УДК 517.956.3

В.Б. Дмитриев[1]

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

В работе рассматриваются начально-краевые задачи с нелокальными граничными условиями, содержащими интегральный оператор, для уравнения четвертого порядка. Доказана единственность решения. Рассмотрены вспомогательные задачи. Применен метод регуляризации, получены априорные оценки решения. Доказана разрешимость вспомогательных задач и операторного уравнения, приводящие к результату разрешимости исходных задач.

Ключевые слова: уравнение 4-го порядка, нелокальные условия, теоремы вложения, обобщенное решение, пространства Соболева.

Введение

Нелокальные задачи с интегральными условиями для дифференциальных уравнений с частными производными в настоящее время весьма активно изучаются, однако в основном рассматриваются уравнения второго порядка. Отметим некоторые из недавних работ по исследованию нелокальных задач для гиперболических и параболических уравнений [1], [2], [3] и список литературы в них.

Многочисленные работы по исследованию уравнений высокого порядка в своем большинстве связаны с изучением классических начальных и начально-краевых задач. В книге "Неклассические уравнения математической физики высокого порядка"[4] приведен обширный перечень работ, посвященных этим вопросам. Добавим к нему несколько более поздних работ: [5], [6].

Важный шаг был сделан в работе А. И. Кожанова и Л. С. Пулькиной [8], где была доказана однозначная разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений.

В настоящей работе доказана однозначная обобщенная разрешимость задачи с нелокальным условием для уравнения четвертого порядка, содержащим как интегральный оператор от искомого решения, так и значение производной от него на границе.

Дмитриев Виктор Борисович (dmitriev_v.b@mail.ru), Самарский колледж железнодорожного транспорта им. А.А. Буянова, 443066, Российская Федерация, г. Самара, 1-й Безымянный переулок, 18.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv -D_t^4\, u - \left(a(x,t)\, u_x\right)_x + c(x,t)\, u = f(x,t) \tag{1.1}$$

в прямоугольнике $Q_T = \{(x,\tau) : 0 < x < l, 0 < \tau < T\}$, и поставим для него следующие задачи:

Задача 1. Найти в области Q_T решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям:

$$u(x,0) = u_t(x,0) = u_{tt}(x,0) = 0,\ u_t(x,T) = 0, \tag{1.2}$$

$$u_x(l,t) = 0 \tag{1.3}$$

и нелокальному условию:

$$u_x(0,t) = \int\limits_0^l K(y)\, u(y,t)\, dy. \tag{1.4}$$

Задача 2. Найти в области Q_T решение уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным условиям (1.2), нелокальному условию (1.4) и условию

$$u(l,t) = 0. \tag{1.5}$$

Функция $K(y)$ предполагается заданной в $[0,l]$. При этом мы потребуем выполнения условий:

$$0 < \nu \leqslant a(x,t) \leqslant \mu. \tag{1.6}$$

Обозначим $W_2^{2,4}(Q_T)$ замыкание множества гладких функций, удовлетворяющих условиям (1.2), по норме

$$\|u\|_{2,4}^2 = \int\limits_0^T \left(\|u\|^2_{W_2^2(0,l)} + \|D_2^4 u\|^2_{L_2(0,l)}\right)\, dt.$$

Введем пространство

$$V(Q_T) = \{u(x,t) : u \in W_2^{2,4}(Q_T), D_t^4\, u \in L_2(Q_T)\};$$

введём обозначение

$$B_0(\lambda) = \sup_t \left|\lambda\, a(0,t) - a_t(0,t)\right|.$$

Получим условия единственности и затем условия существования решения каждой из задач 1 и 2 из пространства $W_2^{2,4}(Q_T)$; затем получим некоторый общий результат – условия существования единственного решения. Верна

Некоторые оценки. *Пусть выполняются следующие условия:*

$$c \in C^1(\overline{Q_T}); a,\ a_t,\ a_x,\ a_{xx},\ a_{xxt} \in C(\overline{Q_T}), \tag{1.7}$$

$$c(x,t)>0 \quad \forall (x,t)\in Q_T, -c_t(x,t)>0; K\in C[0,l]; \tag{1.8}$$

$$f(x,t)\in L_2(Q_T), f_x(x,t); \tag{1.9}$$

$$|\, a,\, a_t,\, a_x\,| \leqslant A_0; \tag{1.10}$$

далее, пусть для $k_0=\int\limits_0^l K^2(y)\,dy$ *выполняются неравенства*

$$k_0\,A_0\,T<\frac{2}{\sqrt{3}}; k_0\,A_0\,a(x,t)-a_t(x,t)\geqslant \rho_1; \tag{1.11}$$

$$c(x,T)-\frac{\nu+l\,a(0,T)}{\nu\,l}\,a(0,T)-k_0\,a(0,T)\geqslant 0; \tag{1.12}$$

$$k_0\,A_0\,c(x,t)-c_t(x,t)-\frac{\rho_1+2A_0\,l}{\rho_1\,l}\,A_0-$$

$$-\left(\frac{\rho_1+2(A_0^2\,k_0+A_0)\,l}{\rho_1\,l}+k_0\right)B_0(k_0\,A_0)\geqslant\delta_4>0; \tag{1.13}$$

$$c(x,T)\geqslant 0,\; c(x,T)-a_{xx}(x,T)\geqslant 0; \tag{1.14}$$

$$|c|\leqslant S_0,\; |c_x|\leqslant S_1 \quad \forall x,t; \tag{1.15}$$

$$T\leqslant\frac{3\,k_0\,A_0}{2\;(A_0+S_1\,)},\; T<\rho_1/A_0 \tag{1.16}$$

для некоторых положительных констант A_0, ρ_1, δ_4, S_0, S_1.

Основная теорема. *Пусть выполняются условия (1.7)-(1.16). Тогда решение каждой из задач 1 и 2 из пространства* $W_2^{2,4}(Q_T)$ *существует и единственно.*

Доказательство теоремы проведем по следующей схеме:

1. Докажем единственность решений задач 1 и 2.

2. Сформулируем вспомогательные задачи и покажем, что задачи 1 и 2 эквивалентны операторным уравнениям относительно граничных значений решений соответствующих вспомогательных задач.

3. Докажем разрешимость вспомогательных задач.

4. Обоснуем полную непрерывность операторов, входящих в полученные в пункте 2 уравнения. Затем объединим результаты условий единственности и существования в следующей теореме.

Успешная реализация пунктов 1 — 4 и позволит утверждать, что решения обеих задач существуют единственны.

Приступим к выполнению нашей программы.

2. Доказательство единственности решения задач

Докажем единственность решения рассматриваемых задач при выполнении оценок (1.7)-(1.16).

Доказательство. Предположим, что каждая из поставленных задач имеет два различных решения, $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Умножим (1.1), где $u_1 - u_2$, на $u_t\, e^{-\lambda\, t}$ и проинтегрируем по области Q_T. Интегрируя по частям и учитывая условия (1.2) и (1.3) или (1.4) при $x = l$, получим:

$$\frac{3}{2}\lambda \int\limits_0^T \int\limits_0^l u_{tt}^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + \frac{1}{2} \int\limits_0^T \int\limits_0^l (\lambda\, a - a_t)\, u_x^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + \frac{e^{-\lambda\, T}}{2} \int\limits_0^l u_{tt}^2|_{t=T}\, dx +$$

$$+\frac{1}{2} \int\limits_0^T \int\limits_0^l (\lambda\, c - c_t)\, u^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + \frac{e^{-\lambda\, T}}{2} \int\limits_0^l a(x,T)\, u_x^2(x,T)\, dx +$$

$$+\frac{e^{-\lambda\, T}}{2} \int\limits_0^l c(x,T)\, u^2(x,T)\, dx - \frac{\lambda^3}{2} \int\limits_0^T \int\limits_0^l u_t^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt =$$

$$= -\int\limits_0^T a(0,t)\, u_t(0,t) \int\limits_0^l K(y)\, u(y,t)\, dy\, e^{-\lambda\, t}\, dt. \qquad (2.1)$$

Рассмотрим правую часть равенства (2.1) и сделаем некоторые оценки. Последнее слагаемое в правой части (2.1) сначала преобразуем:

$$-\int\limits_0^T a(0,t)\, u_t(0,t) \int\limits_0^l K(y)\, u(y,t)\, dy\, e^{-\lambda\, t}\, dt =$$

$$= \int\limits_0^T a(0,t)\, u(0,t) \int\limits_0^l K(y)\, u_t(y,t)\, dy\, e^{-\lambda\, t}\, dt -$$

$$- \int\limits_0^T \{\lambda\, a(0,t) - a_t(0,t)\}\, u(0,t) \int\limits_0^l K(y)\, u(y,t)\, dy\, e^{-\lambda\, t}\, dt -$$

$$-a(0,T)\, u(0,T)\, e^{-\lambda\, T} \int\limits_0^l K(y)\, u_t(y,T)\, dy\, dt.$$

Теперь воспользуемся неравенством $|\, a(0,t)\,| \leqslant A_0$, вытекающим из условий теоремы, и, кроме того, заметим, что имеет место равенство

$$u(0,t) = \int\limits_x^0 u_\xi(\xi,t)\, d\xi + u(x,t).$$

Отсюда легко вывести неравенство

$$u^2(0,t) \leqslant \delta_i \int\limits_0^l u_x^2(x,t)\, dx + c(\delta_i) \int\limits_0^l u^2(x,t)\, dx, \quad c(\delta_i) = \frac{\delta_i + 1}{\delta_i\, l}. \qquad (2.2)$$

Оно справедливо для любого $t \in [0,T]$. Далее, неравенство Коши в сочетании с (2.2) приводит к оценкам:

$$\left| \int\limits_0^T a(0,t)\, u(0,t) \int\limits_0^l K(y)\, u_t(y,t)\, dy\, e^{-\lambda\, t}\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int\limits_0^T |\, a(0,t)\, |\, u^2(0,t)\, e^{-\lambda\, t}\, dt + \frac{1}{2} \int\limits_0^T |\, a(0,t)\, | \left(\int\limits_0^l K(y)\, u_t(y,t)\, dy \right)^2 e^{-\lambda\, t}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} A_0 \int\limits_0^T u^2(0,t)\, e^{-\lambda\, t}\, dt + \frac{1}{2} A_0 \int\limits_0^T \left(\int\limits_0^l K^2(y)\, dy \right) \cdot \int\limits_0^l u_t^2(y,t)\, dy\, e^{-\lambda\, t}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant A_0 \frac{\delta_1}{2} \int\limits_0^T \int\limits_0^l u_x^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + A_0 \frac{c(\delta_1)}{2} \int\limits_0^T \int\limits_0^l u^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + \frac{A_0\, k_0}{2} \int\limits_0^T \int\limits_0^l u_t^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt;$$

$$\left| \int\limits_0^T \{\lambda\, a(0,t) - a_t(0,t)\}\ u(0,t) \int\limits_0^l K(y)\, u(y,t) dy\, e^{-\lambda\, t}\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant B_0(\lambda) \frac{\delta_2}{2} \int\limits_0^T \int\limits_0^l u_x^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + B_0(\lambda) \frac{c(\delta_2)}{2} \int\limits_0^T \int\limits_0^l u^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt +$$

$$+ \frac{B_0(\lambda)\, k_0}{2} \int\limits_0^T \int\limits_0^l u^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt;$$

$$\left| a(0,T)\, u(0,T)\, e^{-\lambda\, T} \int\limits_0^l K(y)\, u(y,T)\, dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta_3}{2} a(0,T)\, e^{-\lambda\, T} \int\limits_0^l u_x^2(x,T)\, dx + \frac{c(\delta_3)}{2} a(0,T)\, e^{-\lambda\, T} \int\limits_0^l u^2(x,T)\, dx +$$

$$+ \frac{a(0,T)\, k_0}{2} e^{-\lambda\, T} \int\limits_0^l u^2(x,T)\, dx.$$

В этих неравенствах δ_i выберем следующим образом:

$$\delta_1 = \frac{\rho_1}{2\, A_0}, \delta_2 = \frac{\rho_1}{2(A_0^2\, k_0 + A_0)}, \delta_3 = \frac{\nu}{a(0,T)}.$$

Тогда

$$c(\delta_1) = \frac{\rho_1 + 2A_0\, l}{\rho_1\, l}, c(\delta_2) = \frac{\rho_1 + 2(A_0^2\, k_0 + A_0)\, l}{\rho_1\, l}, c(\delta_3) = \frac{\rho_1 + 2A_0\, l}{\rho_1\, l}.$$

Так как на основании теорем вложения ([7], с.143) справедливо неравенство ([4], с.11)

$$\|D_t^k u\|_0^2 \leqslant \varepsilon \|u\|_{1,2}^2 + c(\varepsilon)\, \|u\|_0^2,$$

где обозначено $\|u\|_0 = \|u\|_{L_2}$, то с учетом того, что функция $k_0\,A_0\,c(x,t) - c_t(x,t)$ достаточно велика, получим $\int\limits_0^T\int\limits_0^l u^2\,dx\,dt \leqslant 0$, откуда и следует утверждение теоремы.

Замечание. Можно избежать неопределенности условия «функция $k_0\,A_0\,c(x,t) - c_t(x,t)$ достаточно велика», если потребовать выполнения следующих условий, вытекающих из условий теоремы:

$$\lambda^2\,T^2 < \frac{4}{3}, c(x,T) - \frac{\nu + l\,a(0,T)}{\nu\,l}\,a(0,T) - k_0\,a(0,T) \geqslant 0;$$

$$k_0\,A_0\,c(x,t) - c_t(x,t) - \frac{\rho_1 + 2A_0\,l}{\rho_1\,l}\,A_0 -$$

$$-\left(\frac{\rho_1 + 2(A_0^2\,k_0 + A_0)\,l}{\rho_1\,l} + k_0\right)B_0(k_0\,A_0) \geqslant \delta_4 > 0.$$

Эти условия получены в результате громоздких преобразований. Продемонстрируем их вывод. Прежде всего, заметим, что справедливо представление

$$D_t v e^{-\frac{\lambda t}{2}} = \int\limits_0^t (D_t v e^{-\frac{\lambda t}{2}})_t\,dt = \int\limits_0^t D_t^2 v e^{-\frac{\lambda t}{2}}\,dt - \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^t D_t v e^{-\frac{\lambda t}{2}}\,dt,$$

из которого можно получить неравенство

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l (D_t v)^2 e^{-\lambda t}\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant T^2\int\limits_0^T\int\limits_0^l (D_t^2 v)^2 e^{-\lambda t}\,dx\,dt + \frac{\lambda^2\,T^2}{4}\int\limits_0^T\int\limits_0^l (D_t v)^2 e^{-\lambda t}\,dx\,dt. \tag{2.3}$$

Если $\lambda^2\,T^2 < 4$, то из неравенства (2.3) следует, что

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l (D_t v)^2 e^{-\lambda t}\,dx\,dt \leqslant \frac{4T^2}{4 - \lambda^2\,T^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^l (D_t^2 v)^2 e^{-\lambda t}\,dx\,dt.$$

Теперь выясним, можно ли подобрать число λ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\left(\frac{3}{2}\lambda - \frac{2\,\lambda^3\,T^2}{4 - \lambda^2\,T^2} - \frac{k_0\,A_0}{2}\right)\int\limits_0^T\int\limits_0^l u_{tt}^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt +$$

$$+\frac{e^{-\lambda\,T}}{2}\int\limits_0^l\Big\{c(x,T) - c(\delta_3)\,a(0,T) - k_0\,a(0,T)\Big\}\,u^2(x,T)\,dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^l\Big(\lambda\,c - c_t - c(\delta_1)\,A_0 - c(\delta_2)\,B_0(\lambda) - k_0\,B_0(\lambda)\Big)\,u^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt +$$

$$+\frac{e^{-\lambda T}}{2}\int\limits_0^l \Big\{a(x,T)-\delta_3\, a(0,T)\Big\}\, u_x^2(x,T)\, dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^l \Big(\lambda\, a-a_t-\delta_1\, A_0-\delta_2\, B_0(\lambda)\Big)\, u_x^2\, e^{-\lambda t}\, dx\, dt\leqslant 0,$$

которое получено из (2.1) с помощью выведенных оценок.

Положив $\lambda=\lambda_0=k_0\,A_0$, убеждаемся в том, что если выполнены наши предположения, то

$$\frac{3}{2}\lambda-\frac{2\,\lambda^3\,T^2}{4-\lambda^2\,T^2}-\frac{k_0\,A_0}{2}\geqslant 0,\; c(x,T)-c(\delta_3)\,a(0,T)-k_0\,a(0,T)\geqslant 0,$$

$$\lambda\, c-c_t-c(\delta_1)\,A_0-c(\delta_2)\,B_0(\lambda)-k_0\,B_0(\lambda)\geqslant\delta_4>0,$$

$$a(x,T)-\delta_3\,a(0,T)\geqslant 0,$$

$$\lambda\, a-a_t-\delta_1\,A_0-\delta_2\,B_0(\lambda)\geqslant 0,$$

откуда, в частности, $\int\limits_0^T\int\limits_0^l u^2\,dx\,dt\leqslant 0$, стало быть, $u(x,t)=0$, что и доказывает наше утверждение.

3. Вспомогательная задача

Теперь, следуя плану, рассмотрим вспомогательную задачу.

Задача 1а. Найти в области Q_T решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям (1.2) и граничным условиям

$$u_x(0,t)=\mu(t),\quad u_x(l,t)=0. \tag{3.1}$$

Задача 2а. Найти в области Q_T решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям (1.2) и граничным условиям

$$u_x(0,t)=\mu(t),\quad u(l,t)=0. \tag{3.2}$$

Лемма. Если выполняются условия согласования

$$D^k\mu|_{t=0}=0, k=0,1,2, D^1\mu|_{t=T}=0, \tag{3.3}$$

то задачи 1 и 2 эквивалентны операторному уравнению

$$\mu(x,t)=\int\limits_0^l K(y)\,u_i(y,t)\,dy,\; i=1,2, \tag{3.4}$$

где $u_i(x,t)$ — решения вспомогательных задач 1а и 2а соответственно.

Доказательство. Пусть задача 1 имеет решение $u(x,t)\in W_2^{2,4}(Q_T)$. Тогда существует граничное значение производной $u_x(0,t)$, которое обозначим $\mu(x,t)$. В силу условия (1.3)

$$\mu(x,t) = \int\limits_0^l K(y)\, u(y,t)\, dy.$$

Функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1.1), начальным условиям (1.2) и граничным условиям $u_x(0,t) = \mu(t), \quad u_x(l,t) = 0$, т.е. является решением задачи 1а. Пусть теперь $\mu(x,t)$ — решение уравнения (3.4), где $u(x,t)$ — решение задачи 1а, т.е. удовлетворяет уравнению (1.1), условиям (1.2) и (3.2). Но тогда эта функция, являясь решением уравнения (3.4), удовлетворяет и условию (1.3), стало быть, является решением задачи 1. Аналогичные рассуждения можно провести для задачи 2.

Теорема 3. Если выполняются условия (1.7), (1.9) основной теоремы, $\mu(x,t) \in W_2^4(0,T)$ и

$$D^k\mu|_{t=0} = 0, k = 0,1,2, \quad D^1\mu|_{t=T} = 0, \tag{3.5}$$

то существует решение задачи 1а, принадлежащее пространству $W_2^{2,4}(Q_T)$.

Доказательство. Введя новую неизвестную функцию $v(x,t)$, положив $v(x,t) = u(x,t) + w(x,t)$, где функция $w(x,t) = \dfrac{(l-x)^2}{2l}\,\mu(t)$, перейдем к задаче с однородными граничными условиями:

$$Lv = F(x,t), F(x,t) = f(x,t) - Lw, \tag{3.6}$$

$$D^k v|_{t=0} = 0, k = 0,1,2, D^1 v|_{t=T} = 0, \tag{3.7}$$

$$v_x(0,t) = 0, \quad v_x(l,t) = 0. \tag{3.8}$$

Решающую роль в доказательстве теоремы играет априорная оценка, к выводу которой мы и приступим.

4. Априорная оценка

Воспользуемся методом регуляризации. Определим оператор

$$L_\varepsilon v = Lv - \varepsilon\, v_{xxt},\ \varepsilon > 0,$$

и рассмотрим задачу: найти функцию $v(x,t) \in V(Q_T)$, удовлетворяющую уравнению

$$L_\varepsilon v = F(x,t) \tag{4.1}$$

и условиям (3.7), (3.8).

Хорошо известно [6, 13], что задача с условиями (3.7), (3.8) для уравнения (4.1) с фиксированным $\varepsilon > 0$ однозначно разрешима в нужном классе функций.

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^l L_\varepsilon v\, v_t\, e^{-\lambda t}\, dx\, dt = \int\limits_0^T \int\limits_0^l F(x,t)\, v_t\, e^{-\lambda t}\, dx\, dt.$$

Интегрируя по частям и учитывая условия (3.7), (3.8), получим:

$$\frac{3}{2}\lambda\int\limits_0^T\int\limits_0^l v_{tt}^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^l(\lambda\,a-a_t)\,v_x^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^l(\lambda\,c-c_t)\,v^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+\varepsilon\int\limits_0^T\int\limits_0^l v_{xt}^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+\frac{e^{-\lambda\,T}}{2}\int\limits_0^l a(x,T)\,v_x^2(x,T)\,dx+$$

$$+\frac{e^{-\lambda\,T}}{2}\int\limits_0^l c(x,T)\,v^2(x,T)\,dx-\frac{\lambda^3}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^l v_t^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt=$$

$$=\int\limits_0^T\int\limits_0^l F(x,t)\,v_t\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt. \tag{4.2}$$

На следующем этапе рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l L_\varepsilon v\,v_{xxt}\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt=\int\limits_0^T\int\limits_0^l F(x,t)\,v_{xxt}\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt. \tag{4.3}$$

Заметим, что с учётом $(av_x)_x=a_xv_x+av_{xx}$ имеет место

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l a_xv_x\,v_{xxt}\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt=-\int\limits_0^T\int\limits_0^l(a_xv_x)_x\,v_{xt}\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt=$$

$$=-\int\limits_0^T\int\limits_0^l(a_{xx}v_x+a_xv_{xx})\,v_{xt}\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt=$$

$$=-\int\limits_0^l a_{xx}\,\frac{v_x^2}{2}e^{-\lambda\,t}\,dx\Big|_0^T+\int\limits_0^T\int\limits_0^l(a_{xxt}-\lambda\,a_{xx})\,\frac{v_x^2}{2}e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt-\int\limits_0^T\int\limits_0^l a_x\,v_{xx}\,v_{xt}e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt.$$

С учётом начальных условий $(v_{tt}|_{t=0}=0)$ имеем:

$$v_t=\int\limits_0^t v_{\tau\tau}(x,\tau)\,d\tau,\;v_{xt}=\int\limits_0^t v_{x\tau\tau}(x,\tau)\,d\tau.$$

Эти равенства нам понадобятся в дальнейшем. Применим их в оценке слагаемых:

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l a_x\,v_{xx}\,v_{xt}e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt=\int\limits_0^T\int\limits_0^l a_x\,v_{xx}\int\limits_0^t v_{x\tau\tau}(x,\tau)\,d\tau\,e^{-\lambda\,t/2}e^{-\lambda\,t/2}\,dx\,dt.$$

$$\left|\int\limits_0^t v_{x\tau\tau}(x,\tau)\,d\tau\,e^{-\lambda\,t/2}\right|=\left|\int\limits_0^t v_{x\tau\tau}(x,\tau)\,e^{-\lambda\,t/2}\,d\tau\right|\leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^t |v_{x\tau\tau}(x,\tau)|\; e^{-\lambda\, t/2}\, d\tau \leqslant \int\limits_0^t |v_{x\tau\tau}(x,\tau)|\; e^{-\lambda\, \tau/2}\, d\tau,$$

поскольку $e^{-\lambda\,\tau/2} \geqslant e^{-\lambda\, t/2}$ в силу того, что $\tau \leqslant t$.

Далее, применяя неравенство Коши-Буняковского, получаем:

$$\left| \int\limits_0^T \int\limits_0^l a_x\, v_{xx} \int\limits_0^t v_{x\tau\tau}(x,\tau)\, d\tau\, e^{-\lambda\, t/2} e^{-\lambda\, t/2}\, dx\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^l \left(\int\limits_0^T |v_{x\tau\tau}(x,\tau)|\, e^{-\lambda\,\tau/2}\, d\tau \cdot \int\limits_0^T |a_x\, v_{xx}|\, e^{-\lambda\, t/2}\, dt \right) dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_0^l \left(\int\limits_0^T |v_{x\tau\tau}(x,\tau)| e^{-\lambda\,\tau/2}\, d\tau \right)^2 dx \right)^{\frac12} \cdot \left(\int\limits_0^l \left(\int\limits_0^T |a_x\, v_{xx}|\, e^{-\lambda\, t/2}\, dt \right)^2 dx \right)^{\frac12} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_0^l \int\limits_0^T v^2_{x\tau\tau}(x,\tau) e^{-\lambda\,\tau}\, d\tau\, dx \cdot T \right)^{\frac12} \cdot \left(\int\limits_0^l \left(\int\limits_0^T a_x^2\, dt \right) \cdot \left(\int\limits_0^T v^2_{xx} e^{-\lambda\, t}\, dt \right) dx \right)^{\frac12} \leqslant$$

$$\leqslant C_4 \left(\int\limits_0^l \int\limits_0^T v^2_{x\tau\tau}(x,\tau) e^{-\lambda\,\tau}\, d\tau\, dx \right)^{\frac12} \cdot \left(\int\limits_0^l \int\limits_0^T v^2_{xx} e^{-\lambda\, t}\, dt\, dx \right)^{\frac12}.$$

Здесь $C_4 = \left(T \cdot \sup\limits_x \int\limits_0^T a_x^2\, dt \right)^{\frac12}$. Далее, преобразование (4.3) приводит к равенству:

$$\frac32 \lambda \int\limits_0^T \int\limits_0^l {v_{xtt}}^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + \frac12 \int\limits_0^T \int\limits_0^l (\lambda\, a - a_t)\, v^2_{xx}\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt +$$

$$+ \frac12 \int\limits_0^T \int\limits_0^l (a_{xxt} - \lambda\, a_{xx})\, v^2_x\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + \varepsilon \int\limits_0^T \int\limits_0^l v^2_{xxt}\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + \frac{e^{-\lambda\, T}}{2} \int\limits_0^l a(x,T)\, v^2_{xx}(x,T)\, dx +$$

$$+ \frac{e^{-\lambda\, T}}{2} \int\limits_0^l \{c(x,T) - a_{xx}(x,T)\}\, v^2_x(x,T)\, dx - \frac{\lambda^3}{2} \int\limits_0^T \int\limits_0^l v^2_{xt}\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt =$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_0^l (\lambda\, F - F_x)\; v_{xt}\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt +$$

$$+ \int\limits_0^T \int\limits_0^l c\, v\, v_{xxt}\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt - \int\limits_0^T \int\limits_0^l a_x\, v_{xx}\, v_{xt} e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt. \tag{4.4}$$

Наконец, рассмотрим равенство

$$-\int\limits_0^T\int\limits_0^l L_\varepsilon v\, D_t^4 v\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt = -\int\limits_0^T\int\limits_0^l F(x,t)\, D_t^4 v\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt.$$

После преобразований получим:

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l (D_t^4\, v)^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + \frac{3}{2}\lambda\varepsilon\int\limits_0^T\int\limits_0^l (D_t^2\, v_x)^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt +$$

$$+\varepsilon\, d_1\int\limits_0^T\int\limits_0^l v_{xt}^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt = -\int\limits_0^T\int\limits_0^l (a\, v_x)_x\, D_t^4\, v\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_0^l cv\, D_t^4\, v\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt - \int\limits_0^T\int\limits_0^l F(x,t)\, D_t^4\, v\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt. \qquad (4.5)$$

(Здесь $d_1 = const.$) Приступим к выводу оценок. Применив неравенство Коши, получим из (4.2):

$$\frac{3}{2}\lambda\int\limits_0^T\int\limits_0^l v_{tt}^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^l (\lambda\, a - a_t)\, v_x^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^l (\lambda\, c - c_t)\, v^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + \varepsilon\int\limits_0^T\int\limits_0^l v_{xt}^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + \frac{e^{-\lambda\, T}}{2}\int\limits_0^l a(x,T)\, v_x^2(x,T)\, dx +$$

$$+\frac{e^{-\lambda\, T}}{2}\int\limits_0^l c(x,T)\, v^2(x,T)\, dx \leqslant \delta_5\int\limits_0^T\int\limits_0^l v_t^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt +$$

$$+c(\delta_5)\int\limits_0^T\int\limits_0^l F^2(x,t)\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + \frac{\lambda^3}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^l v_t^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt. \qquad (4.6)$$

В (4.4) проинтегрируем по частям

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l c\, v\, v_{xxt}\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt = -\int\limits_0^T\int\limits_0^l c_x\, v\, v_{xt}\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt - \int\limits_0^T\int\limits_0^l c\, v_x\, v_{xt}\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt,$$

а затем оценим слагаемые в правой части. Преобразовывая подынтегральное выражение и затем применяя неравенство Коши-Буняковского, получаем:

$$\left|\int\limits_0^T\int\limits_0^l c_x\, v\, v_{xt} e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt\right| = \left|\int\limits_0^T\int\limits_0^l c_x\, v\int\limits_0^t v_{x\tau\tau}(x,\tau)\, d\tau\, e^{-\lambda\, t/2} e^{-\lambda\, t/2}\, dx\, dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^l \left(\int\limits_0^T |v_{x\tau\tau}(x,\tau)|\, e^{-\lambda\, \tau/2}\, d\tau \cdot \int\limits_0^T |c_x|\cdot|v| e^{-\lambda\, t/2}\, dt\right)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_0^l \int\limits_0^T v_{x\tau\tau}^2(x,\tau)e^{-\lambda\,\tau}\,d\tau\,dx\cdot T\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int\limits_0^l\left(\int\limits_0^T c_x^2\,dt\right)\cdot\left(\int\limits_0^T v^2\,e^{-\lambda\,t}\,dt\right)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant C_5\left(\int\limits_0^l \int\limits_0^T v_{x\tau\tau}^2(x,\tau)e^{-\lambda\,\tau}\,d\tau\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int\limits_0^l \int\limits_0^T v^2 e^{-\lambda\,t}\,dt\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь $C_5=\left(T\cdot\sup\limits_x\int\limits_0^T c_x^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$.

Далее, имеем

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^l c\,v_x\,v_{xt}\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^T \int\limits_0^l(\lambda\,c-c_t)\,v_x^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt.$$

Теперь из (4.3) получим:

$$\frac{3}{2}\lambda\int\limits_0^T \int\limits_0^l v_{xtt}^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+\frac{1}{2}\int\limits_0^T \int\limits_0^l(\lambda\,a-a_t)\,v_{xx}^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^T \int\limits_0^l(\lambda\,c-c_t+a_{xxt}-\lambda\,a_{xx})\,v_x^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+\varepsilon\int\limits_0^T \int\limits_0^l v_{xxt}^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+$$

$$+\frac{e^{-\lambda\,T}}{2}\int\limits_0^l a(x,T)\,v_{xx}^2(x,T)\,dx+\frac{e^{-\lambda\,T}}{2}\int\limits_0^l\{c(x,T)-a_{xx}(x,T)\}\,v_x^2(x,T)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant c_3(\delta_6)\int\limits_0^T \int\limits_0^l|F-F_x|^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+$$

$$+\delta_6\int\limits_0^T \int\limits_0^l\left(\int\limits_0^t v_{x\tau\tau}(x,\tau)\,d\tau\right)^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+\frac{\lambda^3}{2}\int\limits_0^T \int\limits_0^l\left(\int\limits_0^t v_{x\tau\tau}(x,\tau)\,d\tau\right)^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+$$

$$+C_4\left(\int\limits_0^l \int\limits_0^T v_{x\tau\tau}^2(x,\tau)e^{-\lambda\,\tau}\,d\tau\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int\limits_0^l \int\limits_0^T v_{xx}^2 e^{-\lambda\,t}\,dt\,dx\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+C_5\left(\int\limits_0^l \int\limits_0^T v_{x\tau\tau}^2(x,\tau)e^{-\lambda\,\tau}\,d\tau\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int\limits_0^l \int\limits_0^T v^2 e^{-\lambda\,t}\,dt\,dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.7}$$

Умножим (4.6) на произвольное число $d>0$ и сложим с (4.7), получим:

$$\frac{3}{2}\,d\,\lambda\int\limits_0^T\int\limits_0^l v_{tt}^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+\frac{1}{2}\,d\int\limits_0^T\int\limits_0^l(\lambda\,a-a_t)\,v_x^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+$$

$$+\frac{3}{2}\lambda\int\limits_0^T\int\limits_0^l v_{xtt}^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^l(\lambda\,a-a_t)\,v_{xx}^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+$$

$$+\frac{1}{2}\,d\int\limits_0^T\int\limits_0^l(\lambda\,c-c_t)\,v^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+\varepsilon\,d\int\limits_0^T\int\limits_0^l v_{xt}^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+\frac{e^{-\lambda\,T}}{2}\,d\int\limits_0^l a(x,T)\,v_x^2(x,T)\,dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^l(\lambda\,c-c_t+a_{xxt}-\lambda\,a_{xx})\,v_x^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+\varepsilon\int\limits_0^T\int\limits_0^l v_{xxt}^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+$$

$$+\frac{e^{-\lambda\,T}}{2}\int\limits_0^l a(x,T)\,v_{xx}^2(x,T)\,dx+\frac{e^{-\lambda\,T}}{2}\,d\int\limits_0^l c(x,T)\,v^2(x,T)\,dx+$$

$$+\frac{e^{-\lambda\,T}}{2}\int\limits_0^l\{c(x,T)-a_{xx}(x,T)\}\,v_x^2(x,T)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant c(\delta_5)\,d\int\limits_0^T\int\limits_0^l F^2(x,t)\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+\frac{\lambda^3}{2}\,d\int\limits_0^T\int\limits_0^l\left(\int\limits_0^t v_{\tau\tau}(x,\tau)\,d\tau\right)^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+$$

$$+\delta_5\,d\int\limits_0^T\int\limits_0^l v_t^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+c_3(\delta_6)\int\limits_0^T\int\limits_0^l|F-F_x|^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+$$

$$+\delta_6\int\limits_0^T\int\limits_0^l\left(\int\limits_0^t v_{x\tau\tau}(x,\tau)\,d\tau\right)^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+\frac{\lambda^3}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^l\left(\int\limits_0^t v_{x\tau\tau}(x,\tau)\,d\tau\right)^2\,e^{-\lambda\,t}\,dx\,dt+$$

$$+C_4\left(\int\limits_0^l\int\limits_0^T v_{x\tau\tau}^2(x,\tau)e^{-\lambda\,\tau}\,d\tau\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int\limits_0^l\int\limits_0^T v_{xx}^2e^{-\lambda\,t}\,dt\,dx\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+C_5\left(\int\limits_0^l\int\limits_0^T v_{x\tau\tau}^2(x,\tau)e^{-\lambda\,\tau}\,d\tau\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int\limits_0^l\int\limits_0^T v^2e^{-\lambda\,t}\,dt\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Заметим, что теоремы вложения для анизотропных пространств гарантируют существование и принадлежность нужным классам всех производных, возникающих при интегрировании исходных равенств [4]. Далее, мы используем следующие неравенства:

$$C_4\left(\int\limits_0^l\int\limits_0^T v_{x\tau\tau}^2(x,\tau)e^{-\lambda\,\tau}\,d\tau\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int\limits_0^l\int\limits_0^T v_{xx}^2e^{-\lambda\,t}\,dt\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_4}{2} \int\limits_0^l \int\limits_0^T v_{x\tau\tau}^2(x,\tau) e^{-\lambda\,\tau}\, d\tau\, dx + \frac{C_4}{2} \int\limits_0^l \int\limits_0^T v_{xx}^2 e^{-\lambda\, t}\, dt\, dx;$$

$$C_5 \left(\int\limits_0^l \int\limits_0^T v_{x\tau\tau}^2(x,\tau) e^{-\lambda\,\tau}\, d\tau\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int\limits_0^l \int\limits_0^T v^2 e^{-\lambda\, t}\, dt\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_5}{2} \int\limits_0^l \int\limits_0^T v_{x\tau\tau}^2(x,\tau) e^{-\lambda\,\tau}\, d\tau\, dx + \frac{C_5}{2} \int\limits_0^l \int\limits_0^T v^2 e^{-\lambda\, t}\, dt\, dx.$$

Заметим, что в силу условий теоремы существования

$$c(x,T) \geqslant 0,\; c(x,T) - a_{xx}(x,T) \geqslant 0.$$

Тогда, приводя подобные слагаемые и требуя неотрицательности коэффициентов и слагаемых в левой части, после умножения на 2 получаем следующие условия, нужные нам для наших целей:

$$3\,\lambda \geqslant \frac{\lambda^3}{2} \cdot T^2 + \delta_5 \cdot T^2,$$

$$3\,\lambda \geqslant \left(T \cdot \sup_x \int\limits_0^T a_x^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}} + \left(T \cdot \sup_x \int\limits_0^T c_x^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\lambda^3}{2} \cdot T^2 + \delta_6 \cdot T^2,$$

$$\lambda\, a - a_t > \left(T \cdot \sup_x \int\limits_0^T a_x^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}},\; d\,(\lambda\, c - c_t) > \left(T \cdot \sup_x \int\limits_0^T c_x^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$d\,(\lambda\, a - a_t) + \lambda\, c - c_t + a_{xxt} - \lambda\, a_{xx} > 0.$$

Возьмём $\delta_5 = \delta_6$, тогда первое ограничение пропадает.

Заметим, что если $|a_x| \leqslant A_0$, $|c| \leqslant S_0$, $|c_x| \leqslant S_1 \quad \forall x, t$, то для выполнения второго ограничения достаточно положить

$$3\,\lambda \geqslant T\;(A_0 + S_1) + \lambda^3 \cdot \frac{T^2}{2} + \delta_6 \cdot T^2. \tag{4.8}$$

В этом равенстве параметр λ можно положить практически любым и подобрать T. Но, исходя из некоторых соображений удобства и из доказательства единственности решения, мы положим $\lambda = \lambda_0 = k_0\, A_0$.

Далее, можно положить

$$\lambda\, a - a_t > T\, A_0,\; d\,(\lambda\, c - c_t) > \lambda\, C_5, \tag{4.9}$$

$$d\,(\lambda\, a - a_t) + \lambda\, c - c_t + a_{xxt} - \lambda\, a_{xx} > T\, S_0, \tag{4.10}$$

Первое неравенство в (4.9) будет выполняться для нашего $\lambda = \lambda_0$ согласно условиям теоремы, поскольку $T < \rho_1/A_0$, а для выполнения второго, если положить d достаточно большим, достаточно потребовать $\lambda\, c - c_t \geqslant \delta_7$, где $\delta_7 > 0$. При этом, в силу условий теоремы достаточно положить $\delta_7 = \delta_4$.

Условие (4.10) выполняется в силу условий теоремы: поскольку слагаемые ограничены, то $|\lambda\, c - c_t + a_{xxt} - \lambda\, a_{xx}| < \infty$, а тогда существует такое число M, что $\lambda\, c - c_t + a_{xxt} - \lambda\, a_{xx} > -M$. Тогда неравенство (4.10) будет выполняться, если $d \geqslant \dfrac{T\, S_0 + M}{\rho_1}$. Таким образом, мы сможем выбрать достаточно большое d для того, чтобы неравенства (4.9) и (4.10) выполнялись.

Далее, для выполнения неравенства (4.8) достаточно потребовать выполнения условий $3\,\lambda/2 \geqslant T\,(A_0 + S_1)$, $3\,\lambda/2 \geqslant \lambda^3 \cdot T^2/2 + \delta_6 \cdot T^2$.

Тогда для T получаем следующие условия:

$$T \leqslant \frac{3\,\lambda}{2\,(A_0 + S_1)},\, T^2 \leqslant \frac{3\,\lambda}{\lambda^3 + 2\,\delta_6}.$$

Таким образом, T должно удовлетворять всем этим условиям, то есть, должно быть достаточно мало.

В силу произвольности δ_6 достаточно потребовать $\lambda^2\, T^2 < 3$, а это выполняется в силу условий теоремы. (В силу условий теоремы $k_0\, A_0\, T < \frac{2}{\sqrt{3}}; k_0\, A_0\, a(x,t) - a_t(x,t) \geqslant \rho_1$.)

Вооружившись полученными оценками, продолжим доказательство теоремы существования решения. Для этого применим рассуждения, совершенно аналогичные тем, с помощью которых доказана теорема единственности. При соответствующих предположениях относительно коэффициента $c(x,t)$ мы можем воспользоваться и вариантом, представленным в замечании 1. Из (4.5) и (4.7) будем иметь:

$$M_1 \int\limits_0^T \int\limits_0^l \left[v_{tt}^2 + v_{xtt}^2 + v^2 + v_x^2 + v_{xx}^2\right]\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + \varepsilon \int\limits_0^T \int\limits_0^l v_{xxt}^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt +$$

$$+ d\,\varepsilon \int\limits_0^T \int\limits_0^l v_{xt}^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt \leqslant K_2 \int\limits_0^T \int\limits_0^l \left(F^2 + F_x^2\right)\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt. \tag{4.11}$$

В правой части (4.5) сделаем оценки, заметим, что с учётом равенства: $(av_x)_x = a_x v_x + a v_{xx}$ имеет место:

$$\left| \int\limits_0^T \int\limits_0^l D_t^4\, v\, (a_x v_x + a v_{xx})\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta_8}{2} \int\limits_0^T \int\limits_0^l (D_t^4\, v)^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + c_1(\delta_8) \int\limits_0^T \int\limits_0^l v_{xx}^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + c_2(\delta_8) \int\limits_0^T \int\limits_0^l v_x^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt.$$

Здесь зависимости $c_1(\delta_8)$ и $c_2(\delta_8)$ определяются постоянными μ, A_0. Далее, имеем:

$$\left| \int\limits_0^T \int\limits_0^l c(x,t)\, v\, D_t^4\, v\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta_8}{2} \int\limits_0^T \int\limits_0^l (D_t^4\, v)^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + c_2(\delta_8) \int\limits_0^T \int\limits_0^l v^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt;$$

$$\left| \int_0^T \int_0^l F(x,t)\, v\, D_t^4\, v\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta_8}{2} \int_0^T \int_0^l (D_t^4\, v)^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + c_3(\delta_8) \int_0^T \int_0^l F^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt.$$

Положим в этих неравенствах $\delta_8 = 1/2$ и используем полученное ранее неравенство (4.11). В результате получим:

$$\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^l (D_t^4\, v)^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt + \varepsilon\, M_3 \int_0^T \int_0^l (D_t^2\, v_x)^2\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant K_3 \int_0^T \int_0^l \left(F^2 + F_x^2\right)\, e^{-\lambda\, t}\, dx\, dt. \tag{4.12}$$

Итогом проделанных преобразований и оценок является неравенство:

$$\|v\|^2_{W_2^{2,4}(Q_T)} + \varepsilon(\|D_t^2 v_x\|^2_{L_2(Q_T)} + \|v_{xt}\|^2_{L_2(Q_T)} + \|v_{xxt}\|^2_{L_2(Q_T)}) \leqslant$$

$$\leqslant K\, \|F\|^2_{W_2^{0,1}(Q_T)}, \tag{4.13}$$

справедливое для функций, принадлежащих пространству V. Эта оценка позволяет завершить доказательство теоремы 2. Действительно, обозначим $\{v^\varepsilon(x,t)\}$ — семейство решений задачи (4.1), (3.7), (3.8) для $\varepsilon > 0$. Для любой из этих функций справедлива оценка

$$\|v^\varepsilon\|^2_{W_2^{2,4}(Q_T)} + \varepsilon \|D_t v^\varepsilon_{xx}\|^2_{L_2(Q_T)} \leqslant K, \tag{4.14}$$

где $K > 0$ и не зависит от ε. Но тогда из семейства $\{v^\varepsilon(x,t)\}$ можно выделить подпоследовательность $\{v^{\varepsilon_n}(x,t)\}$ слабо сходящуюся к $v(x,t) \in W_2^{2,4}(Q_T)$ при $\varepsilon_n \to 0, n \to \infty$. Этот предел и есть единственное решение задачи 1а с однородными граничными условиями для п.в. $(x,t) \in Q_T$. Тогда $u(x,t) = v(x,t) - w_1(x,t)$ — решение задачи 1а.

Теорема 4. Если выполняются условия (5), (7) основной теоремы, $\mu(x,t) \in W_2^{2,4}(Q_T)$ и

$$\mu(x,0) = \mu_t(x,0) = \mu_{tt}(x,0) = 0, \tag{4.15}$$

$$\mu_t(x,T) = 0. \tag{4.16}$$

то существует единственное решение задачи 2а, принадлежащее пространству $W_2^{2,4}(Q_T)$.

Доказательство почти полностью совпадает с доказательством теоремы 1. Единственное отличие состоит в выборе функции $w_2(x,t) = (x - l)\, \mu(x,t)$, с помощью которой задачу 2а можно свести к задаче с однородными условиями. Получена оценка

$$\|v\|^2_{W_2^{2,4}(Q_T)} + \varepsilon(\|D_t^2 v_x\|^2_{L_2(Q_T)} + \|v_{xt}\|^2_{L_2(Q_T)} + \|D_t v_{xx}\|^2_{L_2(Q_T)}) \leqslant$$
$$\leqslant M\,\|G(x,t)\|^2_{W_2^{0,1}(Q_T)}, \tag{4.17}$$

где по-прежнему $v(x,t)$ — решение вспомогательной задачи 2а с однородными условиями, $G(x,t) = f(x,t) - L\,w_2(x,t)$ — новая правая часть после перехода к задаче с однородными условиями.

Перейдем к завершающему этапу доказательства основной теоремы.

Обозначим $u_\mu(x,t)$ — решение задачи 1а для однородного уравнения (1.1), а $u_f(x,t)$ — решение задачи 1а для уравнения (1.1), но с нулевыми условиями.

Тогда $u(x,t) = u_\mu(x,t) + u_f(x,t)$ в силу линейности задачи. Применив теперь к решению вспомогательной задачи интегральное условие из (1.3), получим:

$$\mu(x,t) = \int_0^l K(y)\,u_\mu(y,t)\,dy + g(x,t), \tag{4.18}$$

где $g(x,t) = \int_0^l K(y)\,u_f(y,t)\,dy$ и не зависит от $\mu(x,t)$. Заметим, что в силу полученных оценок и условий теоремы $g(x,t) \in W_2^4(0,T)$. Оператор $K\mu = \int_0^l K(y)\,u_\mu(y,t)\,dy$ представляет собой композицию ограниченного в силу полученных оценок оператора $u(\mu)$ и вполне непрерывного интегрального, вследствие чего является вполне непрерывным оператором, действующим из $W_2^4(0,T)$ в $W_2^4(0,T)$. Но тогда в силу леммы об эквивалентности задачи 1 и доказанной в теореме 1 единственности ее решения операторное уравнение (4.18) однозначно разрешимо. Это означает, что существует функция $\mu(x,t)$ такая, что решение задачи 1а удовлетворяет интегральному условию (1.3). Проведенные рассуждения полностью применимы к задачам 2 и 2а. Теорема полностью доказана.

Литература

[1] *Кожанов А.И., Пулькина Л.С.* О разрешимости краевых задач с нелокальными граничными условиями интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 9. С. 1166–1179.

[2] Кожанов А.И. О разрешимости некоторых пространствено нелокальных задач для линейных параболических уравнений // Вестник СамГУ. 2008. № 3(62). С. 165–174.

[3] Пулькина Л.С. Начально-краевая задача с нелокальным граничным условием для многомерного гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 8. С. 1084–1089.

[4] Егоров И.Е., Федоров В.Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Изд-во ВЦ СО РАН, Новосибирск, 1995. 133 с. 1.

[5] Kozhanov A.I. Composite Type Equations and Inverse Problems. VSP. Utrecht, 1999.

[6] Кожанов А.И. О разрешимости первой начально-краевой задачи для одного класса вырождающихся уравнений соболевского типа высокого порядка // Неклассические уравнения математической физики. Сб. научн. трудов. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2007. С. 172–181.

[7] Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. Изд. ИЛ–М., 1961. 122 с.

[8] Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Доклады Академии наук. Т. 404. № 5. 2005.

[9] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: "Наука 1973. 408 с.

[10] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: "Наука 1967. 736 с.

[11] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Уч-к для ун-тов]. Изд. 4-е - М.: "Наука 1974. 331 с.

[12] Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. 480 с.

[13] Якубов С.Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1985.

References

[1] *A. I. Kozhanov, L. S. Pulkina* On the solvability of boundary value problems with nonlocal boundary conditions of integral form for multidimensional hyperbolic equations.// Differents. equation. 2006. 42. No. 9. P. 1166-1179.

[2] *A. I. Kozhanov* On the solvability of some spatial nonlocal problems for linear parabolic equations. //Vestnik SamSU. 2008. No. 3(62). P. 165-174.

[3] *L. S. Pulkina* Initial boundary value problem with a nonlocal boundary condition for a multidimensional hyperbolic equation. //Differents. equation. 2008. T. 44. No. 8. P. 1084-1089.

[4] *Egorov I. E., Fedorov V. E.* Nonclassical equations of mathematical physics. Publishing house SB RAS computing center, Novosibirsk, 1995. 133 C. 1.

[5] *A. I. Kozhanov* Composite Type Equations and Inverse Problems. VSP. Utrecht, 1999.

[6] *A. I. Kozhanov* On the solvability of the first initial-boundary value problem for a class of degenerate Sobolev type equations of high order. //Nonclassical equations of mathematical physics. Sat. sci. works. Novosibirsk: Publishing house of Institute of mathematics of SB RAS, 2007. Pp. 172-181.

[7] *L. Harding* the Cauchy Problem for hyperbolic equations. Ed. IL – Moscow, 1961. 122 p.

[8] *A. I. Kozhanov, L. S. Pulkina* On the solvability of boundary value problems with nonlocal boundary condition of integral form for multidimensional hyperbolic equations//Doklady mathematics, vol. 404, No. 5, 2005.

[9] *O. A. Ladyzhenskaya* Boundary value problems of mathematical physics. M.: Nauka, 1973, 408 S.

[10] *Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N.* Linear and quasilinear equations of parabolic type. M.: "Nauka 1967. 736 S.

[11] *L.S. Pontryagin* Ordinary differential equations [section for universities]. Ed. 4th - M.: "Nauka 1974. 331. with silt.

[12] *Besov O. V., Il'in V. P., Nikolsky S. M.* Integral representations of functions and embedding theorems. M.: Nauka, 1975. 480 S.

[13] *S. Y. Yakubov*, Linear differential-operator equations and their applications. Baku: Elm Press, 1985.

V.B. Dmitriev [2]

A NONLOCAL PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITION FOR A FOURTH ORDER EQUATION

In this paper we consider initial-boundary problems with integral conditions for certain fourth order equation. Unique solvability of posed problems is proved. The proof is based on apriori estimates, regularization method, auxiliary problems method, embedding theorems.

Key words: equation of 4-th order, nonlocal conditions, embedding theorems, generalized solution, Sobolev spaces.

Статья поступила в редакцию 22/ *VI*/2016.

The article received 22/ *VI*/2016.

[2] *Dmitriev Victor Borisovich* (dmitriev_v.b@mail.ru), Samara College of railway transport. A. A. Buyanova, Samara, 443066, Russian Federation.