

МЕХАНИКА

MECHANICS



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-2-45-53

УДК 620.17

Дата: поступления статьи: 09.01.2024
после рецензирования: 27.02.2024
принятия статьи: 15.05.2024

А.В. Суслов

Самарский государственный технический университет,
г. Самара, Российская Федерация

E-mail: a.v.suslov@inbox.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-1076-1257>

Е.Е. Ярославкина

Самарский государственный технический университет,
г. Самара, Российская Федерация

E-mail: yaroslavkina7@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7633-2154>

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИН

АННОТАЦИЯ

Проведены исследования влияния температурных напряжений на частоты собственных колебаний прямоугольных пластин при различных условиях закрепления с помощью аналитического метода и компьютерного моделирования методом конечных элементов. Установлено, что с ростом температуры частота собственных колебаний уменьшается. Наличие температурных напряжений оказывает существенное влияние на изменение частоты колебаний. Сделан вывод, что наибольшее изменение претерпевают низшие частоты. Кроме этого, с ростом температуры меняется форма колебаний.

Ключевые слова: температурные напряжения; деформация; колебания; пластины; измерительное оборудование.

Цитирование. Суслов А.В., Ярославкина Е.Е. Исследование влияния температурных напряжений на собственные колебания пластин // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 2. С. 45–53. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-2-45-53>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Суслов А.В., Ярославкина Е.Е., 2024

Антон Владимирович Суслов — старший преподаватель кафедры информационно-измерительной техники, Самарский государственный технический университет, 443100, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Екатерина Евгеньевна Ярославкина — кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой информационно-измерительной техники, Самарский государственный технический университет, 443100, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Введение

Одной из причин появления дополнительных погрешностей при проведении измерений выступает температура. Температурное расширение материалов приводит как к изменению самих объектов исследования, так и к изменению компонентов измерительного оборудования. Кроме этого, наличие

температурного расширения может приводить к неточности инженерных расчетов, например при оценке собственных колебаний конструкций.

Влияние температуры на частоту собственных колебаний проводилось в [1; 2]. В указанных работах установлено, что с ростом температуры идет уменьшение собственных частот колебаний балок за счет изменения упругих свойств исследуемых объектов, в частности снижения модуля упругости. В работе [3] проведены исследования влияния температуры на колебания шарнирно опертой пластины, а в [4] — влияние температуры на отклик защемленной пластины на динамическое воздействие в зависимости от температуры. Обе работы также указывают на наличие зависимости частоты колебаний пластины от температуры.

С целью изучения влияния температуры на собственные колебания пластин проведены аналитические расчеты и компьютерное моделирование прямоугольных пластин при различных условиях закрепления.

1. Постановка задачи

Дифференциальное уравнение свободных колебаний изотропной пластины постоянной толщины имеет вид [5]:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

или

$$D \Delta \Delta w + m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

где w — прогиб; m_0 — масса пластины на единицу площади; D — цилиндрическая жесткость пластины.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)},$$

где E — модуль упругости; h — толщина пластины; μ — коэффициент Пуассона.

$$m_0 = \rho h,$$

где ρ — плотность материала пластины.

Решение уравнения должно удовлетворять граничным условиям, зависящим от способа закрепления краев пластины [6; 7]. В настоящей статье рассматривается пластина с защемленными и свободными краями (рис 1.1). Граничные условия на краях $x = a$, $y = b$:

1. Защемленный край. Прогиб и угол поворота равны нулю:

$$\begin{cases} w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 & \text{при } x = a; \\ w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 & \text{при } y = b. \end{cases}$$

2. Свободный край. Момент и поперечная сила равны нулю:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 & \text{при } x = a; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} = 0 & \text{при } y = b. \end{cases}$$

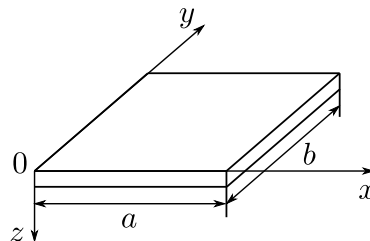


Рис. 1.1. Схема пластины
 Fig. 1.1. Plate diagram

Пластины со всеми возможными случаями краевых условий исследованы с помощью метода Релея—Ритца.

Решение для частоты собственных колебаний следующее [8]:

$$\omega = k_{mn}^2 \left(\frac{D}{m_0} \right)^{\frac{1}{2}},$$

где

$$k_{mn}^2 = \pi^2 \left\{ \frac{A_m^4}{a^4} + \frac{A_n^4}{b^4} + \frac{2}{a^2 b^2} [\mu B_m B_n + (1 - \mu) C_m C_n] \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $A_m, A_n, B_m, B_n, C_m, C_n$ — коэффициенты, зависящие от условий закрепления и количества узловых точек колебаний m и n , включая края пластины; m — количество узловых точек вдоль оси x (вдоль стороны a), n — количество узловых точек вдоль оси y (вдоль стороны b) (см. рис. 1.1). Значения коэффициентов можно найти в [8; 9].

Повышение температуры приводит к изменению упругих свойств материала. У стали с повышением температуры снижаются модуль упругости и плотность, повышается коэффициент Пуассона. Кроме этого, повышение температуры приводит к температурному расширению материала. В случае наличия ограничения температурного расширения, например при жесткой заделке, появляется противодействующая сила со стороны опоры, которая приводит к появлению напряжений в самом материале.

Если в срединной плоскости пластины действуют продольные усилия N_{11}, N_{12}, N_{22} , уравнение колебаний выглядит как [9]:

$$D \Delta \Delta w + m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = N_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

В случае когда усилия N_{11}, N_{22} постоянны, а N_{12} равно нулю, частота свободных колебаний будет иметь вид:

$$\omega = k_{mn}^2 \left(\frac{D}{m_0} \right)^{\frac{1}{2}},$$

где

$$k_{mn}^2 = \pi^2 \left\{ \frac{A_m^4}{a^4} + \frac{A_n^4}{b^4} + \frac{2}{a^2 b^2} [\mu B_m B_n + (1 - \mu) C_m C_n] + 2 \left(\frac{q_1 C_m}{a^4} + \frac{q_2 C_n}{b^4} \right) \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где

$$q_1 = \frac{N_{11} a^2}{2\pi D}, \quad q_2 = \frac{N_{22} b^2}{2\pi D}.$$

Таким образом, температурные изменения упругих свойств материала и наличие температурных напряжений будут влиять на частоту собственных колебаний пластины.

Расчеты влияния температуры на частоту собственных колебаний проводились на следующем объекте исследования: стальная пластина с геометрическими размерами: $a = 200$ мм, $b = 200$ мм, $h = 2$ мм; упругие свойства материала: $E = 200$ ГПа, $\rho = 7850$ кг/м³, $\mu = 0,3$, $\alpha = 1,5 \cdot 10^{-5}$ 1/°С.

Аналитические решения найдены по вышеприведенным формулам, компьютерное моделирование проводилось методом конечных элементов в программе Ansys.

2. Результаты и обсуждения

1. Колебания пластины, защемленной по всему контуру.

В таблице 2.1 представлены данные аналитического расчета и компьютерного моделирования десяти мод свободных колебаний, а также свободных колебаний при изменении температуры на 10°С. Погрешность расхождения результатов аналитического расчета и компьютерного моделирования составляет менее 1%.

При условии жесткого закрепления пластины по всему контуру изменение температуры на 10°С, приводит к появлению в пластине напряжения $\sigma = 34,6$ МПа, что, в свою очередь, ведет к возникновению сжимающих продольных сил N_{11}, N_{22} . Наличие сжимающих сил уменьшает частоту собственных колебаний, что хорошо видно по результатам аналитического расчета и моделирования.

На рис. 2.1 построен график зависимости изменения частоты от моды колебания. По графику можно сделать вывод, что сильнее всего меняются низшие частоты.

Дальнейшее повышение температуры приводит к исчезновению низших частот, а также к изменению форм колебаний. Результаты отображены на рис. 2.2 и 2.3.

2. Колебания пластины с защемленными противоположными краями (защемление по стороне b).

В таблице 2.2 отражены данные аналитического расчета и компьютерного моделирования двадцати первых мод свободных колебаний, а также свободных колебаний при изменении температуры на 10°С.

На рис. 2.4 точками показаны степени изменения мод при изменении температуры на 10°С. По представленным данным видно, что изменение частоты идет неравномерно и зависит от порядкового номера моды. Кроме этого, замечено, что, поскольку одни моды с ростом температуры убывают быстрее других, при достижении определенных температур порядковые номера мод меняются.

Таблица 2.1

Table 2.1

Мода	Расчетная частота, Гц	Частота модели Ansys, Гц	Расчетное изменение частоты при $\Delta T = 10^\circ\text{C}$, Гц	Изменение частоты модели Ansys при $\Delta T = 10^\circ\text{C}$, Гц	Процент изменения частоты при $\Delta T = 10^\circ\text{C}$, %
2/2	439,48	438,83	353,46	353,81	19,37
3/2	896,99	894,31	801,98	800,25	10,52
3/3	1323,33	1317,60	1223,35	1219,40	7,45
4/2	1611,54	1601,50	1512,97	1502,60	6,18
4/3	2017,62	2006,80	1915,63	1906,10	5,02
5/2	2570,73	2558,80	2469,71	2458,00	3,94
4/4	2686,90	2673,20	2582,96	2570,50	3,84
5/3	2967,51	2940,90	2864,21	2837,90	3,50
5/4	3618,41	3595,20	3513,39	3491,20	2,89
5/5	4530,89	4498,90	4424,79	4393,80	2,34

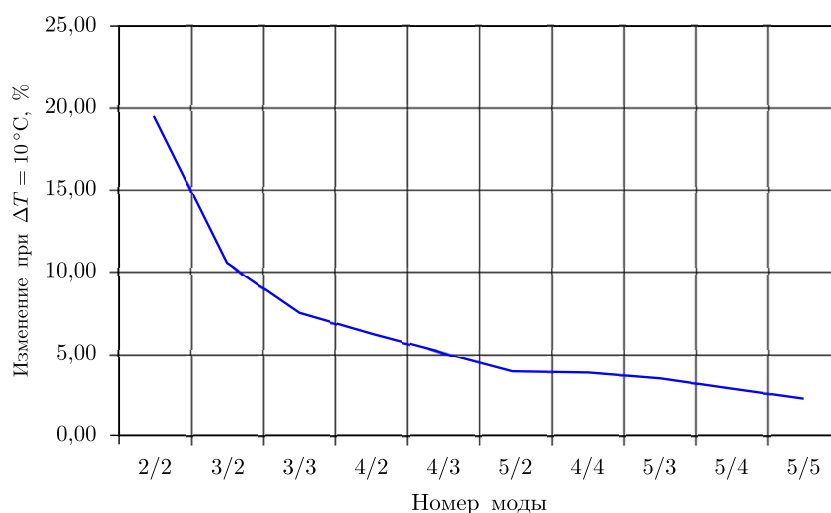


Рис. 2.1. График изменения мод при изменении температуры на 10°C
Fig. 2.1. Graph of the mode change when the temperature changes by 10°C

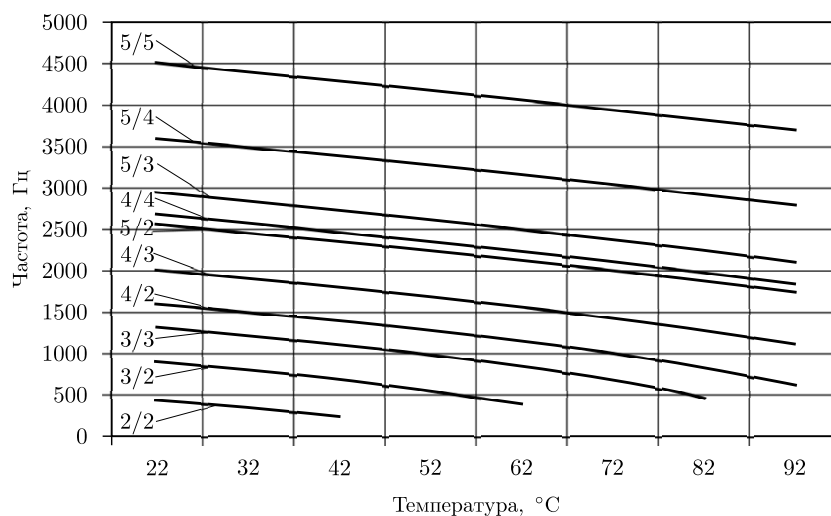


Рис. 2.2. Графики изменения частот мод колебаний с повышением температуры
Fig. 2.2. Graphs of frequency changes of oscillation modes with increasing temperature

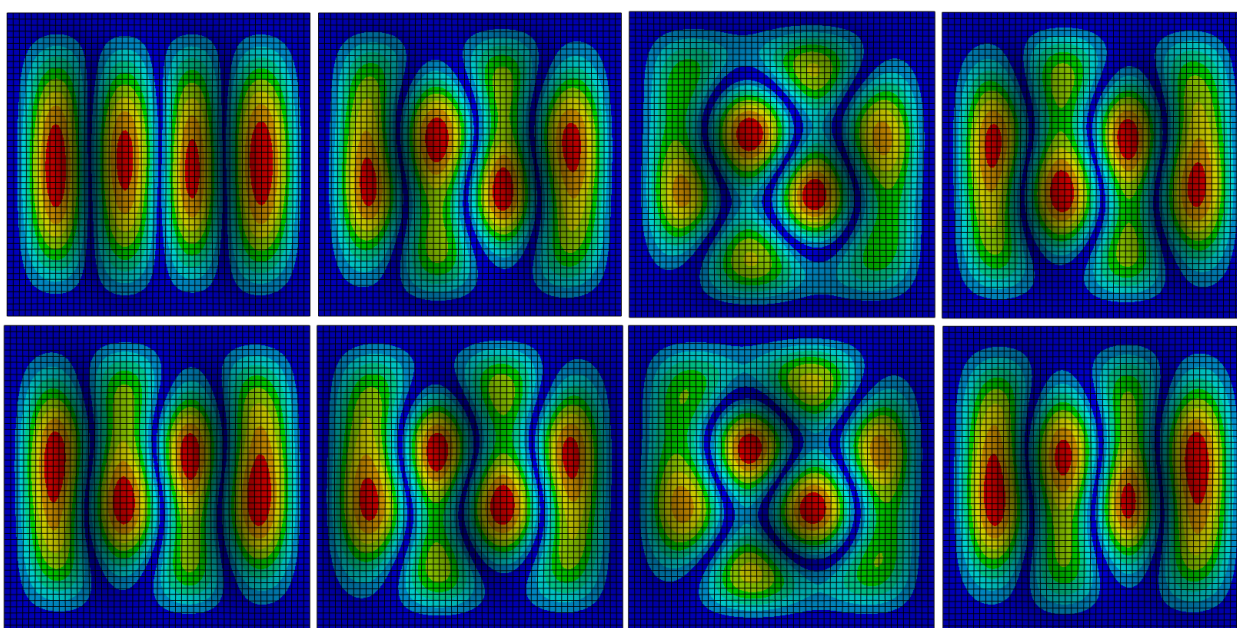


Рис. 2.3. Изменение формы колебаний моды 5/2 с повышением температуры
 Fig. 2.3. Changing the shape of the oscillation of the 5/2 mode with increasing temperature

Таблица 2.2

Table 2.2

Мода	Расчетная частота, Гц	Частота модели Ansys, Гц	Расчетное изменение частоты при $\Delta T = 10^\circ\text{C}$, Гц	Изменение частоты модели Ansys при $\Delta T = 10^\circ\text{C}$, Гц	Процент изменения частоты при $\Delta T = 10^\circ\text{C}$, %
2/0	272,26	270,32	215,11	215,65	20,22
2/1	323,65	321,42	277,31	279,77	12,96
2/2	536,69	529,29	510,09	499,69	5,59
3/0	750,27	745,35	677,46	676,15	9,28
3/1	822,93	817,45	757,14	758,49	7,21
2/3	982,30	968,00	968,02	946,96	2,17
3/2	1076,47	1063,80	1027,05	1012,70	4,80
4/0	1470,54	1461,60	1392,41	1387,90	5,04
3/3	1532,84	1508,40	1498,54	1466,80	2,76
4/1	1551,90	1540,70	1478,08	1474,50	4,30
2/4	1679,74	1659,00	1671,43	1641,80	1,04
4/2	1832,78	1812,70	1770,71	1751,00	3,40
3/4	2215,52	2181,40	2191,94	2146,50	1,60
4/3	2314,77	2279,60	2265,94	2225,60	2,37
5/0	2430,89	2415,10	2349,73	2338,60	3,17
5/1	2517,11	2496,50	2438,82	2426,20	2,82
2/5	2626,26	2597,20	2620,95	2582,20	0,58
5/2	2816,127	2784,9	2746,373	2716,70	2,45
4/4	3003,621	2959,8	2966,154	2913,10	1,58
3/5	3143,754	3095,8	3127,175	3064,70	1,00

Выдвинуто предположение о том, что данное неравномерное распределение зависимости частоты от температуры от номера моды обусловлено неравномерным распределением напряжений по осям пластины. Моды, имеющие форму колебаний преимущественно по оси напряжения (вдоль оси x), претерпевают большее изменение.

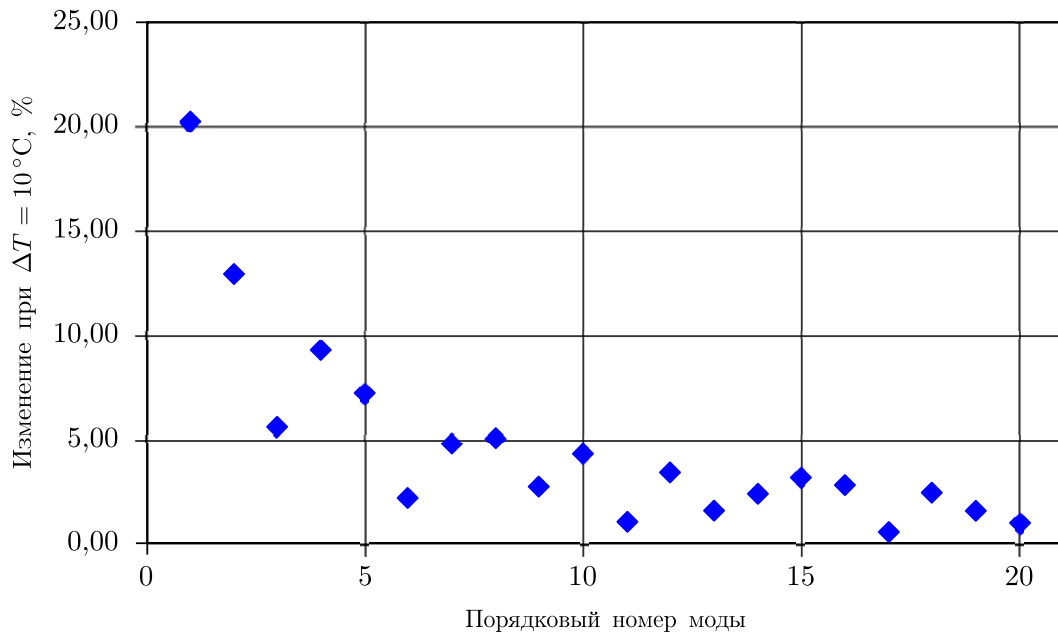


Рис. 2.4. Изменения мод при изменении температуры на 10 °С
 Fig. 2.4. Mode changes when the temperature changes by 10 °C

Для каждой моды вычислена скорость изменения в определенном диапазоне начальных и конечных значений в выделенной области температур. Далее проведен кластерный анализ методом k -средних, в результате которого было определено три кластера (рис. 2.5).

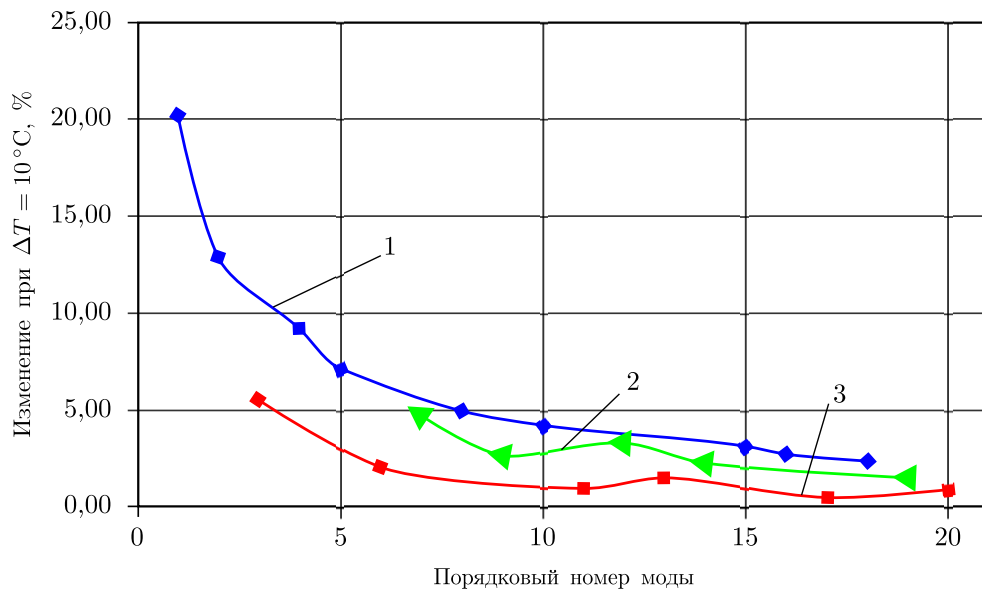


Рис. 2.5. Результаты кластерного анализа: 1—кластер 1; 2—кластер 2; 3—кластер 3
 Fig. 2.5. Results of cluster analysis: 1—cluster 1; 2—cluster 2; 3—cluster 3

Разложение форм колебаний согласно кластерному анализу (рис. 2.6) подтвердило выдвинутую гипотезу.

3. Колебания пластины, заземленной по одной стороне.

При заземлении пластины по одной стороне вследствие отсутствия ограничений теплового расширения и температурных напряжений на изменение частоты оказывает влияние только изменение упругих свойств материала. Изменение частоты при изменении температуры на 10 °С составляет менее 1 %.

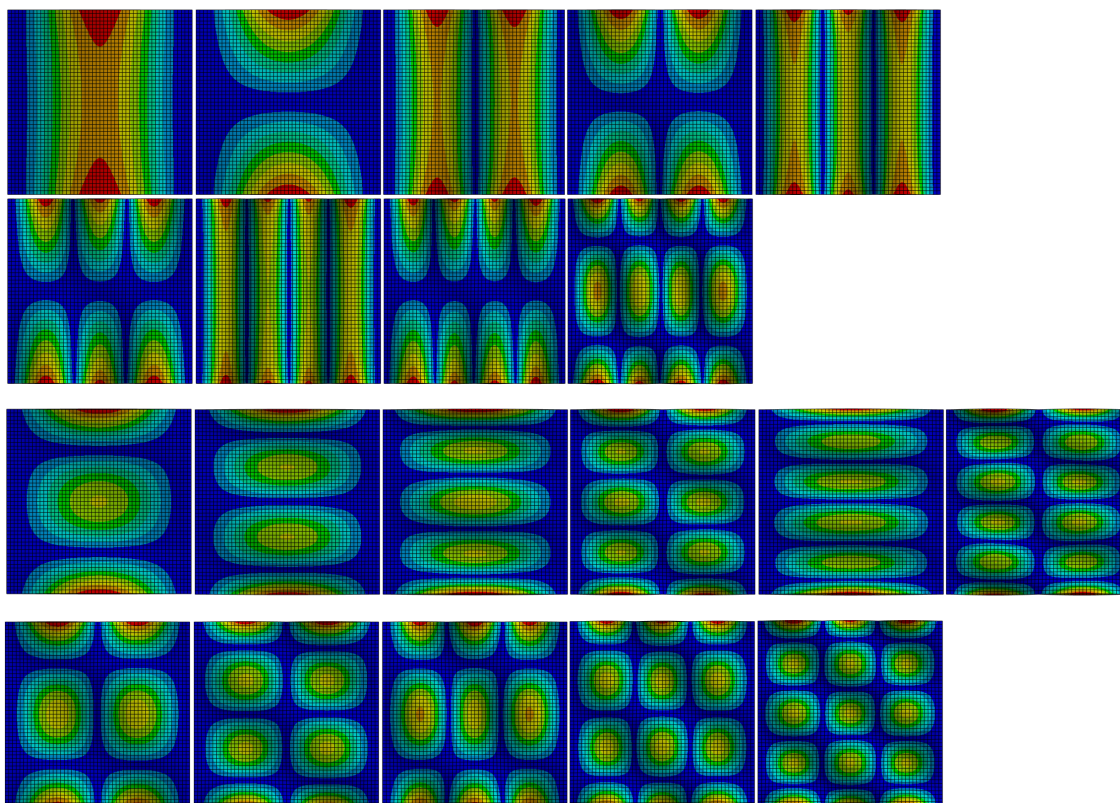


Рис. 2.6. Результаты кластерного анализа: сверху — кластер 1; в середине — кластер 2; снизу — кластер 3
Fig. 2.6. Results of cluster analysis: above is cluster 1; in the middle is cluster 2; below is cluster 3

Заклучение

В результате проведенного математического и компьютерного моделирования установлено, что изменение температуры приводит к изменению частоты собственных колебаний.

Ограничение теплового расширения объекта ведет к возникновению внутренних напряжений, что, в свою очередь, оказывает сильное влияние на частоту собственных колебаний.

Наибольшее изменение претерпевают низшие частоты, которые пропадают с ростом температуры. Помимо изменения частот собственных колебаний, также меняются и формы колебаний.

При неравномерном распределении внутренних напряжений скорость изменения частоты зависит от порядкового номера моды колебаний.

Литература

- [1] The Coupled Effect of Temperature Changes and Damage Depth on Natural Frequencies in Beam-Like Structures / Tareq Al-hababi, Nizar Faisal Alkayem, Li Cui, Shixiang Zhang, Cong Liu and Maosen Cao // Structural Durability & Health Monitoring, 2022. Vol. 16, no. 1. P. 15–35. DOI: <http://doi.org/10.32604/sdhm.2022.020418>.
- [2] Influence of Temperature on the Natural Vibration Characteristics of Simply Supported Reinforced Concrete Beam / Yanxia Cai, Kai Zhang, Zhoujing Ye, Chang Liu, Kaiji Lu and Linbing Wang // Sensors 2021, Vol. 21, issue 12. Article number 4242. DOI: <https://doi.org/10.3390/s21124242>.
- [3] Study of Temperature Influence on the Eigen Frequencies of a Flat Rectangular Plate with all Edges Simply Supported / C. Haiegan, C.O. Hamat, C. Popescu, C. Cocar // Annals of the “Constantin Brancusi” University of Targu Jiu, Engineering Series. No. 4/2023. P. 13–18. Available at: https://www.utgjiu.ro/rev_ing/pdf/2023-4/01_hatiegan.pdf.
- [4] Dynamic and Acoustic Response of a Clamped Rectangular Plate in Thermal Environments: Experiment and Numerical Simulation / Qian Geng, Huan Li, and Yueming Li // The Journal of Acoustical Society of America. May 2014. Vol. 135, issue 5. P. 2674–2682. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.4870483>.
- [5] Справочник по динамике сооружений / под ред. В.Г. Коренева, И.М. Рабиновича. Москва: Стройиздат, 1972. 511 с. URL: <https://djvu.online/file/5EhzRFNUJy727?ysclid=1w7j26i9sh919823794>.

- [6] Вайнберг Д.В., Вайнберг Е.Д. Расчет пластин. 2-е изд., перераб. и доп. Киев: Будівельник, 1970. 436 с. URL: <https://djvu.online/file/yuc9gFLxovy0I?ysclid=lw7lehebv1425824481>.
- [7] Филиппов А.П. Колебания упругих систем / А.П. Филиппов, чл.-корр. АН УССР проф.; Акад. наук Укр. ССР. Лаборатория гидравл. машин. Киев: Изд-во Акад. наук УССР, 1956. 322 с. URL: <https://dwg.ru/dnl/11240?ysclid=lw7o1n47e0211943409>.
- [8] Гонткевич В.С. Собственные колебания пластинок и оболочек: справочник / под ред. чл.-корр. АН УССР. А.П. Филиппова. Киев: Наукова думка, 1964. 288 с.
- [9] Прочность, устойчивость, колебания. Справочник: в 3 т. Т. 3 / под ред. д-ра техн. наук И.А. Биргера и чл.-корр. АН Латвийской ССР Я.Г. Пановко. Москва: Машинстроение, 1986. 567 с. URL: <https://dwg.ru/dnl/2700?ysclid=lw7oeshp4p24924136>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-2-45-53

Submitted: 09.01.2024

Revised: 27.02.2024

Accepted: 15.05.2024

A.V. Suslov

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: a.v.suslov@inbox.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-1076-1257>

E.E. Yaroslavkina

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: yaroslavkina7@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/yaroslavkina7@gmail.com>

STUDY OF THE INFLUENCE OF THERMAL STRESSES FOR NATURAL VIBRATIONS OF PLATES

ABSTRACT

Studies have been carried out of the influence of temperature stresses on the frequencies of natural oscillations rectangular plates under different fastening conditions using analytical methods and computer modeling using the finite element method. It has been established that with increasing temperature the frequency of natural oscillations decreases. The presence of temperature stresses has significant influence on the change in oscillation frequency. The lowest ones undergo the greatest change frequencies. In addition, the shape of the vibrations changes with increasing temperature.

Key words: temperature stress; deformation; fluctuations; plates; measuring equipment.

Citation. Suslov A.V., Yaroslavkina E.E. Study of the influence of temperature stresses to natural vibrations of the plates. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 2, pp. 45–53. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-2-45-53>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Suslov A.V., Yaroslavkina E.E., 2024

Anton V. Suslov – senior lecturer of the Department of Information and Measurement Technology, Samara State Technical University, 244, Molodogvardeyskaya Street, Samara, 443100, Russian Federation.

Ekaterina E. Yaroslavkina – Candidate of Technical Sciences, head of the Department of Information and Measurement Technology, Samara State Technical University, 244, Molodogvardeyskaya Street, Samara, 443100, Russian Federation.

References

- [1] Tareq Al-hababi, Nizar Faisal Alkayem, Li Cui, Shixiang Zhang, Cong Liu, Maosen Cao. The Coupled Effect of Temperature Changes and Damage Depth on Natural Frequencies in Beam-Like Structures. *Structural Durability & Health Monitoring*, 2022, vol. 16, no. 1, pp. 15–35. DOI: <http://doi.org/10.32604/sdhm.2022.020418>.

- [2] Yanxia Cai, Kai Zhang, Zhoujing Ye, Chang Liu, Kaiji Lu, Linbing Wang. Influence of Temperature on the Natural Vibration Characteristics of Simply Supported Reinforced Concrete Beam. *Sensors*, 2021, vol. 21, issue 12, Article number 4242. DOI: <https://doi.org/10.3390/s21124242>.
- [3] Haiegan C., Hamat C.O., Popescu C., Cocar C. Study of Temperature Influence on the Eigen Frequencies of a Flat Rectangular Plate with all Edges Simply Supported. *Annals of the «Constantin Brancusi» University of Targu Jiu, Engineering Series*, no. 4/2023, pp. 13–18. Available at: https://www.utgjiu.ro/rev_ing/pdf/2023-4/01_hatiegan.pdf.
- [4] Qian Geng, Huan Li, Yueming Li. Dynamic and Acoustic Response of a Clamped Rectangular Plate in Thermal Environments: Experiment and Numerical Simulation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, May 2014, vol. 135, issue 5, pp. 2674–2682. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.4870483>.
- [5] Korenev B.G., Rabinovich I.M. (Eds.) Reference book on dynamics of structures. Moscow: Stroiizdat, 1972, 511 p. Available at: <https://djvu.online/file/5EhzRFNUJy727?ysclid=lw7j26i9sh919823794>. (In Russ.)
- [6] Vainberg D.V., Vainberg E.D. Calculation of plates. 2nd edition. Kyiv: Budivel'nik, 1970, 436 p. Available at: <https://djvu.online/file/yuc9gFLxovy0I?ysclid=lw7lehebv1425824481>. (In Russ.)
- [7] Filippov A.P. Vibrations of elastic systems. Kyiv: Izd-vo Akad. nauk USSR, 1956, 322 p. Available at: <https://dwg.ru/dnl/11240?ysclid=lw7o1n47e0211943409>. (In Russ.)
- [8] Gontkevich V.S. Natural vibrations of plates and shells: handbook; Philippov A.P. (Ed.). Kyiv: Naukova dumka, 1964, 288 p. (In Russ.)
- [9] Birger I.A., Panovko Ya.G. (Eds.) Strength, stability, fluctuations. Handbook: in three vols. Vol. 3. Moscow: Mashinostroenie, 1986, 567 p. Available at: <https://dwg.ru/dnl/2700?ysclid=lw7oeshp4p24924136>. (In Russ.)