.Я. Новикову за полезные обсуждения.

Литература

[1] Balan R., Casazza P., Edidin D. On signal reconstruction without noizy phase Applied and Computational Harmonic Analysis (ACHA). 2006. V. 20. I. 3. PP. 345–356.

[2] Bodmann B. G., Hammen N. Stable phase retrieval with low-redundancy frames. Available online: arXiv:1302.5487.

[3] Bandeira A., Cahill J., Mixon D., Nelson A. Saving phase: Injectivity and stability for phase retrieval. Applied and Computational Harmonic Analysis (ACHA). 2014. V. 37. I. 1. PP. 106–125.

[4] Fickus M., Mixon D.G., Nelson A.A., Wang Ya. Phase retrieval from very few measurements. Linear Algebra and Its Applications. 2014. V. 449. PP. 475–499.

[5] Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А. Теория всплесков. М.: Физматлит. 2005.

[6] Новиков С.Я., Лихобабенко М.А. Фреймы конечномерных пространств. Самара. Самарский госуниверситет. 2013.

[7] Alexeev B., Cahill J., Mixon D. Full spark frames. Journal of Fourier Analysis and Applications. 2012. V. 18. I. 6. PP. 1167–1194.

[8] Heinosaary T., Mazzarella I., Wolf M.M. Quantum tomography ... Available online: arXiv:1206.1405.

[9] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. Москва. Мир. 1989.

[10] Vogt A. Position and momentum distributions do not determine the quantum mechanical state. In: Mathematical Foundations of Quantum Theory (Marlow A. R.,ed.). Academic Press. New York. 1978. PP. 365-372.

References

[1] Balan R., Casazza P., Edidin D. *On signal reconstruction without noizy phase* Applied and Computational Harmonic Analysis (ACHA). 2006. V. 20. I. 3. PP. 345–356.

[2] Bodmann B. G., Hammen N. *Stable phase retrieval with low-redundancy frames.* Available online: arXiv:1302.5487.

[3] Bandeira A., Cahill J., Mixon D., Nelson A. *Saving phase: Injectivity and stability for phase retrieval.* Applied and Computational Harmonic Analysis (ACHA). 2014. V. 37. I. 1. PP. 106–125.

[4] Fickus M., Mixon D. G., Nelson A. A., Wang Ya. *Phase retrieval from very few measurements.* Linear Algebra and Its Applications. 2014. V. 449. PP. 475–499.

[5] Novikov I.Ya., Protasov V. Yu., Skopina M. A. *Wavelet theory* Moscow, Physmatlit. 2005.

[6] Novikov S. Ya., Likhobabenko M. A. *Frames in finitedimensional spaces.* Samara. Samara University. 2013.

[7] Alexeev B., Cahill J., Mixon D. *Full spark frames.* Journal of Fourier Analysis and Applications. 2012. V. 18. I. 6. PP. 1167–1194.

[8] Heinosaary T., Mazzarella I., Wolf M. M. *Quantum tomography ...* Available online: arXiv:1206.1405.

[9] Horn R., Johnson Ch. *Matrix Analysis.* Moscow, Mir. 1989.

[10] Vogt A. Position and momentum distributions do not determine the quantum mechanical state. In: Mathematical Foundations of Quantum Theory (Marlow A. R.,ed.). Academic Press. New York. 1978. PP. 365–372.

S.Y. Novikov, M.E. Fedina[3]

RESTORING THE SIGNAL BY MODULES OF MEASUREMENT

The questions of the selection of vectors in finite-dimensional real and complex spaces so that the modules of scalar products of these vectors with the unknown vector were possible to restore it, are observed.

Also, the injectivity of nonlinear mappings is studied.

Key words: space, signal, systems of vectorsв, injectivity of mappings, scalar products.

Статья поступила в редакцию 15/ *VI*/2016.

The article received 15/ *VI*/2016.

[3] *Novikov Sergey Yakovlevich* (nvks@ssau.ru), the Dept. of Theory of Probability and Mathematical Statistics, Samara University, Samara, 443011, Russian Federation.

Fedina Maria Efimovna (phedina@ssau.ru), the Dept. of Security of Information Systems, Samara University, Samara, 443011, Russian Federation.