DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-3-7-16 УДК 517.51

Два замечания о свойствах функций ограниченной вариации

Асташкин С.В., ***Ершов В.М.***

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация; astash56@mail.ru (С.В.); ershov189510@yandex.ru (В.М.);

Поступила: 18.07.2024
Рассмотрена: 22.08.2024
Принята: 02.09.2024

Научная статья

Аннотация. В терминах вариаций доказано достаточное условие равномерной сходимости последовательностей непрерывных функций. С помощью этого результата получено дополнение классической теоремы Хелли о выделении сходящихся последовательностей функций с равномерно ограниченными вариациями в случае, когда предельная функция непрерывна. Кроме того, на примере показано, что условие непрерывной дифференцируемости функции, обеспечивающее дифференцируемость ее вариации с переменным верхним пределом, является в определенном смысле точным.

Ключевые слова: вариация; функция ограниченной вариации; равномерная сходимость; модуль непрерывности; теорема Хелли; теорема Штольца.

Введение

Пусть дана функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Напомним, что ее *полной вариацией на* $[a, b]$ называется величина

$$V_a^b(f) = \sup \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|,$$

где супремум берется по множеству всех разбиений $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Если $V_a^b(f) < \infty$, то говорят, что f — *функция ограниченной вариации*; множество всех функций ограниченной вариации на $[a, b]$ является линейным пространством и обозначается через $V([a, b])$.

Пространство $V([a, b])$ играет важную роль во многих вопросах теории функций и функционального анализа. С ним тесно связано применение интеграла Стилтьеса при решении самых разных задач. В частности, на его использовании основано доказательство классической теоремы Ф. Рисса о том, что пространство $V([a, b])$, рассматриваемое с нормой $\|f\|_V := V_a^b(f)$, изометрично пространству всех линейных ограниченных функционалов на пространстве $C([a, b])$ (см., например, [3, гл. VI, § 6, теор. 4] или [2, с. 309]). Кроме того, пространство $V([a, b])$ может быть отождествлено со множеством всех ограниченных борелевских мер (вообще говоря, знакопеременных), определенных на отрезке $[a, b]$ [1, предложение 4.2.9].

В данной статье рассматриваются два вопроса, связанные со свойствами функций ограниченной вариации. Во-первых, в терминах вариаций доказано достаточное условие равномерной сходимости последовательностей непрерывных функций. Во-вторых, найдены условия, при которых вариация функции с переменным верхним пределом дифференцируема; приведен пример, показывающий точность этих условий.

Всюду далее, как обычно, $C([a, b])$ и $C^1([a, b])$ — пространства непрерывных и соответственно непрерывно-дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций.

1. Об одном достаточном условии равномерной сходимости последовательностей непрерывных функций ограниченной вариации

Докажем сначала следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность невозрастающих функций на* $[a,b]$ *такая, что* $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ *для всех* $t \in [a,b]$, *где* f *непрерывна на* $[a,b]$. *Тогда сходимость последовательности* $\{f_n\}$ *к* f *равномерна на* $[a,b]$.

Доказательство. Обозначим через $\omega(g,\eta)$, $\eta > 0$, модуль непрерывности функции g, определенной на $[a,b]$, т. е.

$$\omega(g,\eta) := \sup_{a\leqslant t_1,t_2\leqslant b, |t_1-t_2|\leqslant\eta} |g(t_1)-g(t_2)|,$$

и покажем, что

$$\lim_{\eta\to 0}\limsup_{n\to\infty} \omega(f_n,\eta) = 0. \tag{1}$$

Предполагая противное, найдем $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для всех $\eta > 0$

$$\limsup_{n\to\infty} \omega(f_n,\eta) > \varepsilon_0.$$

Тогда в силу непрерывности f существует $\delta > 0$ такое, что

$$\omega(f,\delta) < \frac{\varepsilon_0}{3}. \tag{2}$$

Согласно предыдущему неравенству, найдутся номера $n_1 < n_2 < \ldots$ и точки $t_k, s_k \in [a,b]$, $t_k < s_k$, $k = 1,2,\ldots$, для которых выполнено:

$$s_k - t_k < \frac{\delta}{2} \ \text{ и } \ f_{n_k}(t_k) - f_{n_k}(s_k) > \varepsilon_0, \ \ k = 1,2,\ldots \tag{3}$$

Переходя, если необходимо, к подпоследовательностям, можно считать, что $t_k \to t_0$, $s_k \to s_0$, где $t_0, s_0 \in [a,b]$. Очевидно, что $0 \leqslant s_0 - t_0 \leqslant \delta/2$.

Предположим, что $a < t_0$ и $s_0 < b$. Тогда для некоторого $\eta \in (0,\delta/4)$ и всех достаточно больших k

$$a < t_0 - \eta < t_k < s_k < s_0 + \eta < b,$$

поэтому в силу второго неравенства в (3) и монотонности функций f_n получим

$$\varepsilon_0 < f_{n_k}(t_k) - f_{n_k}(s_k) \leqslant f_{n_k}(t_0-\eta) - f_{n_k}(s_0+\eta). \tag{4}$$

В то же время, если k достаточно велико, то по условию

$$\max\left(|f_{n_k}(t_0-\eta) - f(t_0-\eta)|, |f_{n_k}(s_0+\eta) - f(s_0+\eta)|\right) < \frac{\varepsilon_0}{3},$$

и, значит, так как $0 < (s_0+\eta) - (t_0-\eta) = (s_0 - t_0) + 2\eta < \delta$, в силу (2)

$$\begin{aligned} f_{n_k}(t_0-\eta) - f_{n_k}(s_0+\eta) \ &\leqslant \ |f_{n_k}(t_0-\eta) - f(t_0-\eta)| + \\ &+ \ |f(t_0-\eta) - f(s_0+\eta)| + \\ &+ \ |f_{n_k}(s_0+\eta) - f(s_0+\eta)| < \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Так как последнее неравенство противоречит (4), то (1) в этом случае доказано.

Если $t_0 = a$, то опять для некоторого $\eta \in (0,\delta/2)$ и всех достаточно больших k

$$a \leqslant t_k < s_k < s_0 + \eta < b.$$

Далее так же, как и ранее, с одной стороны,

$$\varepsilon_0 < f_{n_k}(t_k) - f_{n_k}(s_k) \leqslant f_{n_k}(a) - f_{n_k}(s_0 + \eta).$$

С другой стороны, так как для достаточно больших k

$$\max\left(|f_{n_k}(a) - f(a)|, |f_{n_k}(s_0+\eta) - f(s_0+\eta)|\right) < \frac{\varepsilon_0}{3}$$

и $0 < (s_0 + \eta) - a = (s_0 - a) + \eta < \delta$, применяя (2), получим

$$\begin{aligned} f_{n_k}(a) - f_{n_k}(s_0+\eta) \quad &\leqslant \quad |f_{n_k}(a) - f(a)| + |f(a) - f(s_0+\eta)| + \\ &+ \quad |f_{n_k}(s_0+\eta) - f(s_0+\eta)| < \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Случай, когда $s_0 = b$, рассматривается совершенно аналогично.

Теперь доказательство леммы получается стандартным образом. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно, а $\eta > 0$ таково, что $\omega(f,\eta) < \varepsilon/3$ и в силу (1) $\omega(f_n,\eta) < \varepsilon/3$ для всех достаточно больших n. По условию для каждого $t \in [a,b]$ найдется $n_t \in \mathbb{N}$ такое, что $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon/3$ для всех $n > n_t$. Тогда, если $|s-t| < \eta$, то в силу выбора η для всех достаточно больших n имеем:

$$|f_n(s) - f(s)| \leqslant |f_n(s) - f_n(t)| + |f_n(t) - f(t)| + |f(t) - f(s)| \leqslant \omega(f_n,\eta) + \frac{\varepsilon}{3} + \omega(f,\eta) < \varepsilon.$$

Так как по соображениям компактности $[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{m}(t_i - \eta, t_i + \eta)$ для некоторого конечного набора точек t_i, $i = 1,2,\ldots,m$, то отсюда $|f_n(s) - f(s)| < \varepsilon$ для любого $s \in [a,b]$ и всех достаточно больших n. □

Применяя лемму 1, а также известное представление функций ограниченной вариации, нетрудно получить следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть функции f_n, $n \in \mathbb{N}$, определенные на $[a,b]$, имеют равномерно ограниченные вариации, т. е. $V_a^b(f_n) \leqslant C$ для некоторого $C > 0$ и всех $n \in \mathbb{N}$. Если $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ для всех $t \in [a,b]$ и f непрерывна на $[a,b]$, то сходимость последовательности $\{f_n\}$ к f равномерна на $[a,b]$.

Доказательство. Напомним, что каждая функция ограниченной вариации g на $[a,b]$ представима в виде разности двух невозрастающих функций. Точнее (см., например, [4, гл. VIII, § 3, доказательство теоремы 6]): $g = g_1 - g_2$, где $g_1(t) := -V_a^t(g) + g(t)$, $g_2(t) := -V_a^t(g)$. Если дополнительно g непрерывна на $[a,b]$, то функции g_1 и g_2 также непрерывны на этом отрезке [4, гл. VIII, § 5, теор. 1, следствие]. Применяя эти результаты к функциям f_n и f, получим, что $f_n = u_n - v_n$, $n \in \mathbb{N}$, и $f = u - v$, причем функции u_n, v_n, $n \in \mathbb{N}$, не возрастают, а u, v не возрастают и непрерывны. Кроме того, из приведенного ранее определения функций g_1, g_2 из представления g, а также того, что по условию $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ для всех $t \in [a,b]$, следует: $\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t)$, $\lim_{n\to\infty} v_n(t) = v(t)$, $t \in [a,b]$. Поэтому в силу леммы 1 последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ сходятся к u и v соответственно равномерно на $[a,b]$. Отсюда вытекает доказываемое утверждение. □

Классическая теорема Хелли [4, гл. VIII, § 4] утверждает, что из любого множества равномерно ограниченных на $[a,b]$ функций с равномерно ограниченными вариациями можно извлечь последовательность $\{f_n\}$, которая сходится в каждой точке $[a,b]$ к некоторой функции f ограниченной вариации. В случае, когда f непрерывна на $[a,b]$, из теоремы 1 вытекает следующее дополнение к этому результату.

Следствие 1. *Если предельная функция f в теореме Хелли непрерывна на $[a,b]$, то сходимость последовательности $\{f_n\}$ к f равномерна на этом отрезке.*

2. О дифференцируемости вариации с переменным верхним пределом

Теорема 2. Пусть $f \in C^1([a,b])$. Тогда $V_a^b(f) = \int\limits_a^b |f'(t)|\,dt$.

Отсюда, в частности, следует, что функция $F(x) := V_a^x(f)$ дифференцируема на $[a,b]$ и $F'(x) = |f'(x)|$ для всех $x \in [a,b]$.

Доказательство. Пусть $\pi : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ — произвольное разбиение отрезка $[a,b]$, $\lambda(\pi) = \max_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i - x_{i-1})$ — параметр разбиения π. Составим сумму

$$v_\pi(f) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|.$$

По теореме Лагранжа для каждого $i = 1,2,\ldots,n$ существует $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ такое, что $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$. Поэтому

$$v_\pi(f) = \sum_{i=1}^{n} |f'(\xi_i)|(x_i - x_{i-1}).$$

Заметим, что в правой части этого равенства стоит интегральная сумма Римана $S_\pi(|f'|)$ функции $|f'(t)|$ на $[a,b]$.

С другой стороны, в силу определения вариации функции существует последовательность разбиений π_k, $k = 1,2,\ldots$, отрезка $[a,b]$ такая, что $\lambda(\pi_k) \to 0$ и $v_{\pi_k}(f) \to V_a^b(f)$ при $k \to \infty$. Таким образом, в силу сделанного ранее замечания

$$v_{\pi_k}(f) = S_{\pi_k}(|f'|),\ \ k = 1,2,\ldots$$

Переходя к пределу в этом равенстве при $k \to \infty$, по определению интеграла Римана получаем, что

$$V_a^b(f) = \int\limits_a^b |f'(t)|\,dt,$$

и тем самым первое утверждение теоремы доказано. Что касается второго утверждения, то оно — непосредственное следствие первого и формулы Ньютона — Лейбница для дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом от непрерывной функции. □

Далее мы покажем, что условие непрерывности производной во втором утверждении последней теоремы существенно. Точнее, если производная функции ограниченной вариации имеет разрыв хотя бы в одной точке, то вариация с переменным верхним пределом в этой точке может быть не дифференцируема.

При построении соответствующего примера нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения, с которых мы и начнем.

Лемма 2. *Пусть функция f непрерывна в точке a справа и в точке b слева. Тогда* $V_a^b(f) = \lim_{\eta\to 0+} V_{a+\eta}^{b-\eta}(f)$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности функции f в точках a и b существует $\delta > 0$ такое, что

$$\max\left(|f(t) - f(a)|, |f(s) - f(b)|\right) < \varepsilon, \tag{5}$$

если $\max\left(t - a, b - s\right) < \delta$. Рассмотрим два случая в зависимости от того, конечна вариация функции f или нет.

(a) $V_a^b(f) < \infty$. По определению вариации для заданного $\varepsilon > 0$ найдется разбиение $\pi : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ отрезка $[a, b]$ такое, что

$$v_\pi(f) = \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \geqslant V_a^b(f) - \varepsilon.$$

При этом, не ограничивая общности, можно считать, что

$$\max(t_1 - a, b - t_{n-1}) < \delta. \tag{6}$$

Тогда в силу (5), обозначая через π' разбиение отрезка $[t_1, t_{n-1}]$ точками $t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1}$, получим

$$v_{\pi'}(f) \geqslant V_a^b(f) - 3\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\lim_{\eta \to 0+} V_{a+\eta}^{b-\eta}(f) \geqslant V_{t_1}^{t_{n-1}}(f) \geqslant v_{\pi'}(f) \geqslant V_a^b(f) - 3\varepsilon,$$

если только выполнено (6). В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда

$$\lim_{\eta \to 0+} V_{a+\eta}^{b-\eta}(f) \geqslant V_a^b(f).$$

Так как противоположное неравенство очевидно, то в случае (a) лемма доказана.

(b) $V_a^b(f) = \infty$. Тогда для каждого $M > 0$ существует разбиение $\pi : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ отрезка $[a, b]$ такое, что

$$\sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \geqslant M.$$

При этом опять можно считать, что выполнено условие (6). Тем самым, рассуждая аналогично предыдущему случаю, получим, что

$$\lim_{\eta \to 0+} V_{a+\eta}^{b-\eta}(f) \geqslant V_{t_1}^{t_{n-1}}(f) \geqslant M - 2\varepsilon.$$

Так как $M > 0$ произвольно велико, то отсюда

$$\lim_{\eta \to 0+} V_{a+\eta}^{b-\eta}(f) = \infty.$$

Таким образом, лемма в случае (b) также доказана. □

Распространим теперь первое утверждение теоремы 2 на класс функций, имеющих кусочно-непрерывную производную.

Предложение 1. *Пусть $f \in C([a, b])$ и дифференцируема на (a, b) за исключением, возможно, конечного числа точек $u_1 < u_2 < \ldots < u_m$, причем f' непрерывна на каждом интервале $(a, u_1), (u_1, u_2), \ldots, (u_m, b)$. Предположим также, что интеграл $\int\limits_a^b |f'(t)|\,dt$ сходится как несобственный интеграл II рода. Тогда $f \in V([a, b])$ и $V_a^b(f) = \int\limits_a^b |f'(t)|\,dt$.*

Доказательство. Пусть $\delta > 0$ таково, что

$$a + \delta < u_1 - \delta < u_1 + \delta < u_2 - \delta < \ldots < u_m + \delta < b - \delta.$$

Рассмотрим отрезки $\Delta_k := [u_{k-1} + \delta, u_k - \delta]$, $k = 1, \ldots, m + 1$, где $u_0 := a$, $u_{m+1} := b$. Так как по условию $f \in C^1(\Delta_k)$, $k = 1, \ldots, m + 1$, то по теореме 2

$$V_{\Delta_k}(f) = \int\limits_{\Delta_k} |f'(t)|\,dt.$$

Если теперь $\delta \to 0$, то в силу леммы 2 и определения несобственного интеграла получим, что

$$V_{u_k}^{u_{k+1}}(f) = \int\limits_{u_k}^{u_{k+1}} |f'(t)|\,dt \;\text{ для всех } k = 0, \ldots, m.$$

В итоге, суммируя эти равенства, в силу аддитивности вариации и несобственного интеграла приходим к доказываемому соотношению. □

В заключение покажем, что вариация с переменным верхним пределом может быть не дифференцируема в том случае, когда производная функции, вариация которой рассматривается, имеет разрыв хотя бы в одной точке (ср. со вторым утверждением теоремы 2).

Предложение 2. *Пусть* $1 < \alpha < 2$. *Функция* $f(x) := x^2 \cos\frac{1}{x^\alpha}$ *при* $0 < x \leqslant 1$, $f(0) = 0$, *обладает следующими свойствами:*

(a) f *дифференцируема на* $[0,1]$ *и производная* f' *непрерывна на* $(0,1]$*;*

(b) $f \in V([0,1])$*;*

(c) функция $F(x) := V_0^x(f)$ *не дифференцируема в нуле.*

Доказательство. (a) Если $0 < x \leqslant 1$, то

$$f'(x) = 2x\cos\frac{1}{x^\alpha} + \alpha x^{1-\alpha}\sin\frac{1}{x^\alpha}. \tag{7}$$

Кроме того, по определению производной

$$f'(0) = \lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0+} x\cos\frac{1}{x^\alpha} = 0.$$

Таким образом, функция f дифференцируема на $[0,1]$ и f' непрерывна на $(0,1]$. В то же время f' разрывна в нуле справа, так как $\varlimsup\limits_{x\to 0+} f'(x) = +\infty$.

(b) Покажем, что интеграл $\int\limits_0^1 |f'(x)|\,dx$ сходится, используя признак сравнения. Действительно, в силу (7)

$$|f'(x)| \leqslant h(x), \;\text{ где } h(x) := 2x + \alpha x^{1-\alpha}.$$

При этом, так как $\alpha < 2$, то

$$\int\limits_0^1 h(x)\,dx = \int\limits_0^1 (2x + \alpha x^{1-\alpha})\,dx = 2\int\limits_0^1 x\,dx + \alpha\int\limits_0^1 x^{1-\alpha}\,dx = 1 + \frac{\alpha}{2-\alpha} < \infty.$$

Таким образом, несобственный интеграл $\int\limits_0^1 |f'(x)|\,dx$ сходится, поэтому, применяя предложение 1, получаем, что $f \in V([0,1])$.

(c) Для доказательства недифференцируемости функции $F(x) = V_0^x(f)$ в нуле достаточно показать, что для некоторой убывающей к нулю последовательности $\{x_n\} \subset (0,1]$ имеет место равенство:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{F(x_n)}{x_n} = +\infty.$$

В свою очередь, по теореме Штольца [5, с. 67–68] это эквивалентно тому, что

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{F(x_n)-F(x_{n+1})}{x_n - x_{n+1}} = +\infty$$

или в силу предложения 1 тому, что

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\int\limits_{x_{n+1}}^{x_n}|f'(t)|\,dt}{x_n-x_{n+1}}=+\infty. \tag{8}$$

Из равенства (7) следует, что

$$\frac{1}{x_n-x_{n+1}}\int\limits_{x_{n+1}}^{x_n}|f'(t)|\,dt\geqslant\frac{1}{x_n-x_{n+1}}\left(\alpha\int\limits_{x_{n+1}}^{x_n}\left|t^{1-\alpha}\sin\frac{1}{t^\alpha}\right|dt-2\int\limits_{x_{n+1}}^{x_n}\left|t\cos\frac{1}{t^\alpha}\right|dt\right).$$

Так как

$$0\leqslant\frac{2}{x_n-x_{n+1}}\int\limits_{x_{n+1}}^{x_n}\left|t\cos\frac{1}{t^\alpha}\right|dt\leqslant\frac{2}{x_n-x_{n+1}}\int\limits_{x_{n+1}}^{x_n}|t|\,dt=x_n+x_{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0,$$

то отсюда получаем, что (8) будет доказано, если показать следующее:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha}{x_n-x_{n+1}}\int\limits_{x_{n+1}}^{x_n}\left|t^{1-\alpha}\sin\frac{1}{t^\alpha}\right|dt=+\infty. \tag{9}$$

Полагая $x_n:=(\pi n)^{-\frac{1}{\alpha}}$, в интеграле из левой части (9) сделаем замену $p=t^{-\alpha}$. Тогда

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{(\pi n)^{-\frac{1}{\alpha}}-(\pi(n+1))^{-\frac{1}{\alpha}}}\int\limits_{(\pi(n+1))^{-\frac{1}{\alpha}}}^{(\pi n)^{-\frac{1}{\alpha}}}\left|t^{1-\alpha}\sin\frac{1}{t^\alpha}\right|dt&=\frac{1}{(\pi n)^{-\frac{1}{\alpha}}-(\pi(n+1))^{-\frac{1}{\alpha}}}\int\limits_{\pi n}^{\pi(n+1)}\frac{|\sin p|}{p^{\frac{2}{\alpha}}}\,dp\geqslant\\&\geqslant\frac{\int\limits_{\pi n+\frac{\pi}{6}}^{\pi(n+1)-\frac{\pi}{6}}p^{-\frac{2}{\alpha}}\,dp}{2\Big((\pi n)^{-\frac{1}{\alpha}}-(\pi(n+1))^{-\frac{1}{\alpha}}\Big)}.\end{aligned} \tag{10}$$

Из этой оценки вытекает, что соотношение (9) выполнено для выбранной последовательности $\{x_n\}$, если правая часть (10) стремится к $+\infty$ при $n\to+\infty$.

Так как

$$\int\limits_{\pi n+\frac{\pi}{6}}^{\pi(n+1)-\frac{\pi}{6}}p^{-\frac{2}{\alpha}}\,dp=\frac{\alpha}{2-\alpha}\Big(\big(\pi n+\frac{\pi}{6}\big)^{1-\frac{2}{\alpha}}-\big(\pi n+\frac{5\pi}{6}\big)^{1-\frac{2}{\alpha}}\Big),$$

то элементарные преобразования показывают, что предел правой части в (10) при $n\to+\infty$ равен следующему:

$$\frac{\alpha}{2(2-\alpha)}\lim_{n\to+\infty}\frac{\big(\pi n+\frac{\pi}{6}\big)^{1-\frac{2}{\alpha}}-\big(\pi n+\frac{5\pi}{6}\big)^{1-\frac{2}{\alpha}}}{(\pi n)^{-\frac{1}{\alpha}}-(\pi(n+1))^{-\frac{1}{\alpha}}}=\frac{\alpha\pi^{1-\frac{1}{\alpha}}}{2(2-\alpha)}\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\frac{1}{\alpha}}\left(1-\left(\frac{n+\frac{1}{6}}{n+\frac{5}{6}}\right)^{\frac{2}{\alpha}-1}\right)}{\left(n+\frac{1}{6}\right)^{\frac{2}{\alpha}-1}\left(1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)}.$$

Далее, по правилу Лопиталя

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{1-\left(\frac{y+\frac{1}{6}}{y+\frac{5}{6}}\right)^{\frac{2}{\alpha}-1}}{1-\left(\frac{y}{y+1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}=\frac{2(2-\alpha)}{3}\lim_{y\to+\infty}\frac{\left(y+\frac{1}{6}\right)^{\frac{2}{\alpha}-2}\left(y+\frac{5}{6}\right)^{-\frac{2}{\alpha}}}{y^{\frac{1}{\alpha}-1}(y+1)^{-\frac{1}{\alpha}-1}}=$$

$$=\frac{2(2-\alpha)}{3}\lim_{y\to+\infty}\frac{y^{\frac{2}{\alpha}-2}\left(1+\frac{1}{6y}\right)^{\frac{2}{\alpha}-2}y^{-\frac{2}{\alpha}}\left(1+\frac{5}{6y}\right)^{-\frac{2}{\alpha}}}{y^{\frac{1}{\alpha}-1}y^{-\frac{1}{\alpha}-1}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-\frac{1}{\alpha}-1}}=\frac{2(2-\alpha)}{3},$$

и, значит, так как $\alpha>1$, то

$$\frac{\alpha\pi^{1-\frac{1}{\alpha}}}{2(2-\alpha)}\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\frac{1}{\alpha}}\left(1-\left(\frac{n+\frac{1}{6}}{n+\frac{5}{6}}\right)^{\frac{2}{\alpha}-1}\right)}{\left(n+\frac{1}{6}\right)^{\frac{2}{\alpha}-1}\left(1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)}=\frac{\alpha\pi^{1-\frac{1}{\alpha}}}{3}\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\frac{1}{\alpha}}}{\left(n+\frac{1}{6}\right)^{\frac{2}{\alpha}-1}}=+\infty.$$

В итоге соотношение (9), а с ним и предложение доказаны. □

Финансирование. Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа, соглашение № 075-02-2024-1456.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Цитирование. Асташкин С.В., Ершов В.М. Два замечания о свойствах функций ограниченной вариации // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 3. С. 7–16. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-3-7-16.

Асташкин Сергей Владимирович (astash56@mail.ru) – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой функционального анализа и теории функций, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.
Ершов Владислав Максимович (ershov189510@yandex.ru) – студент, группа № 4341-010501D, механико-математический факультет, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Литература

[1] Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. Москва; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2011. 728 с. URL: https://djvu.online/file/J45IxweiiQHOT?ysclid=m1erhtogan399934303.

[2] Городецкий В.В., Нагнибида Н.И., Настасиев П.П. Методы решения задач по функциональному анализу. Москва: ЛИБРОКОМ, 2010. 479 с. URL: https://djvu.online/file/rMxu2zCznQGSW?ysclid=m1f3l7qh3k850744665.

[3] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука, 1976. 542 с. URL: https://djvu.online/file/acB4ODGXeJeSf?ysclid=m1f3rqwfjj688702689.

[4] Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. Москва: Наука, 1974. 480 с. URL: https://djvu.online/file/KO7DQP52iL3oh?ysclid=m1f3v42p8s44016586.

[5] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I. Москва: Наука, 1962. 616 с. URL: https://djvu.online/file/x6N9RDsAtAL7X?ysclid=m1f3yq51dy652360573.

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-3-7-16

Two remarks on properties of functions of bounded variation

Astashkin S.V., ***Ershov V.M.***

Samara National Research University, Samara, Russian Federation; astash56@mail.ru (S.V.); ershov189510@yandex.ru (V.M.);

Received: *18.07.2024*
Revised: *22.08.2024*
Accepted: *02.09.2024*

Scientific article

Abstract. In terms of variations, a sufficient condition for the uniform convergence of sequences of continuous functions is proved. Using this result, we obtain an addition to the classical Helly theorem on the selection of convergent sequences of functions with uniformly bounded variations in the case when the limit function is continuous. Also, by using an example we show that the condition of continuous differentiability of a function, ensuring the differentiability of its variation with the variable upper limit, is in a certain sense sharp.

Key words: variation; function of bounded variation; uniform convergence; modulus of continuity; Helly's theorem; Stolz's theorem.

Funding. The work was carried out within the framework of the implementation of the development program of the Scientific and Educational Mathematical Center of the Volga Federal District, agreement № 075-02-2024-1456.

Information about the conflict of interests: the authors and reviewers declare no conflict of interest.

Citation. Astashkin S.V., Ershov V.M. Two remarks on properties of functions of bounded variation. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 3, pp. 7–16. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-3-7-16 (In Russ.)

Sergey V. Astashkin (astash56@mail.ru) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, head of the Department of Functional Analysis and Function Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.
Vladislav M. Ershov (ershov189510@yandex.ru) – student, Faculty of Mathematics and Mechanics, group no. 4341-010501D, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

[1] Bogachev V.I., Smolyanov O.G. Real and functional analysis: university course. Moscow; Izhevsk: NITs "Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika", 2011, 728 p. Available at: Available at: https://djvu.online/file/J45IxweiiQHOT?ysclid=m1erhtogan399934303. (In Russ.)

[2] Gorodetsky V.V., Nagnibida N.I., Nastasiev P.P. Methods for solving problems in functional analysis. Moscow: LIBROKOM, 2010, 479 p. Available at: https://djvu.online/file/rMxu2zCznQGSW?ysclid=m1f3l7qh3k850744665. (In Russ.)

[3] Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elements of the theory of functions and functional analysis. Moscow: Nauka, 1976, 542 p. Available at: https://djvu.online/file/acB4ODGXeJeSf?ysclid=m1f3rqwfjj688702689. (In Russ.)

[4] Natanson I.P. Theory of functions of a real variable. Moscow: Nauka, 1974, 480 p. Available at: https://djvu.online/file/KO7DQP52iL3oh?ysclid=m1f3v42p8s44016586. (In Russ.)

[5] Fihtengoltz G.M. The course of differential and integral calculus. Vol. I. Moscow: Nauka, 1962, 616 p. Available at: https://djvu.online/file/x6N9RDsAtAL7X?ysclid=m1f3yq51dy652360573. (In Russ.)