УДК 512.761.5

Е.А. Асташов[1]

О КЛАССИФИКАЦИИ РОСТКОВ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ, ЭКВИВАРИАНТНО ПРОСТЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ДЕЙСТВИЙ ЦИКЛИЧЕСКОЙ ГРУППЫ ПОРЯДКА ТРИ[2]

Рассматривается задача классификации ростков функций $(\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, эквивариантно простых относительно нетривиальных действий группы $\mathbb{Z}_3$ на пространствах $\mathbb{C}^2$ и $\mathbb{C}$, с точностью до эквивариантных ростков автоморфизмов $(\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$. Получена полная классификация таких ростков в случае, когда действие группы $\mathbb{Z}_3$ на $\mathbb{C}^2$ нетривиально по обеим переменным и нескалярно. Именно, росток является эквивариантно простым относительно такой пары действий тогда и только тогда, когда он эквивалентен одному из следующих ростков:

$$(x, y) \mapsto x^{3k+1} + y^2, \ \ k \geqslant 1;$$
$$(x, y) \mapsto x^2 y + y^{3k-1}, \ k \geqslant 2;$$
$$(x, y) \mapsto x^4 + xy^3;$$
$$(x, y) \mapsto x^4 + y^5.$$

Ключевые слова: классификация особенностей, простые особенности, действие группы, эквивариантные функции.

1. Основные определения и обозначения

Пусть заданы представления произвольной группы G на $\mathbb{C}^n$ и на $\mathbb{C}$. Функция $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ называется *инвариантной* относительно первого из этих представлений, если для любых $\lambda \in G$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ имеет место равенство $f(\lambda \cdot \mathbf{z}) = f(\mathbf{z})$. Функция $g\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ называется *эквивариантной* относительно пары заданных представлений, если для любых $\lambda \in G$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ имеет место равенство $g(\lambda \cdot \mathbf{z}) = \lambda \cdot g(\mathbf{z})$. (Символом «$\cdot$» обозначаются соответствующие действия элемента группы на элемент пространства $\mathbb{C}^n$ или $\mathbb{C}$.) Эти понятия естественным образом переносятся на ростки функций, а также на ростки диффеоморфизмов $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$.

Обозначим через $\mathcal{O}_n^G$ кольцо инвариантных ростков голоморфных функций $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, через $\mathcal{O}_n^{GG}$ — множество эквивариантных ростков голоморфных

Асташов Евгений Александрович (ast-ea@yandex.ru), механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, 119991, Россия, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, 1.
[2]Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 16-11-10018.

функций $(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C},0)$, а через $\mathcal{D}_n^{GG}$ — кольцо эквивариантых ростков диффеоморфизмов $(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C}^n,0)$. Множество $\mathcal{O}_n^{GG}$ имеет структуру модуля над кольцом $\mathcal{O}_n^G$. Кольцо $\mathcal{D}_n^{GG}$ действует на множестве $\mathcal{O}_n^{GG}$. Эквивариантный росток функции $f\colon(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C},0)$ с критической точкой $0\in\mathbb{C}^n$ назовем *эквивариантно простым* относительно заданных представлений группы G, если при всех достаточно больших $r\in\mathbb{N}$ достаточно малая окрестность некоторой (а значит, и любой) точки его орбиты в пространстве r-струй эквивариантных ростков функций $(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C},0)$ пересекается лишь с конечным числом других орбит (такие орбиты называются *примыкающими* к орбите ростка g), и это число остается ограниченным при $r\to\infty$.

Два эквивариантных ростка $f,g\colon(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C},0)$ с критической точкой $0\in\mathbb{C}^n$ назовем $\mathcal{R}^{GG}$*-эквивалентными,* если существует эквивариантный росток диффеоморфизма $\Phi\colon(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C}^n,0)$, для которого $g=f\circ\Phi$ (обозначение: $f\sim_{\mathcal{R}^{GG}}g$). Через $\mathcal{D}_n^{GG}g$ будем обозначать орбиту элемента g при действии группы эквивариантных диффеоморфизмов $\mathcal{D}_n^{GG}$ на множестве $\mathcal{O}_n^{GG}$.

Все вышеупомянутые понятия, очевидно, зависят не только от самой группы G, но и от ее действий на $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}$, хотя обозначения никакой информации о действиях группы в себе не содержат; о каких действиях идет речь, будет в каждом случае ясно из контекста.

2. Постановка задачи и обзор существующих результатов

Существует общая задача классификации с точностью до вышеописанного отношения эквивалентности особых ростков функций $(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C},0)$, эквивариантно простых относительно каких-либо представлений конечной абелевой группы G на $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}$.

Перечислим некоторые работы, в которых рассматривались частные случаи этой задачи.

В работе [1] получена хорошо известная классификация простых особенностей в неэквивариантном случае (то есть в случае, когда оба действия группы G тривиальны).

В работе [2] получена классификация простых особенностей на многообразии с краем. Эта классификация эквивалентна классификации простых особенностей, инвариантных относительно действия группы $\mathbb{Z}_2$ на $\mathbb{C}^n$ по первой координате:

$$(-1)\cdot(z_1,z_2,\dots,z_n)=(-z_1,z_2,\dots,z_n).$$

В работе [3, раздел 3] получена классификация простых нечетных особенностей, то есть особенностей, эквивариантно простых относительно нетривиальных скалярных действий группы $\mathbb{Z}_2$ на $\mathbb{C}^n$ и на $\mathbb{C}$. В частности, доказано, что при $n\geqslant 3$ таких особенностей не существует вовсе.

В работе [4] рассматриваются действия групп $\mathbb{Z}_m\,(m\geqslant 3)$ на $\mathbb{C}^n\,(n\geqslant 2)$ и $\mathbb{C}$ специального вида, а именно такие, для которых действие по нескольким переменным в $\mathbb{C}^n$ совпадает с действием на $\mathbb{C}$. Доказано (см. [4, теоремы 1 и 2]), что в случае таких действий циклических групп эквивариантно простых ростков $(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C},0)$ не существует. В этой же работе рассматривается случае несогласованных скалярных действий группы $\mathbb{Z}_3$ на $\mathbb{C}^2$ и $\mathbb{C}$; доказано (см. [4, теорема 3]), что в случае таких действий всякий эквивариантно простой росток эквивалентен одному из ростков $A_{3k+1}, k\geqslant 0$. В частности, результаты работы [4] позволяют классифицировать эквивариантно простые ростки функций двух переменных во всех случаях, когда действие группы $\mathbb{Z}_3$ на $\mathbb{C}^2$ скалярно, а действие группы $\mathbb{Z}_3$ на $\mathbb{C}$ при этом нетривиально.

3. Основной результат

В настоящей работе рассматривается случай, когда действие группы $\mathbb{Z}_3$ на $\mathbb{C}^2$ нескалярно и нетривиально по обеим переменным. Именно, пусть группа $\mathbb{Z}_3$ действует на $\mathbb{C}^2$ и на $\mathbb{C}$ следующим образом:

$$\sigma \cdot (x, y) = (\tau x,\, \tau^2 y); \qquad \sigma \cdot z = \tau z, \tag{3.1}$$

где $\tau = \exp(2\pi i/3)$ — кубический корень из единицы. В этом случае классификация эквивариантно простых особенностей дается следующей теоремой.

Теорема 1. Пусть $g : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — росток голоморфной функции с критической точкой в начале координат, эквивариантный относительно представлений (3.1). Росток g является эквивариантно простым относительно этих представлений тогда и только тогда, когда он $\mathcal{R}^{\mathbb{Z}_3\mathbb{Z}_3}$-эквивалентен одному из следующих ростков:

$$(x, y) \mapsto x^{3k+1} + y^2,\ \ k \in \mathbb{N}; \tag{3.2}$$

$$(x, y) \mapsto x^2 y + y^{3k-1},\ k \geqslant 2; \tag{3.3}$$

$$(x, y) \mapsto x^4 + xy^3; \tag{3.4}$$

$$(x, y) \mapsto x^4 + y^5. \tag{3.5}$$

Доказательство теоремы 1 приводится в разделе 5. Раздел 4 посвящен методу полных трансверсалей, на котором основывается это доказательство.

4. Метод полных трансверсалей и теорема о конечной определенности

Метод полных трансверсалей — достаточно общий метод классификации ростков аналитических функций $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ с точностью до различных отношений эквивалентности. Подробное изложение этого метода можно найти в работе [5, раздел 2]. Мы дадим здесь описание этого метода для классификации квазиоднородных ростков с точностью до $\mathcal{R}^{\mathbb{Z}_m\mathbb{Z}_m}$-эквивалентности.

Пусть $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — упорядоченный набор натуральных чисел (*весов*). Росток $g : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ называется *$\underline{\alpha}$-квазиоднородным степени* r, если для всех $t \in \mathbb{C}$ выполнено равенство

$$g(t^{\alpha_1} x_1, \ldots, t^{\alpha_n} x_n) = t^r g(x_1, \ldots, x_n).$$

Число r называют также *$\underline{\alpha}$-квазистепенью* ростка g и обозначают $\deg_{\underline{\alpha}} g$.

Пусть $\mathcal{M}_n$ — максимальный идеал в кольце $\mathcal{O}_n$ ростков голоморфных функций $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, а $\mathcal{D}_n^{GG}$ — кольцо ростков диффеоморфизмов $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$. Обозначим через $F_{\underline{\alpha}}^k \mathcal{M}_n$ идеал в $\mathcal{M}_n$, порожденный мономами $\underline{\alpha}$-квазистепеней k и выше, а через $F_{\underline{\alpha}}^k \mathcal{D}_n^{GG}$ — множество таких $\phi \in \mathcal{D}_n^{GG}$, что для всех $t \geqslant 0$ и всех $g \in F_{\underline{\alpha}}^t \mathcal{M}_n$ выполнено $g \circ \phi - g \in F_{\underline{\alpha}}^{k+1} \mathcal{M}_n$. Наконец, через $LF_{\underline{\alpha}}^k \mathcal{D}_n^{GG} \cdot g$ будем обозначать касательное пространство к $F_{\underline{\alpha}}^k \mathcal{D}_n^{GG}$-орбите ростка g в точке g. В этих обозначениях частным случаем [5, теорема 2.28] является следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть росток $g : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ имеет $\underline{\alpha}$-квазистепень r, и $s > r$. Пусть T — такое подпространство в $F^{r+1}_{\underline{\alpha}}\mathcal{M}_n$, что

$$F^{r+1}_{\underline{\alpha}}\mathcal{M}_n \subset T + LF^1_{\underline{\alpha}}\mathcal{D}^{GG}_n \cdot g + F^{s+1}_{\underline{\alpha}}\mathcal{M}_n.$$

Тогда любой росток h, для которого $g - h \in F^{r+1}_{\underline{\alpha}}\mathcal{M}_n$, будет $F^1_{\underline{\alpha}}\mathcal{D}^{GG}_n$-эквивалентен ростку вида $g + t + f$, где $t \in T$ и $f \in F^{s+1}_{\underline{\alpha}}\mathcal{M}_n$.
Подпространство T из теоремы 2 называется *полной трансверсалью* к орбите $F^1_{\underline{\alpha}}\mathcal{D}^{GG}_n \cdot g$.

Теорема 2 позволяет классифицировать струи (в смысле $\underline{\alpha}$-квазистепеней) ростков заданного порядка с точностью до $\mathcal{R}^{GG}$-эквивалентности. Однако остается еще вопрос о достаточности струи ростка (k-струя ростка $g \in \mathcal{O}_n$ называется *достаточной*, если росток $\mathcal{R}^{GG}$-эквивалентен этой струе). Если существует такое $k \in \mathbb{N}$, что k-струя ростка g достаточна, то g называют *конечно определенным* (а если k выбрано наименьшим возможным, то говорят, что g k-определен). Достаточность струи ростка проверяется с помощью теоремы о конечной определенности (частный случай [5, следствие 2.27]):

Теорема 3. В условиях теоремы 2 росток $g : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ k-определен тогда и только тогда, когда

$$F^{k+1}_{\underline{\alpha}}\mathcal{M}_n \subset LF^1_{\underline{\alpha}}\mathcal{D}^{GG}_n \cdot g.$$

5. Доказательство теоремы 1

Перейдем к доказательству теоремы 1. Основная идея состоит в том, чтобы последовательно строить r-струи эквивариантно простых ростков с помощью метода полных трансверсалей, а затем доказывать достаточность струй с помощью теоремы о конечной определенности.

Мономы, эквивариантные относительно представлений (3.1) — это в точности мономы $(1, 2)$-квазистепеней вида $3s + 1$ $(s \geqslant 0)$. Таким образом, эквивариантный росток может задаваться рядом с ненулевыми членами только $(1, 2)$-квазистепеней 1, 4, 7, 10 и так далее.

Единственный моном $(1, 2)$-квазистепени 1 — это моном x, который не может входить в разложение в ряд ростка с особенностью в начале координат. Таким образом, 4-струя (в смысле $(1, 2)$-квазистепени) ростка, эквивариантного относительно действий (3.1), имеет вид $ay^2 + bx^2y + cx^4$. Нетрудно убедиться, что с помощью эквивариантных замен переменных эту струю можно привести к одной из следующих форм:

$$y^2 + x^4; \tag{5.6}$$
$$y^2; \tag{5.7}$$
$$x^2y; \tag{5.8}$$
$$x^4; \tag{5.9}$$
$$0 \tag{5.10}$$

(доказательство проводится с помощью выделения полного квадрата). Рассмотрим далее каждый из этих случаев по отдельности.

Лемма 1. Если 4-струя (в смысле $(1, 2)$-квазистепени) эквивариантного ростка имеет вид (5.6), то росток эквивалентен своей 4–струе.

Доказательство леммы 1. В этом случае росток g имеет вид $g(x, y) = y^2 \cdot \cdot (1 + g_1(x, y)) + x^4 \cdot (1 + g_2(x, y))$, где g_1, g_2 — инвариантные ростки, $g_{1,2}(0, 0) = 0$.

Росток приводится к виду (5.6) с помощью эквивариантной замены переменных $\tilde{x} = x \cdot \sqrt[4]{1+g_2(x,y)}$, $\tilde{y} = y \cdot \sqrt{1+g_1(x,y)}$.

Лемма 2. Если 4-струя (в смысле $(1,2)$-квазистепени) эквивариантно простого ростка имеет вид (5.7), то росток эквивалентен одному из ростков (5.), $k \geqslant 2$.

Доказательство леммы 2. Положим k равным наименьшему из таких $s \in \mathbb{N}$, что росток g содержит (с ненулевым коэффициентом) хотя бы один из мономов вида x^{3s+1} и $x^{(3s+1)/2}y$ (второй случай сводится к первому с помощью выделения полного квадрата). Если $k < \infty$, то росток приводится к виду (5.) с тем же k (замена переменных производится аналогично тому, как это делалось при доказательстве предыдущей леммы). Если же $k = \infty$, то есть росток не содержит ни одного из мономов указанного вида, то он имеет вид $g(x,y) = y^2 \cdot (1 + g_1(x,y))$, где g_1 — инвариантный росток, и тогда g эквивалентен своей 4-струе (в смысле $(1,2)$-квазистепени). Но тогда росток не будет простым: к его орбите в пространстве r-струй эквивариантных ростков примыкают орбиты всех ростков вида (5.), где $3k+1 \leqslant r$, и число таких орбит неограниченно возрастает при $r \to \infty$.

Лемма 3. Если 4-струя (в смысле $(1,2)$-квазистепени) эквивариантно простого ростка имеет вид (5.8), то росток эквивалентен одному из ростков (3.3).

Доказательство леммы 3 проводится с помощью теоремы 3 аналогично [1, §5].

Лемма 4. Если 4-струя (в смысле $(1,2)$-квазистепени) эквивариантно простого ростка имеет вид (5.9), то росток эквивалентен одному из ростков x^4+xy^3 и $x^4+ + y^5$.

Доказательство леммы 4. Воспользуемся методом полных трансверсалей. Полная трансверсаль в нашем случае будет равна $T = \mathbb{C}\langle xy^3\rangle$, и 7-струя ростка g эквивалентна x^4+axy^3. При $a \neq 0$ она эквивалентна x^4+xy^3. В этом случае полная трансверсаль будет нулевой, а росток g конечно определен и $\mathcal{R}^{GG}$-эквивалентен ростку x^4+xy^3.

При $a = 0$ полная трансверсаль будет равна $T = \mathbb{C}\langle x^2y^4, y^5\rangle$, и 10-струя ростка g будет иметь вид $j^{10}(g) = x^4 + bx^2y^4 + cy^5$. Рассмотрим далее два случая.

Если $c \neq 0$, то 10-струя ростка с помощью эквивариантной замены $\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = = cy + bx^2$ приводится к виду $\tilde{x}^4 + \tilde{y}^5$. С помощью теоремы о конечной определенности нетрудно проверить, что эта струя достаточна.

Если же $c = 0$, то росток не является эквивариантно простым. В самом деле, в этом случае к орбите ростка примыкают орбиты ростков вида $x^4 + a_3x^3y^2 + + a_2x^2y^4 + a_1xy^6 + a_0y^8$. Множество нулей ростка такого вида состоит из четырех касающихся в нуле парабол вида $x = t_iy^2$, где t_i, $i = 1,2,3,4$ — корни уравнения $t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 = 0$. Двойное отношение коэффициентов t_i инвариантно относительно действия группы $\mathcal{D}_2^{\mathbb{Z}_3\mathbb{Z}_3}$, а значит, существует непрерывное семейство орбит, отличающихся значениями этого инварианта, что противоречит простоте ростка g.

Лемма 5. Если 4-струя (в смысле $(1,2)$-квазистепени) эквивариантного ростка имеет вид (5.10), то росток — не эквивариантно простой.

Доказательство леммы 5. В этом случае 7-струя ростка (в смысле $(1,2)$-квазистепени) представляет собой линейную комбинацию мономов x^7, x^5y, x^3y^2, xy^3, то есть размерность пространства таких струй равна 4. Заметим, что в случае действий (3.1) все ростки эквивариантных диффеоморфизмов $(\mathbb{C}^2,0) \to (\mathbb{C}^2,0)$ имеют вид:

$$x = \alpha\tilde{x} + \ldots, \;\; y = \beta\tilde{x}^2 + \gamma\tilde{y} + \ldots, \tag{5.11}$$

где $\alpha \neq 0, \gamma \neq 0$. При этом на вид 4-струи ростка (в смысле $(1,2)$-квазистепени) после замены координат влияют только те слагаемые, которые выписаны в формулах (5.11) явно. Таким образом, действие группы $\mathcal{D}_2^{\mathbb{Z}_3\mathbb{Z}_3}$ на $\mathbb{C}^2$ задает действие трёхпараметрической группы линейных операторов на пространстве этих 7-струй. По соображениям размерности получаем, что эквивариантный росток с нулевой 4-струей (в смысле $(1,2)$-квазистепени) не будет эквивариантно простым.

Из лемм 1–5 следует, что любой эквивариантный относительно действий (3.1) росток $(\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ приводится к одной из нормальных форм – либо не является простым. Для завершения доказательства теоремы нужно доказать, что сами ростки – просты. Простота ростков A_{3k} и D_{3k} проверяется так же, как в неэквивариантном случае (см. [1, §8]) с очевидными изменениями, происходящими из требования эквивариантности. Простота ростков $x^4 + xy^3$ и $x^4 + y^5$ доказывается с помощью построения трансверсалей к их орбитам в пространстве r-струй эквивариантных ростков $(\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ с особенностью в нуле. Эти трансверсали можно взять в виде

$$x^4 + xy^3 + \epsilon_1 y^2 + \epsilon_2 x^2 y$$

и

$$x^4 + y^5 + \epsilon_1 y^2 + \epsilon_2 x^2 y + \epsilon_3 xy^3$$

соответственно. Нетрудно видеть, что при всех ϵ эти ростки могут принадлежать только орбитам некоторых из ростков, указанных в формулировке настоящей теоремы, причем число этих орбит конечно. Теорема доказана.

Литература

[1] Арнольд В.И. Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля A_k, D_k, E_k и лагранжевы особенности // Функциональный анализ и его приложения. 1972. Т. 6. № 4. С. 3–25.

[2] Арнольд В.И. Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли B_k, C_k, F_4 и особенности эволют // УМН. 1978. Т. 33. № 5. С. 91–107.

[3] Domitrz W., Manoel M., Rios P. de M.. The Wigner caustic on shell and singularities of odd functions // J. of Geometry and Physics. 2013. Vol. 71. P. 58–72.

[4] Асташов Е.А. О классификации особенностей, эквивариантно простых относительно представлений циклических групп // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. т. 26. № 2. С. 155–159.

[5] Bruce J.W., Kirk N.P., du Plessis A.A.. Complete transversals and the classification of singularities // Nonlinearity. 1997. Vol. 10. P. 253–275.

[6] Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. М.: МЦНМО, 2009. 672 с.

References

[1] Arnold V.I. Normal forms of functions near degenerate critical points, the Weyl groups A_k, D_k, E_k and Lagrangian singularities. Functional Anal. Appl., 1972, vol. 6, no. 4, pp. 254–272.

[2] Arnold V.I. Indices of singular points of 1-forms on a manifold with boundary, convolution of invariants of reflection groups, and singular projections of smooth surfaces. Russian Math. Surveys, 1979, vol. 34, no. 1, pp. 1–42.

[3] Domitrz W., Manoel M., Rios P. de M. The Wigner caustic on shell and singularities of odd functions. J. of Geometry and Physics, 2013, vol. 71, pp. 58–72.

[4] Astashov E.A. On the classification of singularities that are equivariant simple with respect to representations of cyclic groups (in Russian). Bulletin of Udmurt University. Mathematics, Mechanics, Computer Science, 2016, vol. 26, no. 2, pp. 155-159.

[5] Bruce J.W., Kirk N.P., du Plessis A.A. Complete transversals and the classification of singularities. Nonlinearity, 1997, vol. 10, pp. 253–275.

[6] Arnold V.I., Gusein-Zade S.M., Varchenko A.N. Singularities of differentiable maps, Volumes 1 and 2, Boston: Birkhauser, Monographs Math., 1985-1988, vol. 82–83, 845 p.

E.A.Astashov[3]

ON THE CLASSIFICATION OF FUNCTION GERMS OF TWO VARIABLES THAT ARE EQUIVARIANT SIMPLE WITH RESPECT TO AN ACTION OF THE CYCLIC GROUP OF ORDER THREE

We consider the problem to classify function germs $(\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ that are equivariant simple with respect to nontrivial actions of the group $\mathbb{Z}_3$ on $\mathbb{C}^2$ and on $\mathbb{C}$ up to equivariant automorphism germs $(\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$. The complete classification of such germs is obtained in the case of nonscalar action of $\mathbb{Z}_3$ on $\mathbb{C}^2$ that is nontrivial in both coordinates. Namely, a germ is equivariant simple with respect to such a pair of actions if and only if it is equivalent to ine of the following germs:

$$(x, y) \mapsto x^{3k+1} + y^2,\ \ k \geqslant 1;$$
$$(x, y) \mapsto x^2y + y^{3k-1},\ k \geqslant 2;$$
$$(x, y) \mapsto x^4 + xy^3;$$
$$(x, y) \mapsto x^4 + y^5.$$

Key words: classification of singularities, simple singularities, group action, equivariant functions.

Статья поступила в редакцию 15/ *VI*/2016;

The article received 15/ *VI*/2016.

[3] *Astashov Evgeny Aleksandrovich* (`ast-ea@yandex.ru`), post-graduate student, Lomonosov Moscow State University, Leninskie Gory 1, GSP-1, Moscow, 119991, Russia.