




Механическая модель турбулентности

Семенов^{1,2} М.Е. , Толкачев^{1,3} А.В. , Канищева¹ О.И. 

¹Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация; *mkl150@mail.ru* (М.Е.); *tolkachev.akim@mail.ru* (А.В.); *oleka-olesya@mail.ru* (О.И.);

²Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем (ГосНИИАС), г. Москва, Российская Федерация;

³Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г.Ф. Морозова, г. Воронеж, Российская Федерация;

Поступила: 15.05.2024

Рассмотрена: 20.06.2024

Принята: 02.09.2024

Научная статья



Аннотация. В статье исследуются вопросы, связанные с управлением и стабилизацией колебаний в иерархической цепочке осцилляторов с гистерезисными связями. Гистерезисные связи формализуются с помощью феноменологической модели Боука — Вена. Масса, жесткость и демпфирующие свойства осцилляторов заданы таким образом, чтобы они соответствовали определенному правилу масштабирования, и уменьшаются вдоль цепи по геометрической прогрессии, формируя таким образом иерархию. Проводится верификация модели с помощью гипотезы Колмогорова, подобно тому как это делается для сформировавшихся турбулентных потоков. Для этого строятся энергетические спектры в условиях гистерезиса в связях и без него при различных амплитудах внешней силы. В результате вычислительных экспериментов показывается, что для цепочки с гистерезисными связями при высокой амплитуде воздействия кривая энергетического спектра в достаточной степени соответствует гипотезе Колмогорова. Далее проводится расчет амплитудно-частотных характеристик системы в условиях гистерезисного воздействия с помощью метода "сканирования" частотой. В результате численных экспериментов идентифицированы диапазоны частот внешнего воздействия, которым отвечают хаотическое поведение осцилляторов и их синхронизация.

Ключевые слова: турбулентность; гипотезы Колмогорова; гистерезис; модель Боука — Вена

1. Предварительные сведения

Исследование турбулентности является одной из важнейших задач как прикладной, так и фундаментальной науки. Обусловливается это широким распространением указанного явления в природе, особенно в прикладных механических задачах, связанных с течением жидкости и газа, а также в разнообразных атмосферных процессах и явлениях. Несмотря на стремительное развитие вычислительной техники и разработку численных методов с соответствующим математическим обеспечением, моделирование турбулентных течений остается одной из сложнейших проблем механики жидкости и газа. Традиционно для описания турбулентности используется три различных подхода — статический, структурный и динамический. Однако каждый из них не дает общего математического способа описания этого физического явления, так как области применимости каждого из методов существенно различны [1–4]. Поэтому создание новых подходов к описанию и моделированию турбулентного движения представляется важным и востребованным.

Кратко опишем основные подходы к моделированию турбулентных движений. К первому из них относится метод, основанный на использовании усредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (Reynolds Averaged Navier–Stokes — RANS) с замыканием с помощью той или иной полуэмпирической модели турбулентности. Ко второй категории относятся два классических вихреразрешающих подхода, а именно прямое численное моделирование турбулентности (Direct Numerical Simulation — DNS) и моделирование крупных вихрей (Large Eddy Simulation — LES). Наконец, третья категория включает гибридные подходы, опирающиеся на совместное использование RANS и LES в различных областях потока [5–9].

Исчерпывающее и точное определение турбулентности дать крайне тяжело. Возможно только выделить ряд свойств, которые будут описывать это явление. Одним из таких свойств, характеризующих турбулентный поток, является "завихренность" (растяжение вихрей). Вихри, которые образуются в турбулентном потоке, сохраняются достаточно долгое время благодаря механизму каскадного переноса энергии. Когда большие и неустойчивые завихрения, "отбирая" энергию у основного потока, временно сохраняют ее, после чего растягиваются и разбиваются на несколько меньших, и так до тех пор, пока не рассеют кинетическую энергию в тепло. Таким образом, осуществляется направленная передача энергии от более крупных вихрей к более мелким, формирующая их иерархию в потоке [10; 11].

Особого внимания при рассмотрении турбулентного течения заслуживают мелкомасштабные вихри, структура которых подразумевает их однородность и изотропность. Теория локально-изотропной и однородной турбулентности представляет собой достаточно разработанный раздел теории турбулентности. Принципиальные результаты в этой области получены А.Н. Колмогоровым [12], который предложил "закон пяти третей", играющий на сегодняшний день ключевую роль при разработке современных подходов к моделированию турбулентных течений и их верификации.

Другим примером сложного нелинейного явления, играющего значительную роль при проектировании и исследовании сложных динамических систем, является гистерезис. Нелинейности гистерезисной природы присущи многим физическим, биологическим и экономическим процессам и явлениям. Во многом это либо обуславливается их внутренней структурой (магнитный гистерезис), либо является следствием их динамических особенностей (рулевой люфт). Строгое математическое описание гистерезиса было дано М.А. Красносельским и А.В. Покровским в монографии [13]. В ней гистерезисные нелинейности трактуются как операторы или преобразователи с соответствующими пространствами состояний. Выход такого преобразователя будет зависеть не только от мгновенного значения входа, но и от состояния преобразователя в предшествующие моменты времени. Разработанные в [13] модели позволяют использовать их в уравнениях динамики систем с носителями гистерезисных свойств. При этом модели соответствующих систем сводятся к операторно-дифференциальным уравнениям, для которых к настоящему времени доказаны теоремы существования и единственности [14]. Данным задачам посвящено множество работ, среди которых отметим публикации [15; 16].

В настоящее время для моделирования динамики систем с гистерезисом, как правило, используются два подхода: конструктивный подход (неидеальное реле, преобразователь Прейсаха, модель Ишлинского [17–22]) и феноменологический подход (модель Боука – Вена, Айвана, Дьюема [23–27]). Каждый из них зарекомендовал себя в различных областях, например, оператор Прейсаха находит широкое применение при моделировании систем с ферромагнитными элементами, а также в гидрологических моделях проникновения осадков в почву [28]. Среди феноменологических моделей наиболее популярным является модель Боука – Вена. Эта модель формализуется посредством двух соотношений: одного алгебраического и дифференциального уравнения. Модель Боука – Вена является удобным инструментом для формализации гистерезисных зависимостей, особенно в ситуации, когда гистерезисное звено является частью сложной системы. Применительно к проблемам турбулентных течений отметим, что в традиционных подходах гистерезисное трение к настоящему времени не рассматривалось, хотя механизмы диссипации энергии в каскадах турбулентных вихрей допускают "гистерезисную" трактовку. Применительно к тематике настоящей работы отметим такое явление, как аэродинамический гистерезис, его детальное описание можно найти в статье [29].

В настоящей статье исследуется перенос энергии в механической системе, состоящей из связанных осцилляторов, соединенных между собой иерархическим образом. Указанная система является достаточно простой моделью переноса энергии в турбулентной среде. Каждый осциллятор в системе, кроме первого, связан со своими соседями сильно нелинейными кубическими пружинами. Помимо пружин в связи между осцилляторами включены вязкие и гистерезисные демпферы, которые формализуются с помощью феноменологической модели Боука–Вена. В эту систему гистерезис добавляется как естественный элемент управления и стабилизации. Это

исследование помогает найти некоторые общие законы передачи энергии между осцилляторами и предлагает новый способ изучения турбулентности жидкости без использования системы Навье–Стокса.

2. Описание системы и ее верификация

В природе и в технических устройствах часто наблюдаются разнообразные явления, включающие передачу энергии между элементами в виде каскада-трансляции. Эти элементы при проектировании находятся по отношению друг к другу на различных уровнях или масштабах, формируя таким образом иерархию, в которой осуществляется каскад. Такой перенос энергии описывает передачу преимущественно с более крупных масштабов на более малые, например, как для однородного изотропного движения в гидродинамике. Часто в качестве модели для исследования подобного явления используют нелинейные цепочки осцилляторов [30–32].

Цепочка нелинейных осцилляторов является универсальной и относительно простой моделью, способной описать сложные нелинейные процессы. Простейшей из таких моделей является модель межатомного взаимодействия в кристаллической решетке. Отметим, что в подавляющем количестве публикаций, посвященных связанным осцилляторам, используются упругие взаимодействия. Однако реальная природа межатомных связей зачастую требует учета принципиально иных форм взаимодействия, а именно взаимодействия гистерезисной природы. Поэтому представляется важной задача изучения динамики гистерезисно связанных осцилляторов. В этой связи отметим близкие к тематике настоящей статьи работы [33; 34].

Еще одно важное приложение динамики связанных осцилляторов обусловливается использованием соответствующей модели для описания турбулентных процессов. В настоящей работе предлагается использовать в качестве простейшей модели турбулентных движений систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую в том числе и колебания связанных осцилляторов. При этом для старого обоснования такой замены требуется провести верификацию модели, сравнивая полученный экспериментально энергетический спектр с законом Колмогорова.

Рассмотрим сначала механическую модель исследуемой системы, которая представлена на рис. 2.1. Она состоит из осцилляторов, каждый из которых кроме первого x_0 связан со своими соседями x_n нелинейными пружинами (с потенциалом $k_n x_n^4/4$), где k_n — жесткость нелинейной пружины для $n = 1, 2, \dots, N - 1$. Помимо пружин в связи между осцилляторами включены вязкие и гистерезисные демпферы с коэффициентами l и $(1 - \alpha)k_n D$ соответственно. Гистерезисный демпфер формализуется с помощью феноменологической модели Боука–Вена, имеющей простую реализацию в виде обыкновенного дифференциального уравнения.

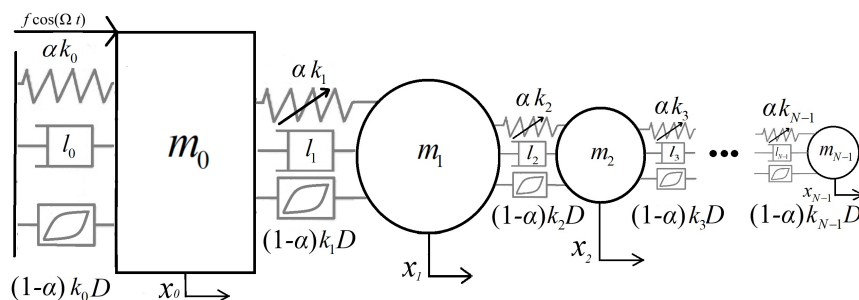


Рис 2.1. Исследуемая механическая система
 Fig 2.1. The considered mechanical system

Уравнения движения для механической системы на рис. 2.1 будут иметь вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_0 \ddot{x}_0 + \alpha k_0 x_0 + l_0 \dot{x}_0 + (1 - \alpha) k_0 D z_0^l + \alpha k_1 (x_0 - x_1)^3 + l_1 (\dot{x}_0 - \dot{x}_1) + \\ + (1 - \alpha) k_0 D z_0^r = f \cos \Omega t, \\ \dots \\ m_n \ddot{x}_n + \alpha k_n (x_n - x_{n-1})^3 + l_n (\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1}) + (1 - \alpha) k_n D z_n^l + \\ + \alpha k_{n+1} (x_n - x_{n+1})^3 + l_{n+1} (\dot{x}_n - \dot{x}_{n+1}) + (1 - \alpha) k_0 D z_n^r = 0, \\ \dots \\ m_{N-1} \ddot{x}_{N-1} + \alpha k_{N-1} (x_{N-1} - x_{N-2})^3 + l_{N-1} (\dot{x}_{N-1} - \dot{x}_{N-2}) + \\ + (1 - \alpha) k_{N-1} D z_{N-1}^l = 0, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

где z_n^l и z_n^r — гистерезисные переменные, являющиеся решением следующих дифференциальных уравнений (2.2) для левой и правой (l и r) стороны относительно n -го осциллятора.

Имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_n^l = D^{-1} [A - |z_n^l|^\eta (\beta \text{sign}(z_n^l (\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1})) + \gamma)] (\dot{x}_n - \dot{x}_{n-1}), \\ \dot{z}_n^r = D^{-1} [A - |z_n^r|^\eta (\beta \text{sign}(z_n^r (\dot{x}_n - \dot{x}_{n+1})) + \gamma)] (\dot{x}_n - \dot{x}_{n+1}). \end{array} \right. \quad (2.2)$$

В уравнениях (2.2) $\alpha, \beta, \gamma, \eta$ — безразмерные гистерезисные параметры, которые определяют форму и размер петли гистерезиса согласно подходу модели Боука–Вена. При исследовании системы примем следующие значения: $A = 1, \beta = \gamma = 0.5, \eta = 4$. Для других же гистерезисных параметров в системе (2.1) значения будут: $D = 1$ и $\alpha = 0.5$.

Параметры m_n — масса осциллятора, x_n — его смещение относительно положения равновесия, \dot{x}_n — скорость и \ddot{x}_n — ускорение для соответствующих элементов в цепочке.

Зададим параметры так, чтобы в системе (2.1) была иерархия масштабов в направлении слева направо. Для этого пусть у первого линейного осциллятора $m_0 = 1, k_0 = 1, l_0 = 0.01$. Далее за ним у второго нелинейного осциллятора $m_1 = 0.01, k_1 = 0.1, l_0 = 0.001$. Параметры остальных осцилляторов в цепи вплоть до $N - 1$ задаются по правилам:

$$\frac{m_n}{m_{n+1}} = 6, \frac{k_n}{m_{k+1}} = 45, \frac{l_n}{l_{l+1}} = 2,$$

где $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.

Теперь проведем верификацию модели. Энергетический спектр $\hat{E}(\kappa)$ рассчитаем с помощью отношения

$$\hat{E}(\kappa) = \frac{\bar{E}_n}{\bar{E}},$$

где $\bar{E}_n(\kappa)$ — усредненная по периоду T энергия колебаний для n -го осциллятора цепи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{E}_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0+T}^{t_0} \left(\frac{1}{2} m_0 \dot{x}_0^2 + \frac{1}{2} k_0 x_0^2 + \frac{1}{8} k_1 (x_0 - x_1)^4 \right) dt, \\ \dots \\ \bar{E}_n = \frac{1}{T} \int_{t_0+T}^{t_0} \left(\frac{1}{2} m_n \dot{x}_n^2 + \frac{1}{8} k_n (x_n - x_{n-1})^4 + \frac{1}{8} k_{n+1} (x_n - x_{n+1})^4 \right) dt, \\ \dots \\ \bar{E}_{N-1} = \frac{1}{T} \int_{t_0+T}^{t_0} \left(\frac{1}{2} m_{N-1} \dot{x}_{N-1}^2 + \frac{1}{8} k_{N-1} (x_{N-1} - x_{N-2})^4 \right) dt, \end{array} \right.$$

\bar{E} — усредненная полная энергия системы для всех осцилляторов, которая рассчитывается следующим образом:

$$\bar{E} = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{E}_n,$$

а $\kappa = \frac{1}{m_n}$ — волновое число для $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. В итоге общая математическая схема верификации модели будет выражаться:

$$\hat{E}(\kappa) \sim \kappa^{-\frac{5}{3}}. \quad (2.3)$$

Результат расчета энергетического спектра системы (2.1) приведен на рис. 2.1 в логарифмическом масштабе. Черными сплошными линиями обозначены энергетические спектры, полученные без учета (при $\alpha = 1$) гистерезиса в системе, красным обозначены результаты, полученные с учетом гистерезиса, а синяя линия — это "закон пяти третей" (2.3).

Моделирование осуществлялось для пятнадцати осцилляторов ($N = 15$) в условиях резонансного внешнего воздействия на первый элемент в цепи ($\Omega = 1$) при различных амплитудах ($f = 0.001, 0.0025, 0.005$ и 0.01). Решение исходной системы (2.1) осуществлялось методом Рунге–Кутты 4-5-го порядка при нулевых начальных условиях.

Рисунок 2.2 иллюстрирует, как энергия первого осциллятора транслируется остальным осцилляторам цепи и убывает по достаточно сложному закону. Видно, что при высокой амплитуде воздействия каскад энергии гораздо более интенсивен, а для осцилляторов меньшего масштаба по наклону он в достаточной степени соответствует гипотезе Колмогорова. Так при амплитуде внешнего воздействия кривая спектра (красная линия с квадратом) и соответствующая логарифмическая прямая "закона пяти третей" находятся в высокой степени соответствия.

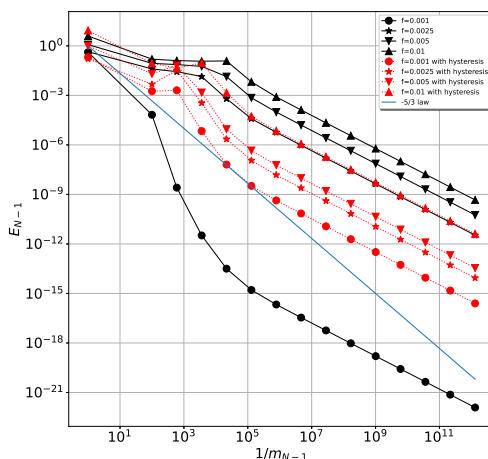


Рис 2.2. Энергетический спектр системы (2.1)

Fig 2.2. Energy spectrum of the system (2.1)

3. Особенности динамики исследуемой системы

Изучим подробнее динамику системы. Для этого рассчитаем амплитудно-частотные характеристики у отдельных осцилляторов в цепи с помощью метода "сканирования" частотой. Суть данного метода заключается в том, что при компьютерном моделировании системы (2.1) изменяется значение частоты Ω внешнего воздействия последовательно, без прерывания процесса вынужденных колебаний ("сканирование частотой"). Иными словами, изменяя последовательно частоту Ω_i , с каждой i -й итерацией значения для начальных условий при следующей Ω_{i+1} следует брать не нулевыми, а с того момента времени, когда прервалось моделирование на текущем i -м шаге.

Особенности динамики без учета гистерезиса подробно изучены в работе, где показано, что в зависимости от амплитуды внешнего воздействия в цепи наблюдаются различные типы синхронизации колебаний [35; 36]. Также авторы отмечают, что при высоких значениях f и частоте $\Omega = 1$ система реагирует хаотично, и значительная часть энергии передается по цепи в виде энергетического каскада-трансляции. При таких условиях существуют хаотические области, в которых все нелинейные осцилляторы одновременно возбуждаются до хаотического

состояния (активируются), когда частота Ω превышает нижний критический порог; таким образом, в системе происходит хаотическая синхронизация.

Результаты расчета амплитудно-частотных характеристик для второго, четвертого и шестого осциллятора в цепи в условиях гистерезисного демпфирования представлены на рис. 3.1 (*a, b, c*), когда на первый осциллятор в цепочке оказывается внешняя сила с амплитудами $f = 0.001, 0.005$ и 0.01 .

Ниже (рис. 3.1, *c*) проведена идентификация динамических режимов для всех элементов в цепочке при частоте внешнего воздействия $\Omega = 0.99$. Для этого рассчитывался старший показатель Ляпунова Λ методом Розенштейна [37] для амплитуд x_n каждого осциллятора из временного окна $t \in (0, 4000)$.

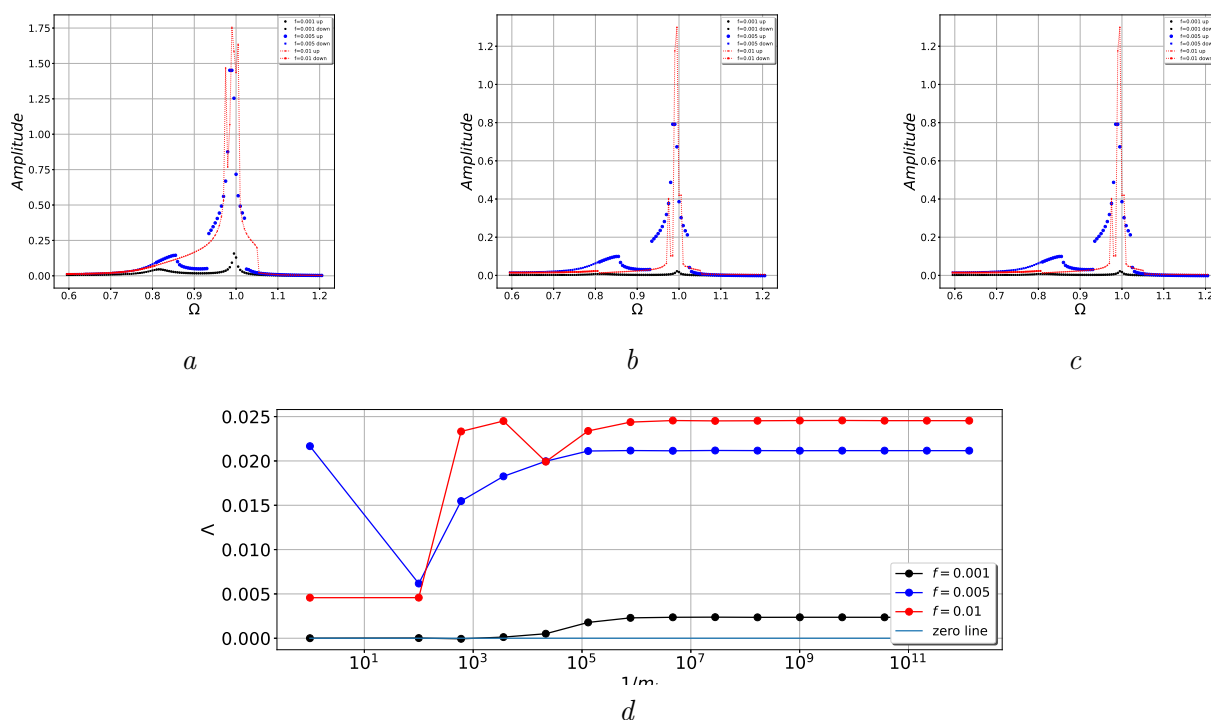


Рис 3.1. Динамические характеристики системы: *a* – амплитудно-частотные характеристики 2-го осциллятора при различных значениях f ; *b* – амплитудно-частотные характеристики 4-го осциллятора при различных значениях f ; *c* – амплитудно-частотные характеристики 6-го осциллятора при различных значениях f ; *d* – старший показатель Ляпунова Λ каждого осциллятора в цепочке при различных значениях f

Fig 3.1. Dynamic properties of the system: *a* – frequency response of the 2nd oscillator for various values f ; *b* – frequency response of the 4th oscillator for various values f ; *c* – frequency response of the 6th oscillator for various values f ; *d* – the largest Lyapunov exponents Λ for every oscillator in the chain for various values f

Как видно из сравнения рисунков, максимумы амплитуд соответствуют одинаковой частоте, что означает синхронизацию колебаний осцилляторов. При низком значении $f = 0.001$ в системе преобладает устойчивая динамика, однако с ростом амплитуды внешнего воздействия появляются области неустойчивости. Например, с ростом значения f в окрестности частоты $\Omega = 1$ имеется хаотическая область, аналогичная той, что наблюдалась в [35; 36].

Выводы

В настоящей статье рассматривалась динамика связанных осцилляторов с убывающими в геометрической прогрессии массами. Кроме того, предполагалось наличие не только нелинейных

упругих, но и гистерезисных связей между осцилляторами. Исследовалась динамика указанной системы в условиях периодического воздействия на первый элемент в цепочке.

Для анализа реакции системы на внешнее периодическое воздействие строилась амплитудно-частотная характеристика для набора осцилляторов. Кроме того, численно строился энергетический спектр системы (зависимость сосредоточенной на n -м осцилляторе энергии от величины, обратно пропорциональной массе). Как следует из результатов вычислительных экспериментов, при достаточно низких значениях амплитуды имеет место "почти" гармонический резонанс. При этом механическая энергия в основном локализуется на первом осцилляторе, а ее трансформация на остальные элементы цепи происходит по экспоненциальному закону. Однако при достаточно высоком значении амплитуды внешнего воздействия система реагирует хаотично. В результате численных экспериментов были идентифицированы диапазоны частот внешнего воздействия, которым отвечает хаотическое поведение осцилляторов. При этом указанные отрезки существенно уже по сравнению с системой, в которой имеют место лишь упругие взаимодействия. Отметим, что аналогичная ситуация наблюдалась для систем гистерезисно связанных осцилляторов Ван-дер-Поля [38]. Указанный эффект объясняется регулизирующей ролью гистерезисных звеньев, абсорбирующей часть энергии колебаний на каждом такте.

Из сравнения кривых энергетического спектра систем осцилляторов с гистерезисными связями с системами осцилляторов с нелинейными упругими связями следует, что гипотеза Колмогорова находится в лучшем соответствии с данными, полученными в результате вычислительных экспериментов именно для систем с гистерезисными связями.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект 23-29-00696).

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Цитирование. Семенов М.Е., Толкачев А.В., Канищева О.И. Механическая модель турбулентности // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 3. С. 63–75. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-3-63-75.

© Семенов М.Е., Толкачев А.В., Канищева О.И., 2024

Семенов Михаил Евгеньевич (mkl150@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор кафедры цифровых технологий, Воронежский государственный университет, 394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская площадь, 1, Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем (ГосНИИАС), 125319, Российская Федерация, г. Москва, ул. Викторенко, 7, к. 2.

Толкачев Аким Владимирович (tolkachev.akim@mail.ru) – старший преподаватель кафедры цифровых технологий, Воронежский государственный университет, 394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская площадь, 1, Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г.Ф. Морозова, 394613, Российская Федерация, г. Воронеж, ул. Тимирязева, 8.

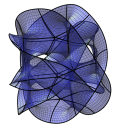
Канищева Олеся Ивановна (oleka-olesya@mail.ru) – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры цифровых технологий, Воронежский государственный университет, 394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская площадь, 1.

Литература

- [1] Landau L.D., Lifshitz E.M. Fluid mechanics. Oxford: Pergamon Press, 1986. 551 p.
- [2] Friedlander S., Topper L. Turbulence: classic papers on statistical theory. London: Interscience Publishers LTD, 1961. 187 p. URL: [vhttps://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/doc/1961_Turbulence%20classic%20papers%20on%20statistical %20theory.pdf](https://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/doc/1961_Turbulence%20classic%20papers%20on%20statistical%20theory.pdf).

- [3] Townsend A.A. The Structure of Turbulent Shear Flow. Cambridge: Cambridge University Press, 1976. 416 p. URL: <https://books.google.ru/books?id=0wuu9y8vRagC&printsec=frontcover&hl=ru>.
- [4] Tropea C., Yarin A., Foss J. Springer Handbook of Experimental Fluid Mechanics. Berlin: Springer, 2007. 237 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-30299-5>.
- [5] Davidson L. An Introduction to Turbulence Models. Goteborg: Chalmers University of Technology, 2011. 50 p. URL: https://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/doc/2011_Davidson_An-introduction-to-turbulence-models.pdf.
- [6] Hirsch C. Numerical Computation of Internal and External Flows. Second edition. Oxford: Elsevier, 2007. 538 p. URL: [https://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/doc/Hirsch%20Numerical%20Computation%20of%20Internal%20and%20External%20Flows.Volume1-Fundamentals%20of%20Computational%20Fluid%20Dynamics\(Elsevier,2nd%20edn,2007\).pdf](https://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/doc/Hirsch%20Numerical%20Computation%20of%20Internal%20and%20External%20Flows.Volume1-Fundamentals%20of%20Computational%20Fluid%20Dynamics(Elsevier,2nd%20edn,2007).pdf).
- [7] Meyers J., Geurts B.J., Sagaut P. Quality and Reliability of Large-Eddy Simulations. Berlin; New York: Springer, 2008. 378 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8578-9>.
- [8] Frohlich J., von Terzi D. Hybrid LES/RANS methods for the simulation of turbulent flows // Progress in Aerospace Sciences. 2008. Vol. 44, issue 5. P. 349–377. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2008.05.001>.
- [9] Schiestel R. Modeling and simulation of turbulent flows. Hoboken: John Wiley and Sons ltd., 2008. 725 p. URL: <https://download.e-bookshelf.de/download/0000/5720/27/L-G-0000572027-0002358757.pdf>.
- [10] McComb W.D. Homogeneous, Isotropic Turbulence: Phenomenology, Renormalization and Statistical Closures. Oxford: Oxford University Press, 2014. 408 p. URL: <https://readli.net/homogeneous-isotropic-turbulence-phenomenology-renormalization-and-statistical-closures/>.
- [11] Задорожный В.Г. Линейный хаотический резонанс при вихревом движении // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т. 53, № 4. С. 486–502.
- [12] Колмогоров А.Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Успехи физических наук. 1967. Т. 93, № 3. С. 476–481.
- [13] Krasnoselskii M.A., Pokrovskii A.V. Systems with hysteresis. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 410 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-61302-9>.
- [14] Visintin A. Differential models of hysteresis. New York: Springer-Verlag, 1994. 409 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-11557-2>.
- [15] Antonelli M., Carboni B., Lacarbonara W., Bernardini D., Kalmar-Nagy T. Quantifying rate-dependence of a nonlinear hysteretic device // Nonlinear Dynamics of Structures, Systems and Devices. 2020. Vol. 1. P. 347–355. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-34713-0_35.
- [16] Carboni B., Lacarbonara W., Brewick P., Masri S. Dynamical response identification of a class of nonlinear hysteretic systems // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. 2018. Vol. 29, issue 13. P. 2795–2810. DOI: <https://doi.org/10.1177/1045389X18778792>.
- [17] Mayergoyz I.D. Mathematical Models of Hysteresis. New York: Spinger-Verlag, 1991. 207 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3028-1>.
- [18] Weiss P., Freundereich J.D. Etude de l'aimantation initiale en fonction de la temperature // Archives des Sciences Physiques et Naturelles. 1916. Vol. 42. P. 449–470.




- [19] Preisach F. Uber die magnetische nachwirkung // *Zeitschrift fur Physik*. 1935. Vol. 94. P. 277–302. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01349418>.
- [20] Semenov M.E., Borzunov S.V., Meleshenko P.A. Stochastic Preisach operator: definition within the design approach // *Nonlinear Dynamics*. 2020. Vol. 101, № 11. P. 2599–2614. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05907-w>.
- [21] Borzunov S.V., Semenov M.E., Sel'vesyuk N.I., Meleshenko P.A., Solovyov A.M. Stochastic model of a hysteresis converter with a domain structure // *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2022. Vol. 14, № 2. P. 305–321. DOI: <https://doi.org/10.1134/S207004822202003X>.
- [22] Semenov M.E., Borzunov S.V., Meleshenko P.A. A New Way to Compute the Lyapunov Characteristic Exponents for Non-Smooth and Discontinues Dynamical Systems // *Nonlinear Dynamics*. 2022. Vol. 109, № 3. P. 1805–1821. DOI: <http://dx.doi.org/10.21203/rs.3.rs-1202895/v1>.
- [23] Lacarbonara W. Vestroni F. Nonclassical responses of oscillators with hysteresis // *Nonlinear Dynamics*. 2003. Vol. 32. P. 235–258. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1024423626386>.
- [24] Charalampakis A.E. The response and dissipated energy of Bouc–Wen hysteretic model revisited // *Archive of Applied Mechanics*. 2015. Vol. 85. P. 1209–1223. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-014-0937-8>.
- [25] Ikhoulane F., Rodellar J. On the Hysteretic Bouc–Wen Model // *Nonlinear Dynamics*. 2005. Vol. 42. P. 63–78. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-005-0069-3>.
- [26] Iwan W.D. A distributed-element model for hysteresis and its steady-state dynamic response // *Journal of Applied Mechanics*. 1966. Vol. 33, no. 4. P. 893–900. DOI: <http://doi.org/10.1115/1.3625199>.
- [27] Lin C.-J., Lin P.-T. Tracking control of a biaxial piezo-actuated positioning stage using generalized Duhem model // *Computers and Mathematics with Applications*. 2012. Vol. 64, issue 5. P. 766–787. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.12.015>.
- [28] Flynn D., Zhezherun A., Pokrovskii A., O’Kane J.P. Modeling discontinuous flow through porous media using ODEs with Preisach operator // *Physica B: Condensed Matter*. 2008. Vol. 403, issues 2–3. P. 440–442. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physb.2007.08.070>.
- [29] Khatuntseva O.N. Analysis of the reasons for an aerodynamic hysteresis in flight tests of the Soyuz reentry capsule at the hypersonic segment of its descent // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2011. Vol. 52. P. 544–552. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894411040067>.
- [30] Bak B.D., Kalmar–Nagu T. Energy cascade in a nonlinear mechanistic model of turbulence // *Technische Mechanik*. 2019. Vol. 39, no. 1. P. 64–71. DOI: <https://doi.org/10.24352/UB.OVGU-2019-007>.
- [31] Vakakis A.F., Gendelman O.V., Bergman L.A., McFarland D.M., Kerschen G., Lee Y.S. Nonlinear targeted energy transfer in mechanical and structural systems. Berlin: Springer, 2009. 1033 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-9130-8>.
- [32] Vakakis A.F., Gendelman O. Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators: part II-resonance capture // *Journal of Applied Mechanics*. 2001. Vol. 68, no. 1. P. 42–48. DOI: <http://dx.doi.org/10.1115/1.1345525>.
- [33] Semenov M.E., Reshetova O.O., Solovyov A.M., Tolkachev A.V., Meleshenko P.A. Oscillations under hysteretic conditions: from simple oscillator to discrete sine-Gordon model // *Springer Proceedings in Physics*. 4th. “Topics in Nonlinear Mechanics and Physics — Selected Papers from CSNDD 2018”. 2019. P. 229–253. DOI: https://doi.org/10.1007/978-981-13-9463-8_12.



- [34] Meleshenko P.A., Nesterov V.A., Semenov M.E., Solovyov A.M., Sypalo K.I. Stabilization of a system of unstable pendulums: discrete and continuous case // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2022. Vol. 61, no. 1. P. 135–154. DOI: <http://dx.doi.org/10.1134/S1064230722020113>.
- [35] Chen J.E., Theurich T., Krack M., Sapsis T., Bergman L.A., Vakakis A.F. Intense cross-scale energy cascades resembling “mechanical turbulence” in harmonically driven strongly nonlinear hierarchical chains of oscillators // *Acta Mechanica*. 2022. Vol. 233. P. 1289–1305. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-022-03159-w>.
- [36] Chen J.E., Sun M., Zhang W., Li S.B., Wu R.Q. Cross-scale energy transfer of chaotic oscillator chain in stiffness-dominated range // *Nonlinear Dynamics*. 2022. Vol. 110. P. 2849–2867. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-022-07737-4>.
- [37] Rosenstein M.T., Collins J.J., De Luca C.J. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1993. Vol. 65. P. 117–134. DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(93\)90009-P](https://doi.org/10.1016/0167-2789(93)90009-P).
- [38] Medvedsky A.L., Meleshenko P.A., Nesterov V.A., Reshetova O.O., Semenov M.E. Dynamics of hysteretic-related Van-Der-Pol oscillators: the small parameter method // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2021. Vol. 60, no. 4. P. 511–529. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1064230721040092>.

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-3-63-75

A simple mechanical model of turbulence

Semenov^{1,2} M.E. , Tolkachev^{1,3} A.V. , Kanishcheva¹ O.I. 

¹Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation; mkl150@mail.ru (M.E.); tolkachev.akim@mail.ru (A.V.); oleka-olesya@mail.ru (O.I.);

²State Research Institute of Aircraft Systems (GosNIIAS), Moscow, Russian Federation;

³Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G.F. Morozov, Voronezh, Russian Federation;

Received: 15.05.2024

Revised: 20.06.2024

Accepted: 02.09.2024

Scientific article



Abstract. This work examines the control and stabilization problems of vibrations in a hierarchical chain of oscillators with hysteresis couplings. Hysteresis coupling is formalized within the Bouc – Wen phenomenological model. The mass, stiffness, and damping properties of the oscillators are set to follow a specific scaling rule and decrease exponentially along the chain, thus forming a hierarchy. The model is verified using Kolmogorov’s hypotheses. To do this, energy spectra are constructed under hysteresis in coupling and without it at different amplitudes of the external excitation. As a result of computational experiments, it is shown that for a chain with hysteresis couplings at a high amplitude of excitation, the energy spectrum curve sufficiently corresponds to Kolmogorov’s hypotheses. The amplitude-frequency characteristics of the system are calculated under hysteresis in coupling using the frequency scanning method. In numerical experiments, frequency ranges of external excitation are identified, which correspond to the chaotic behavior of oscillators and their synchronization.

Key words: turbulence; Kolmogorov’s hypotheses; hysteresis; Bouc – Wen model.

Funding. The work is carried out at financial support from Russian Science Fund (project 23-29-00696).

Information about the conflict of interests: the authors and reviewers declare no conflicts of interest.

Citation. Semenov M.E., Tolkachev A.V., Kanishcheva O.I. A simple mechanical model of turbulence . *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 3, pp. 63–75. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-3-63-75. (In Russ.)

© Semenov M.E., Tolkachev A.V., Kanishcheva O.I., 2024

Mikhail E. Semenov (mkl150@mail.ru) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Digital Technologies, Voronezh State University, 1, Universitetskaya Square, Voronezh, 394018, Russian Federation, State Research Institute of Aircraft Systems (GosNIIAS), 7, Viktorenko Street, Moscow, 125319, Russia Federation.

Akim V. Tolkachev (tolkachev.akim@mail.ru) – senior lecturer of the Department of Digital Technologies, Voronezh State University, 1, Universitetskaya Square, Voronezh, 394018, Russian Federation, Voronezh State University of Forestry and Technologies named after G.F. Morozov, 8, Timiryazeva Street, Voronezh, 394613, Russian Federation.

Olesya I. Kanishcheva (oleka-olesya@mail.ru) – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Digital Technologies, Voronezh State University, 1, Universitetskaya Square, Voronezh, 394018, Russian Federation.

References

- [1] Landau L.D., Lifshitz E.M. Fluid mechanics. Oxford: Pergamon Press, 1986. 551 p.
- [2] Friedlander S., Topper L. Turbulence: classic papers on statistical theory. London: Interscience publishers ltd., 1961, 187 p. Available at: [https://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/doc/1961_Turbulence%20classic%20papers%20on%20statistical %20theory.pdf](https://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/doc/1961_Turbulence%20classic%20papers%20on%20statistical%20theory.pdf).
- [3] Townsend A.A. The structure of turbulent shear flow. Cambridge: Cambridge University Press, 1976, 416 p. Available at: <https://books.google.ru/books?id=0wuu9y8vRagC&printsec=frontcover&hl=ru>.
- [4] Tropea C., Yarin A., Foss J. Springer Handbook of Experimental Fluid Mechanics. Berlin: Springer, 2007, 237 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-30299-5>.
- [5] Davidson L. An Introduction to Turbulence Models. Goteborg: Chalmers University of Technology, 2011. 50 p. Available at: https://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/doc/2011_Davidson_An-introduction-to-turbulence-models.pdf.
- [6] Hirsch C. Numerical computation of internal and external flows. Second edition. Oxford: Elsevier, 2007, 538 p. Available at: [https://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/doc/Hirsch%20C.%20Numerical%20Computation%20of%20Internal%20and%20External%20Flows.Volume1-Fundamentals%20of%20Computational%20Fluid%20Dynamics\(Elsevier,2nd%20edn,2007\).pdf](https://cfd.spbstu.ru/agarbaruk/doc/Hirsch%20C.%20Numerical%20Computation%20of%20Internal%20and%20External%20Flows.Volume1-Fundamentals%20of%20Computational%20Fluid%20Dynamics(Elsevier,2nd%20edn,2007).pdf).
- [7] Meyers J., Geurts B. J., Sagaut P. Quality and reliability of large-eddy simulations. Berlin; New York: Springer, 2008, 378 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8578-9>.
- [8] Frohlich J., von Terzi D. Hybrid LES/RANS methods for the simulation of turbulent flows. *Progress in Aerospace Sciences*, 2008, vol. 44, issue 5, pp. 349–377. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2008.05.001>.
- [9] Schiestel R. Modeling and simulation of turbulent flows. Hoboken: John Wiley and Sons ltd., 2008, 725 p. Available at: <https://download.e-bookshelf.de/download/0000/5720/27/L-G-0000572027-0002358757.pdf>.
- [10] McComb W.D. Homogeneous, Isotropic Turbulence: Phenomenology, Renormalization and Statistical Closures. Oxford: Oxford University Press, 2014, 408 p. Available at: <https://readli.net/homogeneous-isotropic-turbulence-phenomenology-renormalization-and-statistical-closures/>.

- [11] Zadorozhniy V.G. Linear chaotic resonance in vortex motion. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2013, vol. 53, no. 4, pp. 486–502 (in Russ.)
- [12] Kolmogorov A.N. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*, 1967, vol. 93, no. 4, pp. 476–481 (in Russ.)
- [13] Krasnosel'skii M.A., Pokrovskii A.V. Systems with hysteresis. Berlin: Springer-Verlag, 1989, 410 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-61302-9>.
- [14] Visintin A. Differential models of hysteresis. New York: Springer-Verlag, 1994, 409 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-11557-2>.
- [15] Antonelli M., Carboni B., Lacarbonara W., Bernardini D., Kalmar-Nagy T. Quantifying rate-dependence of a nonlinear hysteretic device. *Nonlinear Dynamics of Structures, Systems and Devices*, 2020, vol. 1, pp. 347–355. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-34713-0_35.
- [16] Carboni B., Lacarbonara W., Brewick P., Masri S. Dynamical response identification of a class of nonlinear hysteretic systems. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2018, vol. 29, issue 13, pp. 2795–2810. DOI: <https://doi.org/10.1177/1045389X18778792>.
- [17] Mayergoyz I.D. Mathematical models of hysteresis. New York: Spinger-Verlag, 1991, 207 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3028-1>.
- [18] Weiss P., Freundereich J.D. Etude de l'aimantation initiale en fonction de la temperature. *Archives des Sciences Physiques et Naturelles*, 1916, vol. 42, pp. 449–470.
- [19] Preisach F. Uber die magnetische nachwirkung. *Zeitschrift fur Physik*, 1935, vol. 94, pp. 277–302. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01349418>.
- [20] Semenov M.E., Borzunov S.V., Meleshenko P.A. Stochastic Preisach operator: definition within the design approach. *Nonlinear Dynamics*, 2020, vol. 101, no. 11, pp. 2599–2614. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05907-w>.
- [21] Borzunov S.V., Semenov M.E., Sel'vesyuk N.I., Meleshenko P.A., Solovyov A.M. Stochastic model of a hysteresis converter with a domain structure. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2022, vol. 14, issue 2, pp. 305–321. DOI: <https://doi.org/10.1134/S207004822202003X>.
- [22] Semenov M.E., Borzunov S.V., Meleshenko P.A. A New Way to Compute the Lyapunov Characteristic Exponents for Non-Smooth and Discontinues Dynamical Systems. *Nonlinear Dynamics*, 2022, vol. 109, no. 3, pp. 1805–1821. DOI: <http://dx.doi.org/10.21203/rs.3.rs-1202895/v1>.
- [23] Lacarbonara W., Vestroni F. Nonclassical responses of oscillators with hysteresis. *Nonlinear Dynamics*, 2003, vol. 32, pp. 235–258. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1024423626386>.
- [24] Charalampakis A.E. The response and dissipated energy of Bouc–Wen hysteretic model revisited. *Archive of Applied Mechanics*, 2015, vol. 85, pp. 1209–1223. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00419-014-0937-8>.
- [25] Ikhouane F., Rodellar J. On the hysteretic Bouc–Wen model. *Nonlinear Dynamics*, 2005, vol. 42, pp. 63–78. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-005-0069-3>.
- [26] Iwan W.D. A distributed-element model for hysteresis and its steady-state dynamic response. *Journal of Applied Mechanics*, 1966, vol. 33, no. 4, pp. 893–900. DOI: <http://doi.org/10.1115/1.3625199>.
- [27] Lin C.-J., Lin P.-T. Tracking control of a biaxial piezo-actuated positioning stage using generalized Duhem model. *Computers and Mathematics with Applications*, 2012, vol. 64, issue 5, pp. 766–787. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.12.015>.

- [28] Flynn D., Zhezherun A., Pokrovskii A., O’Kane J.P. Modeling discontinuous flow through porous media using ODEs with Preisach operator. *Physica B: Condensed Matter*, 2008, vol. 403, issues 2–3, pp. 440–442. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physb.2007.08.070>.
- [29] Khatuntseva O.N. Analysis of the reasons for an aerodynamic hysteresis in flight tests of the Soyuz reentry capsule at the hypersonic segment of its descent. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2011, vol. 52, pp. 544–552. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894411040067>.
- [30] Bak B.D., Kalmar–Nagu T. Energy cascade in a nonlinear mechanistic model of turbulence. *Technische Mechanik*, 2019, vol. 39, no. 1, pp. 64–71. DOI: <https://doi.org/10.24352/UB.OVGU-2019-007>.
- [31] Vakakis A.F., Gendelman O.V., Bergman L.A., McFarland D.M., Kerschen G., Lee Y.S. Nonlinear targeted energy transfer in mechanical and structural systems. Berlin: Springer, 2009, 1033 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-9130-8>.
- [32] Vakakis A.F., Gendelman O. Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators: part II-resonance capture. *Journal of Applied Mechanics*, 2001, vol. 68, no. 1, pp. 42–48. DOI: <http://dx.doi.org/10.1115/1.1345525>.
- [33] Semenov M.E., Reshetova O.O., Solovyov A.M., Tolkachev A.V., Meleshenko P.A. Oscillations under hysteretic conditions: from simple oscillator to discrete sine-Gordon model. In: *Springer Proceedings in Physics*. 4th. edition. Topics in Nonlinear Mechanics and Physics — Selected Papers from CSNDD 2018, 2019, pp. 229–253. DOI: https://doi.org/10.1007/978-981-13-9463-8_12.
- [34] Meleshenko P.A., Nesterov V.A., Semenov M.E., Solovyov A.M., Sypalo K.I. Stabilization of a system of unstable pendulums: discrete and continuous case. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2022, vol. 61, no. 1, pp. 135–154. DOI: <http://dx.doi.org/10.1134/S1064230722020113>.
- [35] Chen J.E., Theurich T., Krack M., Sapsis T., Bergman L.A., Vakakis A.F. Intense cross-scale energy cascades resembling “mechanical turbulence” in harmonically driven strongly nonlinear hierarchical chains of oscillators. *Acta Mechanica*, 2022, vol. 233, pp. 1289–1305. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-022-03159-w>.
- [36] Chen J.E., Sun M., Zhang W., Li S.B., Wu R.Q. Cross-scale energy transfer of chaotic oscillator chain in stiffness-dominated range. *Nonlinear Dynamics*, 2022, vol. 110, pp. 2849–2867. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-022-07737-4>.
- [37] Rosenstein M.T., Collins J.J., De Luca C.J. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1993, vol. 65, pp. 117–134. DOI: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(93\)90009-P](https://doi.org/10.1016/0167-2789(93)90009-P).
- [38] Medvedsky A.L., Meleshenko P.A., Nesterov V.A., Reshetova O.O., Semenov M.E. Dynamics of hysteretic-related Van-Der-Pol oscillators: the small parameter method. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2021, vol. 60, no. 4, pp. 511–529. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1064230721040092>.