УДК 517.977.56

***И.В. Асташова, Д.А. Лашин, А.В. Филиновский***[1]

# ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫМ РЕЖИМОМ ТЕПЛИЦЫ

При выращивании растений в промышленных теплицах требуется поддерживать температуру в точке роста растений, находящейся на фиксированной высоте, в соответствии с заданным суточным графиком температур, допуская малые отклонения. При этом можно увеличивать температуру, увеличивая подогрев пола теплицы и уменьшать температуру, открывая форточки на ее потолке. Далее поставим задачу поддержания на некоторой заданной высоте $c$ температуры $z(t)$ в течение промежутка времени $0 \leqslant t \leqslant T$. Для решения задачи предлагается и анализируется математическая модель, использующая уравнение теплопроводности. Физический смысл данной задачи заключается в том, что на одном конце бесконечно тонкого стержня длины $l$ (высота теплицы) в течение времени $T$ поддерживают температуру $\phi(t)$ (управляющая функция), а на другом конце задан тепловой поток $\psi(t)$. Требуется найти такую управляющую функцию $\phi_0(t)$, при которой температура в определенной точке $c$ была бы максимально близка к заданной температуре $z(t)$. Оценка качества управления осуществляется с помощью квадратичного интегрального функционала.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, температурный режим, теплица, уравнение теплопроводности, квадратичный интегральный функционал.

## Введение

Для решения задачи поддержания оптимальной температуры в точке роста растения в промышленной теплице предлагается математическая модель, основанная на уравнении теплопроводности с переменным коэффициентом, не зависящим от времени. Первые результаты, полученные на базе аналогичной модели, где использовалось уравнение теплопроводности с постоянным коэффициентом, были



*Асташова Ирина Викторовна* (ast@diffiety.ac.ru), кафедра дифференциальных уравнений, механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, 119991, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, 1; кафедра высшей математики, факультет МЭСИ, Российский экономический университет им.Г.В.Плеханова, 117997, Россия, Москва, Стремянный переулок, 36.

*Лашин Дмитрий Александрович* (dalasin@gmail.com), ООО НПФ ФИТО, 142784, Российская Федерация, г. Москва, Московский, 35-12.

*Филиновский Алексей Владиславович* (flnv@yandex.ru), кафедра высшей математики, Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана, 105005, Российская Федерация, г. Москва, 2-я Бауманская ул., 5; кафедра дифференциальных уравнений, механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, 119991, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, 1.

получены в работах [1] – [3]. Некоторые методы доказательства основных результатов содержатся в [4] и [5]. Подобные экстремальные задачи с интегральными функционалами рассматривались различными авторами ([6] – [9]). Обзор ранее полученных результатов можно найти в работе [10], библиография последних работ содержится в [11]. Задача минимизации функционала с финальным наблюдением и задача минимизации времени управления рассматривались в работах [7] – [11]. См. также [12], [13].

# 1. Основные обозначения и постановка задачи

**1.** Рассмотрим смешанную задачу для уравнения теплопроводности

$$u_t = (a(x)u_x)_x, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{1.1}$$

с достаточно гладким коэффициентом $a(x)$, удовлетворяющим условию

$$0 < a_0 \leqslant a(x), \ \ x \in [0, l],$$

включающую краевые условия

$$\begin{array}{l} u(0,t) = \phi(t), \\ u_x(l,t) = \psi(t), \end{array} \quad t > 0, \tag{1.2}$$

и начальные условия

$$u(x, 0) = 0, \ \ 0 < x < l, \tag{1.3}$$

где $\phi \in W_2^1(0,T)$, $\psi \in W_2^1(0,T)$ для любого $T > 0$.

В этой работе мы будем предполагать, что $\psi(t)$ — заданная функция, а $\phi(t)$ — искомая управляющая функция.

Пусть $Q_T = (0,l) \times (0,T)$, а $V_2^{1,0}(Q_T)$ (см. [14], ч. 1, §1(**2**)) — банахово пространство, состоящее из элементов $W_2^{1,0}(Q_T)$ с конечной нормой

$$|u|_{Q_T} = \sup_{0<t<T} \left( \int_0^l u(x,t)^2 dx \right)^{1/2} + \left( \int_{Q_T} u_x(x,t)^2 dxdt \right)^{1/2}, \tag{1.4}$$

имеющих непрерывно меняющиеся по $t \in [0,T]$ следы из $L_2(0,l)$ на сечениях $(0,l)$.

Обозначим через $\widetilde{W}_2^1(Q_T)$ пространство, состоящее из таких элементов $\eta(x,t) \in W_2^1(Q_T)$, что $\eta(\cdot, T) = 0$, $\eta(0, \cdot) = 0$.

Будем рассматривать обобщенное (слабое) решение задачи (1.1)–(1.3) из энергетического класса, то есть такую функцию $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, что $u(0,t) \equiv \phi(t)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} \left(a(x)u_x(x,t)\eta_x(x,t) - u(x,t)\eta_t(x,t)\right) dxdt = a(l) \int_0^T \psi(t)\eta(l,t)dt \tag{1.5}$$

для любой функции $\eta(x,t) \in \widetilde{W}_2^1(Q_T)$.

Имеет место следующая теорема, которую приведем без доказательства.

**Теорема 2.1.** *Обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3) из класса $V_2^{1,0}(Q_T)$ существует, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$|u|_{Q_T} \leqslant C\big(\|\phi\|_{W_2^1(0,T)} + \|\psi\|_{W_2^1(0,T)}\big), \tag{1.6}$$

*где постоянная $C$ не зависит от $\phi$ и $\psi$.*

Отметим, что доказательство существования решения проводится методом Галеркина, а доказательство единственности и оценка нормы решения получены с использованием энергетического неравенства.

Обозначим это единственное решение $u_\phi$.

**2.** Далее поставим задачу поддержания на некоторой заданной высоте $c$ температуры $z(t)$ в течение всего промежутка времени $0 \leqslant t \leqslant T$.

Рассмотрим задачу (1.1)–(1.3). Пусть $z \in L_2(0,T)$. Обозначим через $\Phi_M$, где $M > 0$, множество функций

$$\Phi_M = \{\phi \in W_2^1(0,T),\ \ \|\phi\|_{W_2^1(0,T)} \leqslant M\}.$$

Для произвольного $c \in (0,l]$ определим функционал

$$J[\phi] = \int_0^T (u_\phi(c,t) - z(t))^2 dt \tag{1.7}$$

Рассмотрим задачу минимизации данного функционала. Обозначим

$$\inf_{\phi \in \Phi_M} J[\phi] = m. \tag{1.8}$$

Физический смысл данной задачи заключается в том, что на одном конце бесконечно тонкого стержня длины $l$ в течение времени $T$ поддерживают температуру $\phi(t)$ (управляющая функция), а на другом конце задан тепловой поток $\psi(t)$. Требуется найти такую управляющую функцию $\phi_0(t)$, при которой температура в фиксированной точке $x = c$ была бы максимально близка к заданной температуре $z(t)$. Оценка качества управления осуществляется с помощью функционала $J[\phi]$.

## 2. Существование и единственность оптимальной управляющей функции

**Теорема 3.1.** *Существует единственная функция $\phi_0(t) \in \Phi_M$, для которой $m = J[\phi_0]$.*

**Доказательство теоремы.**

В доказательстве существования и единственности минимизирующей функции функционала $J$ используется следующая лемма.

**Лемма 3.1** *Пусть $A$ — выпуклое замкнутое подмножество гильбертова пространства $H$. Тогда для любого $x \in H$ существует единственный элемент $y \in A$, для которого*

$$\|x - y\| = \inf_{z \in A} \|x - z\|. \tag{2.1}$$

Обозначим

$$B_M = \{u_\phi(c,\cdot),\ \phi \in \Phi_M\} \subset L_2(0,T)$$

и докажем, что $B_M$ — выпуклое замкнутое подмножество в $L_2(0,T)$. Для любых $y_j = u_{\phi_j}(c,\cdot) \in B_M,\ j = 1,2,$ имеем $\|\phi_j\|_{W_2^1(0,T)} \leqslant M,\ j = 1,2.$ Следовательно, для всех $\alpha \in (0,1)$ выполняется неравенство

$$\|\alpha\phi_1 + (1-\alpha)\phi_2\|_{W_2^1(0,T)} \leqslant \alpha\|\phi_1\|_{W_2^1(0,T)} + (1-\alpha)\|\phi_2\|_{W_2^1(0,T)} \leqslant M,$$

так что $\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2 \in B_M$ и множество $B_M$ выпукло.

Теперь докажем, что $B_M$ замкнуто в $L_2(0,T)$.

Пусть функции $y_k = u_{\phi_k}(c,\cdot) \in B_M$ образуют фундаментальную последовательность в $L_2(0,T)$, стремящуюся к $y \in L_2(0,T)$. Соответствующие функции $\{\phi_k\} \in \Phi_M$ образуют слабо предкомпактное множество в $W_2^1(0,T)$. Таким образом, для некоторой подпоследовательности $\phi_{k_j}$ существует слабый предел $\phi \in W_2^1(0,T)$ при $j \to \infty$. Из свойств слабо сходящихся последовательностей в гильбертовом пространстве (см. [15], Гл. 1, §1, Т. 1.1) следует

$$\|\phi\|_{W_2^1(0,T)} \leqslant \limsup_{j\to\infty} \|\phi_{k_j}\|_{W_2^1(0,T)} \leqslant M, \tag{2.2}$$

так что $\phi \in \Phi_M$. Теперь, по теореме Банаха–Сакса (см. [16], Ch. 2, Sec. 3) существует такая подпоследовательность $k_{j_n}$, что

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{\phi}_n - \phi\|_{W_2^1(0,T)} = 0, \tag{2.3}$$

где $\tilde{\phi}_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{l=1}^{n} \phi_{k_{j_l}}$. Следовательно,

$$\|\tilde{\phi}_n\|_{W_2^1(0,T)} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} \|\phi_{k_{j_l}}\|_{W_2^1(0,T)} \leqslant M, \tag{2.4}$$

и, используя (2.2), мы получим

$$\tilde{y}_n = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} y_{k_{j_l}} \in B_M.$$

Таким образом, для соответствующей последовательности решений

$$\tilde{u}_n = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} u_{\phi_{k_{j_l}}}$$

из оценки (1.6) мы получим неравенства

$$|\tilde{u}_m - \tilde{u}_n|_{Q_T} \leqslant C\|\tilde{\phi}_m - \tilde{\phi}_n\|_{W_2^1(0,T)} \to 0, \quad m,n\to\infty. \tag{2.5}$$

Функция $\tilde{u}_n$ является слабым решением задачи

$$\begin{aligned} (\tilde{u}_n)_t &= (a(x)(\tilde{u}_n)_x)_x, && 0<x<l, && T>t>0,\\ \tilde{u}_n(0,t) &= \tilde{\phi}_n(t), && && T>t>0,\\ (\tilde{u}_n)_x(l,t) &= \psi(t), && && T>t>0,\\ \tilde{u}_n(x,0) &= 0, && 0<x<l. \end{aligned}$$

Это означает, что $\tilde{u}_n(0,t) = \tilde{\phi}_n(t)$ и интегральное тождество

$$\int_{Q_T} (a(x)(\tilde{u}_n(x.t))_x\eta_x(x,t) - \tilde{u}_n(x.t)\eta_t(x.t))\,dxdt = a(l)\int_0^T \psi(t)\eta(l,t)dt \tag{2.6}$$

выполняется для каждой функции $\eta \in \widetilde{W}_2^1(Q_T)$. Принимая во внимание соотношения (2.3), (2.5) и (2.6), мы видим, что существует предельная функция $u = u_\phi \in V_2^{1,0}(Q_T)$, которая является слабым решением задачи (1.1)–(1.3) с граничной функцией $\phi$ и

$$|u - \tilde{u}_n|_{Q_T} \leqslant C\|\phi - \tilde{\phi}_n\|_{W_2^1(0,T)}. \tag{2.7}$$

Таким образом, по неравенству, следующему из теорем вложения (см. [15], гл. 1, § 6, (6.15)), мы получим

$$\begin{aligned} \|y - \tilde{u}_n(c,\cdot)\|_{L_2(0,T)} &= \|u(c,\cdot) - \tilde{u}_n(c,\cdot)\|_{L_2(0,T)}\\ &\leqslant |u - \tilde{u}_n|_{Q_T} \leqslant C\|\phi - \tilde{\phi}_n\|_{W_2^1(0,T)}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Из (2.8) следует, что $y = u(c, \cdot) \in B_M$ и $B_M$ является замкнутым подмножеством в $L_2(0, T)$.

Таким образом, по лемме 3.1 существует единственная функция $y(t) = u(c, t)$, где $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$ — решение задачи (1.1)–(1.3) с такой функцией $\phi = \phi_0 \in \Phi_M$, что

$$\inf_{\phi \in \Phi_M} J[\phi] = J[\phi_0]. \tag{2.9}$$

Докажем, что такая функция $\phi_0 \in \Phi_M$ единственна. Если это не так, то рассмотрим две такие функции $\phi_1$, $\phi_2$ и соответствующую пару решений $u_1$, $u_2$. Функция $\tilde{u} = u_1 - u_2$ является решением задачи

$$\tilde{u}_t = (a(x)\hat{u}_x)_x, \qquad 0 < x < l, \qquad 0 < t < T, \tag{2.10}$$

$$\tilde{u}(0, t) = \phi_1(t) - \phi_2(t) = \tilde{\phi}(t), \qquad 0 < t < T, \tag{2.11}$$

$$\tilde{u}(c, t) = 0, \qquad 0 < t < T, \tag{2.12}$$

$$\tilde{u}_x(l, t) = 0, \qquad 0 < t < T, \tag{2.13}$$

$$\tilde{u}(x, 0) = 0 \qquad 0 < x < l. \tag{2.14}$$

Теперь мы докажем, что функция $\tilde{u}$ в прямоугольнике $Q_T^{(c)} = (c, l) \times (0, T)$ совпадает с решением задачи

$$\hat{u}_t = (a(x)\hat{u}_x)_x, \qquad c < x < l, \qquad 0 < t < T, \tag{2.15}$$

$$\hat{u}(c, t) = 0, \qquad 0 < t < T, \tag{2.16}$$

$$\hat{u}_x(l, t) = 0, \qquad 0 < t < T, \tag{2.17}$$

$$\hat{u}(x, 0) = 0, \qquad c < x < l. \tag{2.18}$$

Чтобы доказать это, достаточно положить в интегральном тождестве (1.5) функцию $\eta$ равной 0 на $[0, c] \times [0, T]$. Но решение задачи (2.15)–(2.18) равно нулю на $[c, l] \times [0, T]$, следовательно, мы имеем

$$\tilde{u}(x, t) = 0, \quad c < x < l, \quad 0 < t < T. \tag{2.19}$$

Теперь мы докажем, что

$$\tilde{u}(x, t) = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T. \tag{2.20}$$

Заметим, что по теореме 2 из [17], §11, слабое решение $\tilde{u}$ является классическим решением уравнения (2.10) в $Q_T$. Теперь мы используем теорему 5 из [18], §3, где доказано следующее утверждение. Рассмотрим такую функцию $u \in C^{2,1}(\Omega)$, $\Omega \subset R^2$, что

$$u_t = (a(x)u_x)_x, \quad (x, t) \in \Omega \subset R^2.$$

Пусть $G_0$ — связная компонента множества $\Omega \cap \{t = t_0\}$, а $\widetilde{G}$ – связное открытое подмножество множества $G_0$. Тогда если $u|_{\widetilde{G}} = 0$, то $u|_{G_0} = 0$.

Применяя эту теорему к решению $\tilde{u}$ задачи (2.10)–(2.14) для любого $t_0 \in (0, T)$ и $G_0 = (0, l) \times \{t_0\}$, $\widetilde{G} = (c, l) \times \{t_0\}$, мы получим, что из (2.19) следует (2.20). Таким образом, имеем $u(x, t) = 0$ для всех $x \in (0, l)$ и $t \in (0, T)$. Это означает, что $\tilde{\phi}(t) = \tilde{u}(0, t) = 0$. Теорема доказана.

Отметим, что с помощью аналогичных рассуждений можно доказать теоремы существования и единственности для других важных классов управляющих функций.

Обозначим через $\Phi_M^0$ класс управляющих функций

$$\Phi_M^0 = \{\phi \in W_2^1(0, T) : \ \|\phi\|_{W_2^1(0,T)} \leqslant M, \ \phi(0) = 0\}.$$

**Теорема 3.2.** *Существует единственная функция* $\phi_0(t) \in \Phi_M^0$, *для которой*
$$\inf_{\phi\in\Phi_M^0} J[\phi] = J[\phi_0].$$

Обозначим через $\bar{\Phi}_M^0$ класс управляющих функций
$$\bar{\Phi}_M^0 = \{\phi \in W_2^1(0,T) : \ \|\phi\|_{W_2^1(0,T)} \leqslant M, \ \phi_1 \leqslant \phi(t) \leqslant \phi_2\}$$
с некоторыми постоянными $\phi_1$ и $\phi_2$.

**Теорема 3.3.** *Существует единственная функция* $\phi_0(t) \in \bar{\Phi}_M^0$, *для которой*
$$\inf_{\phi\in\bar{\Phi}_M^0} J[\phi] = J[\phi_0].$$

## 3. О точной управляемости

Наряду с вопросом о существовании и единственности решения экстремальной задачи, важным вопросом является точная управляемость. Под точной управляемостью будем понимать возможность получения в точке $x = c$ следа $u(c,t)$ почти всюду совпадающего на $[0,T]$ с заданной функцией $z(t)$. Соответственно, точным управлением будем называть такую функцию $\phi_0 \in \Phi_M$, при которой функционал $J[\phi_0]$ обращается в нуль:
$$J[\phi_0] = \int_0^T (u_{\phi_0}(c,t) - z(t))^2\, dt = 0.$$

Следующая теорема показывает, что множество функций $z \in L_2(0,T)$, допускающих точную управляемость, достаточно "мало".

**Теорема 4.1.** *Множество всех функций* $z \in L_2(0,T)$, *для которых возможна точная управляемость, т.е.* $J[\phi] = 0$ *для некоторого* $\phi \in \Phi_M$, *является множеством первой категории в* $L_2(0,t)$.

**Доказательство.** Рассмотрим уравнение (1.1) для функции $u_1 \in V_2^{1,0}(Q_T)$ с краевыми условиями
$$u_1(0,t) = \phi_1(t), \qquad 0 < t < T,$$
$$(u_1)_x(l,t) = \psi(t), \qquad 0 < t < T,$$
и такое же уравнение для функции $u_2(x,t) \in V_2^{1,0}(Q_T)$ с краевыми условиями
$$u_2(0,t) = \phi_2(t), \qquad 0 < t < T,$$
$$(u_2)_x(l,t) = \psi(t), \qquad 0 < t < T.$$
Функция $\tilde{u} = u_1 - u_2$ является решением уравнения (1.1) с краевыми условиями
$$\tilde{u}(0,t) = \tilde{\phi}(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t), \qquad 0 < t < T, \tag{3.1}$$
$$\tilde{u}_x(l,t) = 0, \qquad 0 < t < T, \tag{3.2}$$
и начальным условием
$$\tilde{u}(x,0) = 0, \qquad 0 < x < l. \tag{3.3}$$
Теперь рассмотрим в прямоугольнике $Q_T^{(2l)} = (0,2l) \times (0,T)$ задачу
$$\bar{u}_t = (\bar{a}(x)\bar{u}_x)_x, \quad 0 < x < 2l, \quad 0 < t < T, \tag{3.4}$$
$$\bar{u}(0,t) = \tilde{\phi}(t), \qquad 0 < t < T, \tag{3.5}$$
$$\bar{u}(2l,t) = \tilde{\phi}(t), \qquad 0 < t < T, \tag{3.6}$$
$$\bar{u}(x,0) = 0, \qquad 0 < x < 2l. \tag{3.7}$$

где $\bar{a}(x) = a(x)$, $x \in (0,l)$, $\bar{a}(x) = a(2l-x)$, $x \in (l,2l)$. Слабое решение задачи (3.4)–(3.7) — это функция $\bar{u}(x,t) \in V_2^{1,0}(Q_T^{(2l)})$, удовлетворяющая краевым условиям $u(0,t) = u(2l,t) = \tilde{\phi}(t)$ и интегральному тождеству

$$\int_{Q_T^{(2l)}} \big(\bar{a}(x)\bar{u}_x(x,t)\eta_x(x,t) - \bar{u}(x,t)\eta_t(x,t)\big)dxdt = 0 \tag{3.8}$$

для любой такой функции $\eta \in W_2^1(Q_T)$, что $\eta(\cdot,T) = 0$, $\eta(0,\cdot) = 0$, $\eta(2l,\cdot) = 0$. Из равенства(3.8) следует

$$\bar{u}(x,t) = \tilde{u}(x,t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T. \tag{3.9}$$

По принципу максимума для слабых решений (см. [14], ч. 3, §7, теорема 7.2), решение $\bar{u}(x,t)$ удовлетворяет неравенствам

$$\operatorname{ess}\inf_{t\in[0,T]} \tilde{\phi}(t) \leqslant \bar{u}(x,t) \leqslant \operatorname{ess}\sup_{t\in[0,T]} \tilde{\phi}(t). \tag{3.10}$$

Из (3.10) получим

$$\operatorname{ess}\sup_{Q_T} |\tilde{u}| \leqslant \operatorname{ess}\sup_{0<t<T} |\phi_1(t) - \phi_2(t)|, \tag{3.11}$$

и, следовательно,

$$\operatorname{ess}\sup_{0<t<T} |\tilde{u}(c,t)| \leqslant \operatorname{ess}\sup_{0<t<T} |\phi_1(t) - \phi_2(t)|. \tag{3.12}$$

Интегрируя неравенство (3.12), мы получим

$$\int_0^T \tilde{u}^2(c,t)dt \leqslant T\left(\sup_{0<t<T} |\phi_1(t) - \phi_2(t)|\right)^2. \tag{3.13}$$

Пусть функции $\phi_1(t)$ и $\phi_2(t)$ являются точными управляющими функциями для данных $z_1(t)$ и $z_2(t)$. Это означает, что

$$J[\phi_1] = \int_0^T (u_{\phi_1}(c,t) - z_1(t))^2 dt = 0,$$

$$J[\phi_2] = \int_0^T (u_{\phi_2}(c,t) - z_2(t))^2 dt = 0.$$

В этом случае неравенство (3.13) влечет неравенство

$$\int_0^T (z_1(t) - z_2(t))^2\, dt \leqslant T\left(\operatorname{ess}\sup_{0<t<T} |\phi_1(t) - \phi_2(t)|\right)^2 \tag{3.14}$$

для произвольных функций $z_1(t)$ и $z_2(t)$, допуская точную управляемость.

Пусть $Z \subset L_2(0,T)$ — множество функций $z(t)$, допускающих точное управление. Имеем $Z = \cup_{M=1}^{\infty} Z_M$, где $Z_M \subset L_2(0,T)$ — множество функций, точно управляемых с помощью $\phi \in \Phi_M$. Рассмотрим произвольную последовательность управляющих функций $\{\phi_k\} \subset \Phi_M$, $M = 1,2,\ldots$, и соответствующую последовательность $\{z_k\} \subset Z_M$. Множество $\Phi_M$ — ограниченное множество $W_2^1(0,T)$. По теореме вложения для $W_2^1(0,T)$ имеем

$$\operatorname{ess}\sup_{0<t<T} |\phi_{k_l} - \phi_{k_j}| \to 0, \quad l,j \to \infty, \tag{3.15}$$

для некоторой подпоследовательности $\phi_{k_j}$. Из (3.14) и (3.15) мы получим для последовательности $\{z_{k_j}(t)\} \subset Z_M$ соотношение

$$\int_0^T (z_{k_l}(t) - z_{k_j}(t))^2 dt \leqslant T\left(\operatorname{ess}\sup_{0<t<T} |\phi_{k_l}(t) - \phi_{k_j}(t)|\right)^2 \to 0, \quad j,l \to \infty. \tag{3.16}$$

Из (3.16) следует, что $Z_M$ — предкомпактное множество в $L_2(0,T)$. Таким образом, $Z_M$ нигде не плотно в $L_2(0,T)$. А так как $Z = \cup_{M=1}^{\infty} Z_M$, мы заключаем, что $Z$ — множество первой категории в $L_2(0,T)$. Теорема 4.1 доказана.

Далее будут сформулированы утверждения, показывающие, что точная управляемость может не иметь места не только для функций $z \in L_2(0,T)$, но и для $z \in C([0,T])$.

Рассмотрим вопрос о точной управляемости в задаче (1.1)–(1.3) в случае, когда $\psi(t) = 0$ (отсутствует поток через правый конец).

$$\bar{u}_t = (a(x)\bar{u}_x)_x, \qquad 0 < x < l, \qquad 0 < t < T, \tag{3.17}$$

$$\begin{gathered} \bar{u}(0,t) = \phi(t), \qquad 0 < t < T, \\ \bar{u}_x(l,t) = 0, \qquad 0 < t < T, \end{gathered} \tag{3.18}$$

$$\bar{u}(x,0) = 0, \qquad 0 < x < l. \tag{3.19}$$

**Теорема 4.2.** *Для любого $M > 0$ существует такая функция $z \in C([0,T])$, что для любой функции $\phi \in \Phi_M$ для задачи (3.17)–(3.19) справедливо неравенство $J[\phi] > 0$.*

Рассмотрим теперь более общий случай, когда $\psi(t) \neq 0$, т. е. будем рассматривать задачу (1.1)–(1.3). Тогда имеет место следующее утверждение.

**Теорема 4.3** *Для любых $M > 0$ и $M_1 > 0$ существует такая функция $z \in C([0,T])$, что для любой функции $\phi(t) \in \Phi_M$ и любой такой функции $\psi(t) \in W_2^1(0,T)$, что $\|\psi(t)\|_{W_2^1(0,T)} \leqslant M_1$, для задачи (1.1)–(1.3) выполняется неравенство*

$$J[\phi] = \int_0^T \left(u_\phi(c,t) - z(t)\right)^2 dt > 0.$$

# Литература


[1] Лашин Д.А. Стратегия управления микрокламатом в теплицах // Гавриш. Москва, 2005. № 1. С. 33–35.

[2] Лашин Д.А. Об оптимальном управлении температурным режимом // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. Вып. 6. С. 853.

[3] Lashin D. A. On the existence of optimal control of temperature regimes // J. of Math. Sci. 2009. V. 158. № 2. P. 219–227.

[4] Some Problems in the Qualitative Theory of Differential Equations / I.V. Astashova [et al.] // J. of Natural Geometry. Jnan Bhawan. London. 2003. V. 23. № 1–2. P. 1–126.

[5] Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа / под ред. И.В. Асташовой, 2012. М.: ЮНИТИ-ДАНА. 647 с.

[6] Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир. 1972.

[7] Бутковский А.Г. Оптимальное управление в системах с распределенными параметрам // Автоматика и телемеханика. 1961. Т. 22. № 1. С. 17–26.

[8] Егоров А.И. Optimal Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами М.: Наука, 1978.

[9] Егоров Ю.В. Некоторые задачи теории оптимального управления // Ж. Выч. мат. и мат. физ. 1963. Т. 3. № 5. С. 887–904.

[10] Butkovsky A.G., Egorov A.I., Lurie K.A. Optimal control of distributed systems // SIAM J. Control. 1968. Vol. 6. № 3. P. 437–476.

[11] Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения., Новосибирск: Научная книга, 1999.

[12] Гудвин Г.К., Гребе С.Ф., Сальгадо М.Э. Проектирование систем управления. Москва.: БИНОМ. 2004.

[13] Farag M.H., Talaat T.A., Kamal E.M. Existence and uniqueness solution of a class of quasilinear parabolic boundary control problems // Cubo. 2013. V. 15. № 2. P. 111–119.

[14] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Мир 1972.

[15] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики, Москва: Физматлит, 1973.

[16] Riesz F., Szökefalvi-Nagy B., Functional Analysis, New-York: Dover, 1990.

[17] Ильин А.А., Калашников А.С., Олейник О.А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи матем. наук. 1962. 17. Вып. 3. С. 3–146.

[18] Ландис Е. М., Олейник О.А. Общенная аналитичность и некоторые связанные с ней свойства решений эллиптических и параболических уравнений // Успехи матем. наук. 1974. Т. 29. Вып. 2. Р. 190–206.

## References

[1] D. A. Lashin. Strategy of management to microclimate in hothouses *Gavrish.* Moscow, 2005. no. 1, p.33–35. (in Russian)

[2] D. A. Lashin. On the optimal control of a temperature regime. *Differ. Equ.*, 2008, V. 44, no. 6, P. 853.

[3] D. A. Lashin. On the existence of optimal control of temperature regimes. *J. of Math. Sci.*, 2009, V. 158, no. 2, P. 219–227.

[4] I. V. Astashova, A. V. Filinovskiy, V. A. Kondratiev, L. A. Muravei, *Some Problems in the Qualitative Theory of Differential Equations* // J. of Natural Geometry. Jnan Bhawan. London. 2003, V. 23, no. 1–2, P. 1–126.

[5] *Qualitative Properties of Solutions to Differential Equations and Related Topics of Spectral Analysis: scientific edition*, edited by I. V. Astashova, Moscow: UNITY-DANA, 2012, 647 p. (in Russian)

[6] J. L. Lions, *Optimal control of systems governed by partial differential equations*, Berlin: Springer, 1971.

[7] A. G. Butkovsky. Optimal Control in the Systems with Distributed Parameters. *Avtomatika i Telemechanika*, 1961, 22, no. 1, P. 17–26.

[8] A. I. Egorov, *Optimal Control by Heat and Diffusion Processes*, Moscow: Nauka, 1978. (in Russian)

[9] Yu. V. Egorov, Some Problems of Theory of Optimal Control *Zhurnal. Vych. Mat. i Mat. Fiziki.* 1963, V. 3, no. 5, P. 887 – 904. (in Russian)

[10] A. G. Butkovsky, A. I. Egorov, K. A. Lurie. Optimal control of distributed systems. *SIAM J. Control.* 1968, Vol. 6, no. 3, P. 437 – 476.

[11] A. V. Fursikov, *Optimal Control of Distributed Systems. Theory and applications*, Novosibirsk: Nauchnaya Kniga, 1999. (in Russian)

[12] G. C. Goodwin, S. F. Graebe, M. E. Salgado, *Control system design*, London – New-York: Pearson, 2000.

[13] M. H. Farag, T. A. Talaat, E. M. Kamal. Existence and uniqueness solution of a class of quasilinear parabolic boundary control problems. *Cubo*, 2013, V. 15, no. 2, P. 111–119.

[14] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'seva, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, Translations of Mathematical Monographs, 23, Providence, RI: American Mathematical Society, 1968.

[15] O. A. Ladyzhenskaya, *Boundary value problems of mathematical physics*, Moscow: Fizmatlit, 1973.

[16] F. Riesz, B. Szökefalvi-Nagy, *Functional Analysis*, New-York: Dover, 1990.

[17] A. M. Ilin, A. S. Kalashnikov, O. A. Oleinik. Linear equations of second order of parabolic type. *Russ. Math. Surways*, 1962, V. 17, issue 3, P. 3–146.

[18] E. M. Landis, O. A. Oleinik. Generalized analiticity and some connected properties of solutions of elliptic and parabolic equations. *Russ. Math. Surways*, 1974, V. 29, issue 2, P. 190–206.

***I.V. Astashova, D.A. Lashin, A.V. Filinovskiy***[2]

## ON A MODEL OF OPTIMAL TEMPERATURE CONTROL IN HOTHOUSES

While growing plants in industrial hothouses it needs to keep the temperature according to round-the-clock graph at the point of growth of plant located at the fixed height. Only small deviations are admitted. To obtain this it is possible to increase the temperature by heating the floor and to decrease the temperature by opening the ventilator windows at the ceiling. We propose and analyse the model based on the heat equation. Physical sense of this problem is that at one end of the infinitely thin rod of length $l$ (the height of the hothouse) we keep during the time $T$ the temperature $\phi(t)$ (control function), while at the other end we have the given heat flow $\psi(t)$. It requires to find the control function $\phi_0(t)$ such that the temperature at the fixed point $c$ be maximally closed to the given temperature $z(t)$. For the estimation of the control quality we use a quadratic integral functional.

**Key words:** optimal control, temperature control, hothouse, heat equation, quadratic integral functional.

Статья поступила в редакцию 18/ *VI*/2016.

The article received 20/ *VI*/2016.

---

[2] *Astashova Irina Viktorovna* (`ast@diffiety.ac.ru`), the Dept. of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russian Federation; Dept.of MESI, Plekhanov Russian University of Economics, 117997, Stremyanny lane, 36, Moscow, Russian Federation.

*Lashin Dmitriy Alexandrovich* (`dalasin@gmail.com`), FITO research and production company, 142784, Russian Federation, Moscow, Moscovskiy, 35-12.

*Filinovskiy Alexey Vladislavovich* (`flnv@yandex.ru`), Bauman Moscow State Technical University, 105005, Baumanskaya 2nd st., 5; Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, 119991, GSP-1, Leninskiye Gory, 1, Moscow, Russian Federation.