DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-2-30-44

УДК 517.95

Дата: поступления статьи: 23.01.2024
после рецензирования: 25.04.2024
принятия статьи: 15.05.2024

Л.С. Пулькина
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: louise@samdiff.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7947-6121

ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ I РОДА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

АННОТАЦИЯ
В статье рассмотрена нелокальная задача с интегральными условиями для одномерного уравнения четвертого порядка. Особенностью этой задачи являются нелокальные интегральные условия I рода, ядра которых зависят не только от пространственной переменной, но и от переменной времени. Для доказательства разрешимости задачи предложен метод, позволивший преодолеть трудности, связанные со структурой нелокальных условий, и получить априорные оценки решения, на которых базируется доказательство как единственности, так и существования решения поставленной задачи.

Ключевые слова: уравнение четвертого порядка; нелокальная задача; интегральные условия 1-го и 2-го рода.

Цитирование. Пулькина Л.С. Задача с нелокальными интегральными условиями I рода для уравнения в частных производных четвертого порядка // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 2. С. 30–44. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-2-30-44.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Людмила Степановна Пулькина — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

В настоящее время задачи с нелокальными условиями для уравнений с частными производными продолжают привлекать внимание исследователей. Интерес к этому классу задач обоснован необходимостью построения математических моделей, отвечающих потребностям современного естествознания [1; 2]. Вскоре после выхода статей [3; 4], положивших начало систематическим исследованиям нелокальных задач с интегральными условиями, появился ряд работ, в которых в том или ином качестве присутствуют нелокальные интегральные условия: либо вместо граничных [5–16], либо в качестве условий переопределения в обратных задачах [17; 18]. В большинстве из упомянутых работ изучены задачи для параболических и гиперболических уравнений второго порядка. К настоящему времени появились статьи, в которых исследуются нелокальные задачи для уравнений порядка выше второго. Отметим статью [19], в которой рассмотрена нелокальная задача для уравнения четвертого порядка и, кроме того, имеется значительный список литературы. Исследования показали, что классические методы обоснования разрешимости начально-краевых задач не могут быть применены без существенных модификаций, если вместо краевых или начальных условий (или некоторых из них) заданы нелокальные условия. Основное содержание статьи представляет собой демонстрацию предложенного нами метода, который позволил доказать существование единственного решения задачи с нелокальными интегральными условиями I рода, ядра которых зависят как от x, так и от t, для уравнения четвертого порядка. Доказательство базируется на полученных в работе априорных оценках.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x - (b(x)u_{ttx})_x + c(x,t)u = f(x,t) \tag{1.1}$$

в области $Q_T = (0,l) \times (0,T)$, предполагая, что коэффициенты уравнения и его правая часть — достаточно гладкие функции, $a(x,t) \geqslant a_0 > 0$ в $\bar{Q}_T$, $b(x) \geqslant b_0 > 0$, и поставим для него следующую задачу.

Задача 1. Найти в Q_T решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \tag{1.2}$$

$$\int_0^l K_i(x,t)u(x,t)dx = h_i(t), \;\; i = 1,2. \tag{1.3}$$

Функции $f(x,t)$, $K_i(x,t)$, $h_i(t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ заданы в соответствующих областях и достаточно гладки там. Ниже мы приведем четкие требования и условия на эти функции. Будем также предполагать выполненными условия согласования

$$\int_0^l K_i(x,0)\varphi(x)dx = h_i(0), \;\; \int_0^l K_i(x,0)\psi(x)dx + \int_0^l K_{it}(x,0)\varphi(x)dx = h_i'(0). \tag{1.4}$$

Условие (1.3) относится к нелокальным интегральным условиям первого рода. Известно [20; 21], что интегральные условия первого рода приводят к значительным трудностям при обосновании разрешимости задач, отчасти аналогичных тем, что возникают при решении интегральных уравнений первого рода.

Интегральные условия, содержащие и внеинтегральные слагаемые, в которых присутствуют следы искомого решения и его производной по нормали к границе, называют условиями второго рода. Для исследования нелокальных задач с интегральными условиями второго рода, содержащими производные по пространственной переменной, разработан эффективный метод, позволяющий обосновать разрешимость задачи в пространстве Соболева [20; 21]. При его реализации удается использовать многие стандартные приемы вывода априорных оценок, на которых в основном базируется доказательство как единственности, так и существования решения. В случае одной пространственной переменной трудность, которую доставляет интегральное условие первого рода, можно легко обойти с помощью приема [20], позволяющего перейти от условия вида (1.3) к условию, содержащему производную по направлению нормали.

Мы используем здесь модифицированную версию этого приема и преодолеем на пути его реализации и другую трудность, связанную с тем, что в нашей статье, в отличие, например, от [14], ядра интегральных условий зависят как от x, так и от t.

2. Основной результат

Будем предполагать, что выполняются следующие условия:

$$a, a_x, a_t, c \in C(\bar{Q}_T), \;\; b \in C^1[0,l], \;\; \varphi \in W_2^1(0,l), \;\; \psi \in L_2(0,l),$$
$$f \in L_2(Q_T), \;\; h_i \in C^2[0,T], \;\; K_i \in C^2(\bar{Q}_T), \;\; K_{itxx} \in C(\bar{Q}_T),$$
$$\Delta = K_1(0,t)K_2(l,t) - K_1(l,t)K_2(0,t) \neq 0.$$

Мы докажем существование единственного обобщенного решения поставленной задачи 1, определение которого будет дано ниже, в несколько этапов по следующей схеме.

1. Покажем, что условия первого рода (1.3) эквивалентны при выполнении условий согласования (1.4) интегральным условиям второго рода.

2. Введем понятие обобщенного решения задачи с нелокальным условием второго рода, которую будем называть задача 2.

3. Докажем единственность обобщенного решения задачи 2.

4. Докажем существование обобщенного решения задачи 2.

5. Сформулируем в терминах задачи 1 условия существования ее единственного обобщенного решения.

Приступим к реализации нашего плана.

Эквивалентность нелокальных условий

Лемма. Если $u(x,t)$ — решение задачи 1, выполняются условия согласования (1.4) и для всех $t \in [0,T]$

$$\Delta = K_1(0,t)K_2(l,t) - K_1(l,t)K_2(0,t) \neq 0, \ \ (K_{ix}(x,t)b(x))_x = -K_i(x,t),$$

то условия (1.3) эквивалентны интегральным условиям второго рода вида

$$a(0,t)u_x(0,t) = M_1(u) + g_1(t),$$

$$a(l,t)u_x(l,t) = M_2(u) + g_2(t).$$

Здесь $M_i(u)$ представляют собой соотношения, содержащие искомое решение $u(x,t)$, его следы на $x = 0$, $x = l$, интегралы от искомого решения, но не содержат производных по пространственной переменной, $g_i(t)$ выражаются через известные функции. Мы сознательно не выписываем сразу представления $M_i(u)$, и не только по причине их громоздкости. В процессе доказательства леммы мы продемонстрируем их вывод, укажем возможные варианты, обоснуем сделанный выбор и обсудим дальнейшее обобщение.

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ — решение задачи 1.

Дифференцируя равенство (1.3) по t дважды, получим

$$\int_0^l K_i(x,t)u_{tt}(x,t)dx + 2\int_0^l K_{it}(x,t)u_t(x,t)dx + \int_0^l K_{itt}(x,t)u(x,t)dx = h_i''(t). \tag{2.1}$$

Так как по предположению $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1.3), то

$$u_{tt} = (au_x)_x + (bu_{ttx})_x - cu + f.$$

Подставив это равенство в (2.1), мы получаем возможность проинтегрировать слагаемое, содержащее вторые производные от искомого решения, что и сделаем. В результате получим из (2.1):

$$\begin{gathered} K_1(l,t)a(l,t)u_x(l,t) - K_1(0,t)a(0,t)u_x(0,t) + K_1(l,t)b(l)u_{ttx}(l,t)- \\ -K_1(0,t)b(0)u_{ttx}(0,t) - K_{1x}(l,t)a(l,t)u(l,t) + K_{1x}(0,t)a(0,t)u(0,t)+ \\ +K_{1x}(0,t)b(0)u_{tt}(0,t) - K_{1x}(l,t)b(l)u_{tt}(l,t)+ \\ +\int_0^l [(K_{1x}a)_x - K_1c + 2K_{1tt}]u(x,t)dx+ \\ +4\int_0^l K_{1t}(x,t)u_t(x,t)dx = 2h_1''(t) - \int_0^l K_1(x,t)f(x,t)dx, \end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered} K_2(l,t)a(l,t)u_x(l,t) - K_2(0,t)a(0,t)u_x(0,t) + K_2(l,t)b(l)u_{ttx}(l,t)- \\ -K_2(0,t)b(0)u_{ttx}(0,t) - K_{2x}(l,t)a(l,t)u(l,t) + K_{2x}(0,t)a(0,t)u(0,t)+ \\ +K_{2x}(0,t)b(0)u_{tt}(0,t) - K_{2x}(l,t)b(l)u_{tt}(l,t)+ \\ +\int_0^l [(K_{2x}a)_x - K_2c + 2K_{2tt}]u(x,t)dx+ \\ +2\int_0^l K_{2t}(x,t)u_t(x,t)dx = 2h_2''(t) - \int_0^l K_2(x,t)f(x,t)dx. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Рассмотрим равенства (2.2) и (2.3) как систему уравнений относительно $a(0,t)u_x(0,t) + bu_{ttx}(0,t)$, $a(l,t)u_x(l,t) + bu_{ttx}(l,t)$ и, учитывая условие
$\Delta = K_1(0,t)K_2(l,t) - K_1(l,t)K_2(0,t) \neq 0$, решим ее. Получим

$$\begin{gathered} a(0,t)u_x(0,t) + bu_{ttx}(0,t) = \alpha_{11}(t)u(0,t) + \alpha_{12}(t)u(l,t) + \beta_{11}(t)u_{tt}(0,t)+ \\ +\beta_{12}(t)u_{tt}(l,t) + \int_0^l H_1(x,t)u(x,\tau)dx + \int_0^l P_1(x,t)u_t dx + g_1(t), \end{gathered} \tag{2.4}$$

$$a(l,t)u_x(l,t) + bu_{ttx}(l,t) = \alpha_{21}(t)u(0,t) + \alpha_{22}(t)u(l,t) + \beta_{21}(t)u_{tt}(0,t)+$$
$$+\beta_{22}(t)u_{tt}(l,t) + \int_0^l H_2(x,t)u(x,\tau)dx + \int_0^l P_2(x,t)u_t dx + g_1(t), \tag{2.5}$$

где мы обозначили

$$\alpha_{11}(t) = \frac{K_{1x}(0,t)K_2(l,t) - K_{2x}(0,t)K_1(l,t)}{\Delta}a(0,t),$$
$$\alpha_{12}(t) = \frac{K_{2x}(l,t)K_1(l,t) - K_{1x}(l,t)K_2(l,t)}{\Delta}a(l,t),$$
$$\alpha_{21}(t) = \frac{K_{1x}(0,t)K_2(0,t) - K_{2x}(0,t)K_1(0,t)}{\Delta}a(0,t),$$
$$\alpha_{22}(t) = \frac{K_{2x}(l,t)K_1(0,t) - K_{1x}(l,t)K_2(0,t)}{\Delta}a(l,t),$$
$$\beta_{11}(t) = \frac{K_{1x}(0,t)K_2(l,t) - K_{2x}(0,t)K_1(l,t)}{\Delta}b(0),$$
$$\beta_{12}(t) = \frac{K_{2x}(l,t)K_1(l,t) - K_{1x}(l,t)K_2(l,t)}{\Delta}b(l),$$
$$\beta_{21}(t) = \frac{K_{1x}(0,t)K_2(0,t) - K_{2x}(0,t)K_1(0,t)}{\Delta}b(0),$$
$$\beta_{22}(t) = \frac{K_{2x}(l,t)K_1(0,t) - K_{1x}(l,t)K_2(0,t)}{\Delta}b(l),$$
$$\tilde{K}_1 = (K_{1x}(x,t)a(x,t))_x - K_1(x,t)c(x,t) + 2K_{1tt}(x,t),$$
$$\tilde{K}_2 = (K_{2x}(x,t)a(x,t))_x - K_2(x,t)c(x,t) + 2K_{2tt}(x,t),$$
$$H_1(x,t) = \frac{\tilde{K}_1(x,t)K_2(l,t) - \tilde{K}_2(x,t)K_1(l,t)}{\Delta},$$
$$H_2(x,t) = \frac{\tilde{K}_1(x,t)K_2(0,t) - \tilde{K}_2(x,t)K_1(0,t)}{\Delta},$$
$$P_1(x,t) = 2\frac{K_{1t}(x,t)K_2(l,t) - K_{2t}(x,t)K_1(l,t)}{\Delta},$$
$$P_2(x,t) = 2\frac{K_{1t}(x,t)K_2(0,t) - K_{2t}(x,t)K_1(0,t)}{\Delta},$$
$$g_1(t) = \frac{1}{\Delta}\Big[h_1''(t)K_2(l,t) - h_2''(t)K_1(l,t)-$$
$$-\int_0^l [K_1(x,t)K_2(l,t) - K_2(x,t)K_1(l,t)]f(x,t)dx\Big],$$
$$g_2(t) = \frac{1}{\Delta}\Big[h_1''(t)K_2(0,t) - h_2''(t)K_1(0,t)-$$
$$-\int_0^l [K_1(x,t)K_2(0,t) - K_2(x,t)K_1(0,t)]f(x,t)dx\Big].$$

Пусть теперь $u(x,t)$ — решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям (1.2), (2.4), (2.5), и выполняются условия согласования (1.4). Заметим, что если выполняются (2.4), (2.5), то выполняются и (2.2), (2.3), из которых и получены (2.4), (2.5). Умножив (1.1) на $K_i(x,t)$ и проинтегрировав полученные равенства по промежутку $(0,l)$ после элементарных, но громоздких преобразований, в которых учтены (2.2), (2.3), приходим к равенствам

$$\frac{d^2}{dt^2}[\int_0^l K_i(x,t)u(x,t)dx - h_i(t)] = 0. \tag{2.6}$$

Мы получили два уравнения второго порядка относительно функций $\int_0^l K_i(x,t)u(x,t)dx - h_i(t),\ \ i = 1,2$. В силу начальных данных (1.2) и условий согласования (1.4) имеем

$$\int_0^l K_i(x,0)u(x,0)dx - h_i(0) = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\int_0^l K_i(x,t)u(x,t)dx|_{t=0} - h_i'(0) = 0,$$

откуда

$$\int_0^l K_i(x,t)u(x,t)dx - h_i(t) = 0$$

как решение однородной задачи Коши. Это означает, что выполняются условия (1.3) и лемма доказана

Утверждение доказанной леммы дает возможность вместо задачи 1 с нелокальными условиями (1.3) изучать задачу с условиями (2.4), (2.5), которые содержат производные по пространственной переменной. Именно их присутствие в нелокальном условии позволит получить оценки, с помощью которых мы и докажем однозначную разрешимость задачи. Действительно, для обоснования разрешимости задач с нелокальными условиями вида

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu} + \int\limits_{\Omega} K(x,y,t)u(y,t)dy = h(x,t), x \in \partial\Omega$$

разработан и не раз применен эффективный метод [23; 9; 21]. Однако в нашем случае все не так просто, так как в правых частях равенств (2.4), (2.5) присутствуют следы производных второго порядка по t, что существенно отличает ситуацию от той, которая имеет место в отмеченных статьях. Мы покажем, что это не препятствует обоснованию разрешимости упомянутым методом, если предпринять некоторые меры.

Во избежание громоздких выражений введем обозначения

$$B_1(u) = \alpha_{11}(t)u(0,t) + \alpha_{12}(t)u(l,t) + \beta_{11}(t)u_{tt}(0,t) + \beta_{12}(t)u_{tt}(l,t) +$$
$$+ \int_0^l H_1(x,t)u(x,\tau)dx + \int_0^l P_1(x,t)u_t dx,$$

$$B_2(u) = \alpha_{21}(t)u(0,t) + \alpha_{22}(t)u(l,t) + \beta_{21}(t)u_{tt}(0,t) + \beta_{22}(t)u_{tt}(l,t) +$$
$$+ \int_0^l H_2(x,t)u(x,\tau)dx + \int_0^l P_2(x,t)u_t dx.$$

Учитывая доказанное в лемме 1 утверждение об эквивалентности нелокальных условий, перейдем к задаче с нелокальными интегральными условиями второго рода

$$\begin{aligned} a(0,t)u_x(0,t) + bu_{ttx}(0,t) = B_1(u) + g_1(t), \\ a(l,t)u_x(l,t) + bu_{ttx}(l,t) = B_2(u) + g_2(t). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Задача 2. Найти в Q_T решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям (1.2) и (2.7).

Введем понятие решения задачи 2.

Следуя известной схеме [25] и предполагая, что $u(x,t)$ является классическим решением задачи 2, рассмотрим равенство

$$\int_0^T\int_0^l (u_{tt} - (au_x)_x - (bu_{ttx})_x + cu)v(x,t)dxdt = \int_0^T\int_0^l f(x,t)v(x,t)dxdt,$$

где $v(x,t)$ достаточно гладкая функция и $v(x,T) = 0$.

Преобразовав это равенство, интегрируя по частям, получим

$$\int_0^T\int_0^l (-u_t v_t + au_x v_x - bu_{xt}v_{xt} + cuv)dxdt +$$
$$+ \int_0^T v(0,t)[a(0,t)u_x(0,t) + b(0)u_{ttx}(0,t)]dt -$$
$$- \int_0^T v(l,t)[a(l,t)u_x(l,t) + b(l)u_{ttx}(l,t)]dt = \int_0^T\int_0^l fvdxdt.$$

Учитывая теперь условия (2.7), запишем полученное равенство так:

$$\int_0^T\int_0^l (-u_t v_t + au_x v_x - bu_{xt}v_{xt} + cuv)dxdt +$$
$$+ \int_0^T v(0,t)B_1(u)dt - \int_0^T v(l,t)B_2(u)dt =$$
$$= \int_0^T\int_0^l fvdxdt + \int_0^T v(0,t)g_1(t)dt + \int_0^T v(l,t)g_2(t).$$

Обозначим

$$W(Q_T)=\{u(x,t): u\in W_2^1(Q_T),\ \ u_{xt}\in L_2(Q_T)\};$$
$$\hat{W}(Q_T)=\{v(x,t): v\in W(Q_T),\ \ v(x,T)=0\}.$$

Нашей целью является доказательство разрешимости задачи 2 в пространстве $W(Q_T)$, поэтому полученное выше равенство пока не может служить основой определения решения в этом пространстве, так как содержит следы производных второго и третьего порядков. Чтобы преодолеть это затруднение, преобразуем слагаемые, содержащие эти производные, интегрируя по частям, в

$$\int_0^T v(0,t)B_1(u)dt,\ \ \int_0^T v(l,t)B_2(u)dt.$$

Приведем эти выкладки для первого слагаемого:

$$\int_0^T v(0,t)u_{tt}(0,t)\beta_{11}dt=-\int_0^T v_t(0,t)u_t(0,t)\beta_{11}dt-\int_0^T v(0,t)u_t(0,t)\beta_{11}'(t)dt,$$
$$\int_0^T v(0,t)u_{tt}(l,t)\beta_{12}dt=-\int_0^T v_t(0,t)u_t(l,t)\beta_{12}dt-\int_0^T v(0,t)u_t(l,t)\beta_{12}'(t)dt,$$

В результате сделанных преобразований получим

$$\int_0^T v(0,t)B_1(u)dt=$$
$$=\int_0^T v(0,t)[\alpha_{11}u(0,t)+\alpha_{12}u(l,t)-\beta_{11}'u_t(0,t)-\beta_{12}'u_t(l,t)]dt-$$
$$-\int_0^T v_t(0,t)[\beta_{11}(t)u_t(0,t)+\beta_{12}u_t(l,t)]dt+$$
$$+\int_0^T v(0,t)[\int_0^l H_1(x,t)u(x,t)dx+\int_0^l P_1(x,t)u_t(x,t)dx]dt. \tag{2.8}$$

Совершенно аналогично получим

$$\int_0^T v(l,t)B_2(u)dt=$$
$$=\int_0^T v(l,t)[\alpha_{21}u(0,t)+\alpha_{22}u(l,t)-\beta_{21}'u_t(0,t)-\beta_{22}'u_t(l,t)]dt-$$
$$-\int_0^T v_t(l,t)[\beta_{21}(t)u_t(0,t)+\beta_{22}u_t(l,t)]dt+$$
$$+\int_0^T v(l,t)[\int_0^l H_2(x,t)u(x,t)dx+\int_0^l P_2(x,t)u_t(x,t)dx]dt. \tag{2.9}$$

Определение. Решением задачи 2 будем называть функцию $u\in W(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(x,0)=0$ и тождеству

$$\int_0^T\int_0^l(-u_tv_t+au_xv_x-bu_{xt}v_{xt}+cuv)dxdt+\int_0^T v(0,t)B_1(u)dt-\int_0^T v(l,t)B_2(u)dt=$$
$$=\int_0^T\int_0^l fvdxdt-\int_0^T v(0,t)g_1(t)dt+\int_0^T v(l,t)g_2(t)dt \tag{2.10}$$

для любой $v\in\hat{W}(Q_T)$, а второй и третий интегралы в левой части (2.10) понимаются в смысле (2.8) и (2.9).

Теорема 1.

Если

$$a,a_x,a_t,c\in C(\bar{Q}_T),\ \ \alpha_{ij},\in C^1[0,T],\ \ \beta_{ij}\in C^2[0,T],\ \ i,j=1,2,$$
$$H_i,P_i,P_{ix}\in L_2(0,l)\ \ \forall t\in[0,T],\ \ g_i\in L_2(0,T),$$
$$\beta_{12}+\beta_{21}=0,\quad \beta_{11}\xi^2-2\beta_{12}\xi\eta-\beta_{22}\eta^2\geqslant 0,$$

то существует единственное обобщенное решение задачи 2.

Доказательство.

Покажем, что существует не более одного решения задачи 2. Предположим, что это не так. Тогда функция $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$, разность предполагаемых различных решений задачи 2, удовлетворяет условию $u(x,0) = 0$ и тождеству

$$\int_0^T \int_0^l (-u_t v_t + a u_x v_x - b u_{tx} v_{tx} + cuv)dxdt +$$
$$+ \int_0^T v(0,t) B_1(u)dt - \int_0^T v(l,t) B_1(u)dt = 0. \tag{2.11}$$

Выберем функцию $v(x,t)$ в (2.11) следующим образом:

$$v(x,t) = \begin{cases} \int\limits_\tau^t u(x,\eta)d\eta, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 0, & \tau \leqslant t \leqslant T. \end{cases}$$

Преобразуем (2.11) с выбранной функцией, учитывая, что $v_t(x,t) = u(x,t)$, $v(x,\tau) = 0$. Начнем с интегрирования первых двух слагаемых под знаком интеграла слева и получим

$$\frac{1}{2}\int_0^l [u^2(x,\tau) + b(x)u_x^2(x,\tau) + a(x,0)v_x^2(x,0)]dx = \int_0^\tau \int_0^l cuvdxdt -$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^\tau \int_0^l a_t v_x^2 dxdt + \int_0^\tau v(0,t)B_1(u)dt - \int_0^\tau v(l,t)u)B_2(u)dt. \tag{2.12}$$

На первый взгляд очевиден следующий шаг в доказательстве — сделать оценку правой части (2.12). Но сразу это сделать нельзя, так как соотношения $B_i(u)$ содержат следы искомого решения, что пока не позволяет получить полезную оценку в нужном пространстве. Поэтому сделаем некоторые преобразования в процессе оценки правой части равенства (2.12). Запишем их постепенно и подробно, учитывая введенные обозначения.

Рассмотрим правые части (2.8), (2.9) и проведем некоторые вычисления с учетом представления выбранной функции $v(x,t)$.

$$I_{11} = \int_0^\tau \alpha_{11}(t)v(0,t)u(0,t)dt = -\frac{1}{2}\int_0^\tau \alpha_{11}'(t)v^2(0,t)dt - \frac{1}{2}\alpha_{11}(0)v^2(0,0);$$

$$I_{12} = \int_0^\tau \alpha_{12} v(0,t)v_t(l,t)dt;$$

$$I_{13} = -\int_0^\tau \beta_{11}(t)v_t(0,t)u_t(0,t)dt = \frac{1}{2}\int_0^\tau \beta_{11}'(t)u^2(0,t)dt - \frac{1}{2}\beta_{11}(\tau)u^2(0,\tau);$$

$$I_{14} = \underline{-\int_0^\tau \beta_{12}(t)v_t(0,t)u_t(l,t)dt};$$

$$I_{15} = -\int_0^\tau v(0,t)u_t(0,t)\beta_{11}'(t)dt = \int_0^\tau u^2(0,t)\beta_{11}'(t)dt + \int_0^\tau v(0,t)u(0,t)\beta_{11}''(t)dt;$$

$$I_{16} = -\int_0^\tau v(0,t)u_t(l,t)\beta_{12}'(t)dt = \int_0^\tau u(0,t)u(l,t)\beta_{12}'(t)dt + \int_0^\tau v(0,t)u(l,t)\beta_{12}''(t)dt;$$

$$I_{17} = \int_0^\tau v(0,t)\int_0^l P_1(x,t)u_t(x,t)dxdt = -\int_0^\tau u(0,t)\int_0^l P_1(x,t)u(x,t)dxdt -$$
$$-\int_0^\tau \int_0^l P_{1t}(x,t)u(x,t)dxdt;$$

$$I_{21} = -\int_0^\tau \alpha_{21} v(l,t)(t)u(0,t)dt = \int_0^\tau \alpha_{21} v(0,t)v_t(l,t)dt + \int_0^\tau \alpha_{21}'(t)v(l,t)v(0,t)dt +$$
$$+\alpha_{21}(0)v(0,0)v(l,0);$$

$$I_{22} = -\int_0^\tau \alpha_{22}(t)v(l,t)u(l,t)dt = \frac{1}{2}\int_0^\tau \alpha_{22}' v^2(l,t)dt + \frac{1}{2}\alpha_{22}(0)v^2(l,0);$$

$$I_{23} = \int_0^\tau \beta_{21}(t)v_t(l,t)u_t(0,t)dt = -\int_0^\tau \beta_{21}'(t)v_t(l,t)v_t(0,t)dt - \underline{\int_0^\tau \beta_{21}(t)v_t(0,t)u_t(l,t)dt} +$$
$$+\beta_{21}(\tau)u(l,\tau)u(0,\tau);$$

$$I_{24} = \int_0^\tau \beta_{22}(t) v_t(l,t) u_t(l,t) dt = -\frac{1}{2}\int_0^\tau \beta'_{22} u^2(l,t)dt + \frac{1}{2}\beta_{22}(\tau)u^2(l,\tau);$$

$$I_{25} = \int_0^\tau v(l,t)u_t(0,t)\beta'_{21}(t)dt = -\int_0^\tau u(0,t)u(l,t)\beta'_{21}(t)dt - \int_0^\tau v(l,t)u(0,t)\beta''_{21}(t)dt;$$

$$I_{26} = \int_0^\tau v(l,t)u_t(l,t)\beta'_{22}(t)dt = -\int_0^\tau u^2(l,t)\beta'_{22}(t)dt - \int_0^\tau v(l,t)u(l,t)\beta''_{22}(t)dt;$$

$$I_{27} = -\int_0^\tau v(l,t)\int_0^l P_2(x,t)u_t(x,t)dxdt = \int_0^\tau v_t(l,t)\int_0^l P_2(x,t)u(x,t)dxdt+$$
$$+\int_0^\tau v(l,t)\int_0^l P_{2t}u(x,t)dxdt.$$

Результаты сделанных преобразований нужно подставить в (2.12), но мы не будем это делать в явном виде, а воспользуемся введенными обозначениями и заметим, что так как по условию $\beta_{12}+\beta_{21}=0$, то $I_{14}+I_{23}=\int_0^\tau \beta'_{21}(t)u(0,t)u(l,t)dt-\beta_{21}(\tau)u(0,\tau)u(l,\tau)$, а так как $\beta_{11}\xi^2+2\beta_{12}\xi\eta-\beta_{22}\eta^2\geqslant 0$, то из равенства (2.12) вытекает неравенство

$$\int_0^l [u^2(x,\tau)+bu_x^2(x,\tau)+a(x,0)v_x^2(x,0)]dx \leqslant 2|\int_0^\tau\int_0^l cuvdxdt| + \int_0^\tau\int_0^l |a_t|v_x^2dxdt+$$
$$+\int_0^\tau |\alpha'_{11}|(t)v^2(0,t)dt + 2|\int_0^\tau \alpha'_{12}v(0,t)v(l,t)dt| + \int_0^\tau |\alpha'_{22}|v^2(l,t)dt+$$
$$+|\alpha_{11}|(0)v^2(0,0)+2|\alpha_{21}(0)v(0,0)v(l,0)|+|\alpha_{22}|v^2(l,0)+$$
$$+\int_0^\tau |\beta'_{11}|u^2(0,t)dt + 2|\int_0^\tau \beta'_{21}u(0,t)u(l,t)dt| + \int_0^\tau |\beta'_{22}(t)u^2(l,t)dt|+$$
$$+2|\int_0^\tau v(0,t)u(0,t)\beta''_{11}(t)dt| + 2|\int_0^\tau v(0,t)u(l,t)\beta''_{12}(t)dt|+$$
$$+2|\int_0^\tau v(l,t)u(0,t)\beta''_{21}(t)dt| + 2|\int_0^\tau v(l,t)u(l,t)\beta''_{22}(t)dt|+$$
$$+2|\int_0^\tau u(0,t)\int_0^l P_1(x,t)u(x,t)dxdt| + 2|\int_0^\tau v(0,t)\int_0^l P_{1t}(x,t)u(x,t)dxdt|+$$
$$+2|\int_0^\tau u(l,t)\int_0^l P_2(x,t)u(x,t)dxdt| + 2|\int_0^\tau v(l,t)\int_0^l P_{2t}(x,t)u(x,t)dxdt|+$$
$$+2|\int_0^\tau v(0,t)\int_0^l H_1(x,t)u(x,t)dxdt| + 2|\int_0^\tau v(l,t)\int_0^l H_2(x,t)u(x,t)dxdt|+$$
$$+2|\int_0^\tau \alpha_{21}v(0,t)u(l,t)dt|. \tag{2.13}$$

Теперь уже легко вывести нужную оценку. Для этого нам понадобятся неравенства Коши, Коши — Буняковского, неравенства

$$\begin{aligned} &w^2(\xi_i,t)\leqslant 2l\int\limits_0^l w_x^2(x,t)dx + \tfrac{2}{l}\int\limits_0^l w^2(x,t)dx,\\ &w^2(\xi_i,t)\leqslant \varepsilon\int\limits_0^l w_x^2(x,t)dx + c(\varepsilon)\int\limits_0^l w^2(x,t)dx,\\ &\xi_1=0,\quad \xi_2=l,\ \ w\in W_2^1(Q_T), \end{aligned} \tag{2.14}$$

которые выводятся так же, как и в ([25] (6.24, с. 77), а также неравенство

$$v^2(x,t)\leqslant \tau\int_0^\tau u^2(x,t)dt,\quad \forall t\in[0,T], \tag{2.15}$$

которое следует из представления выбранной выше функции $v(x,t)$.

Условия теоремы гарантируют существование таких положительных чисел $a_0,a_1,c_0,b_0,b_1,\kappa,\sigma$, что

$$a(x,t)\geqslant a_0,\ \ b(x)\geqslant b_0, \max_{\bar Q_T}|a(x,t),a_t(x,t)|\leqslant a_1,\ \ \max_{\bar Q_T}|c(x,t)|\leqslant c_0,$$

$$\max_{[0,T]}|\alpha_{ij}(t),\ \ \beta_{ij}(t)\ \ \alpha'_{ij}(t),\ \ \beta'_{ij}(t),\beta''_{ij}(t)|\leqslant b_1,\quad i,j=1,2,$$

$$\max_{[0,T]}\int_0^l H_i^2(x,t)dx\leqslant\kappa,\quad \max_{\bar Q_T}\int_0^l P_i^2(x,t,\tau)d\tau\leqslant\sigma,\quad i=1,2.$$

Учитывая выписанные ограничения и применяя к слагаемым, содержащим произведения, неравенства Коши и Коши — Буняковского, получим из (2.13), принимая также во внимание условие (2.15), неравенство

$$\int_0^l [u^2(x,\tau)+a_0v_x^2(x,0)+b_0u_x^2(x,\tau)]dx \leqslant C_1\int_0^\tau\int_0^l [u^2+v^2+v_x^2]dxdt+$$
$$+C_2\int_0^\tau [u^2(0,t)+u^2(l,t)+v^2(0,t)+v^2(l,t)]dt+C_3[v^2(0,0)+v^2(l,0)], \tag{2.16}$$

где C_1, C_2, C_3 выражаются через определенные выше числа a_0, a_1, c_0, b_0, b_1, κ, σ элементарным образом, которые из-за большого количества слагаемых слишком громоздки, и мы их не приводим.

Теперь оценим слагаемые правой части последнего неравенства, содержащие следы функции $v(x,t)$ на боковых границах, применив для этого неравенства (2.14) и (2.15).

$$\int_0^\tau v^2(0,t)dt \leqslant 2l\int_0^\tau\int_0^l v_x^2(x,t)dxdt+\frac{2}{l}\int_0^\tau\int_0^l v^2(x,t)dxdt \leqslant$$
$$\leqslant 2l\int_0^\tau\int_0^l v_x^2(x,t)dxdt+\frac{2}{l}\tau^2\int_0^\tau\int_0^l u^2(x,t)dxdt;$$
$$\int_0^\tau v^2(l,t)dt \leqslant 2l\int_0^\tau\int_0^l v_x^2(x,t)dxdt+\frac{2}{l}\int_0^\tau\int_0^l v^2(x,t)dxdt \leqslant$$
$$\leqslant 2l\int_0^\tau\int_0^l v_x^2(x,t)dxdt+\frac{2}{l}\tau^2\int_0^\tau\int_0^l u^2(x,t)dxdt;$$
$$v^2(0,0)\leqslant \varepsilon\int_0^l v_x^2(x,0)dx+c(\varepsilon)\int_0^l v^2(x,0)dx\leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\int_0^l v_x^2(x,0)dx+c(\varepsilon)\tau\int_0^\tau\int_0^l u^2(x,t)dx;$$
$$v^2(l,0)\leqslant \varepsilon\int_0^l v_x^2(x,0)dx+c(\varepsilon)\int_0^l v^2(x,0)dx\leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\int_0^l v_x^2(x,0)dx+c(\varepsilon)\tau\int_0^\tau\int_0^l u^2(x,t)dx$$
$$\int_0^\tau u^2(0,t)dt \leqslant 2l\int_0^\tau\int_0^l u_x^2(x,t)dxdt+\frac{2}{l}\int_0^\tau\int_0^l u^2(x,t)dxdt,$$
$$\int_0^\tau u^2(l,t)dt \leqslant 2l\int_0^\tau\int_0^l u_x^2(x,t)dxdt+\frac{2}{l}\int_0^\tau\int_0^l u^2(x,t)dxdt.$$

С учетом полученных неравенств из (2.16) следует

$$\int_0^l [u^2(x,\tau)+a_0v_x^2(x,0)+b_0u_x^2(x,\tau)]dx \leqslant$$
$$\leqslant C\int_0^\tau\int_0^l [u^2+u_x^2+v_x^2]dxdt+2C_3\varepsilon\int_0^l v_x^2(x,0)dx, \tag{2.17}$$

где C выражается через C_1, C_2, C_3, l, τ. Выберем ε так, чтобы $a_0-2C_3\varepsilon>0$, положив для определенности $\varepsilon=\frac{a_0}{4C_3}$, и перенесем последний интеграл в (2.15) в левую часть неравенства. Тогда

$$\int_0^l [u^2(x,\tau)+\frac{a_0}{2}v_x^2(x,0)+b_0u_x^2(x,\tau)]dx \leqslant C\int_0^\tau\int_0^l [u^2+v_x^2+u_x^2]dxdt.$$

Последнее препятствие на пути к нужной оценке в виде $v_x^2(x,0)$ преодолеем, введя функцию $w(x,t)= =\int_0^t u_x(x,\eta)d\eta$. Из представления функции $v(x,t)$ следует

$$v_x(x,t)=\int_\tau^t u_x(x,\eta)d\eta = w(x,t)-w(x,\tau),\ \ v_x(x,0)=w(x,\tau).$$

Тогда, применив неравенство Коши для оценки $(w(x,t)-w(x,\tau))^2$, получим

$$\int_0^l [u^2(x,\tau)+\frac{a_0}{2}w^2(x,\tau)+b_0u_x^2(x,\tau)]dx \leqslant$$

$$\leqslant 2C\int_0^\tau\int_0^l [u^2+u_x^2+w^2]dxdt + 2C\tau\int_0^l w^2(x,\tau)dx.$$

Пользуясь произволом, выберем τ так, чтобы $\nu = \frac{a_0}{2} - 2C\tau > 0$, перенесем последнее слагаемое правой части неравенства в левую его часть и получим неравенство

$$m_0\int_0^l [u^2(x,\tau)+w^2(x,\tau)+u_x^2(x,\tau)]dx \leqslant 2C\int_0^\tau\int_0^l [u^2+w^2+u_x^2]dxdt,$$

где $m_0 = \min\{1,\nu,b_0\}$, справедливое для всех $\tau \in [0,\frac{a_0}{4C}]$, из которого в силу леммы Гроноулла [24] следует

$$m_0\int_0^l [u^2(x,\tau)+w^2(x,\tau)+u_x^2(x,\tau)]dx \leqslant 0,$$

откуда $u(x,t)=0$ в $[0,\frac{a_0}{4C}]$. Следуя процедуре, описанной в [25] (с. 212), покажем, что $u(x,t)=0$ и в $[\frac{a_0}{4C},\frac{a_0}{2C}]$, и, продолжая этот процесс, на всем промежутке $[0,T]$.

Это и означает, что предположение о существовании двух различных решений задачи 2 неверно, и, стало быть, единственность решения доказана.

Приступим к доказательству **существования** решения, для чего воспользуемся методом Галеркина.

Пусть $\{w_k(x)\}$ — произвольная система функций из $C^2[0,l]$, линейно независимая и полная в $W_2^1(0,l)$.

Будем искать приближенные решения задачи 2 в виде

$$u^m(x,t) = \sum_{k=1}^m c_{mk}(t)w_k(x) \tag{2.18}$$

из соотношений

$$\int_0^l (u_{tt}^m w_i + au_x^m w_i' + bu_{ttx}^m w_i' + cu^m w_i)dx + w_i(0)B_1(u^m) - w_i(l)B_2(u) =$$
$$= \int_0^l fw_i dx - w_i(0)F_1(t) + w_i(l)F_2(t), \quad c_{mk}(0) = c_{mk}'(0) = 0, \tag{2.19}$$

где

$$B_1(u) = \alpha_{11}(t)u(0,t) + \alpha_{12}(t)u(l,t) + \beta_{11}(t)u_{tt}(0,t) + \beta_{12}(t)u_{tt}(l,t) +$$
$$+\int_0^l H_1(x,t)u(x,\tau)dx + \int_0^l P_1(x,t)u_t dx,$$

$$B_2(u) = \alpha_{21}(t)u(0,t) + \alpha_{22}(t)u(l,t) + \beta_{21}(t)u_{tt}(0,t) + \beta_{22}(t)u_{tt}(l,t) +$$
$$+\int_0^l H_2(x,t)u(x,\tau)dx + \int_0^l P_2(x,t)u_t dx.$$

Подставив (2.18) в (2.19), убеждаемся в том, что (2.19) представляет собой систему дифференциальных уравнений относительно $c_{mk}(t)$. Действительно, подстановка (2.18) в (2.19) дает

$$\int_0^l (u_{tt}^m w_i + au_x^m w_i' + bu_{ttx}^m w_i' + cu^m w_i)dx = \sum_{k=1}^m c_{mk}''(t)\Big(\int_0^l w_k w_i dx +$$
$$+\beta_{11}w_i(0)w_k(0) + \beta_{12}w_i(0)w_k(l) - \beta_{21}w_i(l)w_k(0) - \beta_{22}w_i(l)w_k(l)\Big) +$$
$$+\sum_{k=1}^m c_k'(t)\Big(w_i(0)\int_0^l P_1(x,t)w_k(x)dx - w_i(l)\int_0^l P_2(x,t)w_k(x)dx\Big) +$$
$$+\sum_{k=1}^m c_k(t)\Big(\int_0^l [aw_i'w_k' + cw_iw_k]dx + \alpha_{11}w_i(0)w_k(0) + \alpha_{12}w_i(0)w_k(l) -$$
$$-\alpha_{21}w_i(l)w_k(0) - \alpha_{22}w_i(l)w_k(l) +$$
$$+w_i(0)\int_0^l (H_1+P_1)w_k(x)dx - w_i(l)\int_0^l (H_2+P_2)w_k(x)dx\Big) =$$
$$= \int_0^l fw_i dx - w_i(0)F_1(t) + w_i(l)F_2(t).$$

Введя очевидное обозначение, получим

$$\sum_{k=1}^m A_{ik}c_k''(t) + D_{ik}c_k'(t) + d_{ik}c_k(t) = G_i(t), \qquad c_k(0) = c_k'(0) = 0.$$

Эта задача Коши однозначно разрешима, Действительно, матрица коэффициентов при старших производных невырожденная в силу линейной независимости функций $w_i(x)$ и условий $\beta_{12}+\beta_{21}=0$ и $\beta_{11}\xi^2+2\beta_{12}\xi\eta-\beta_{22}\eta^2\geqslant 0$. Условия теоремы гарантируют ограниченность коэффициентов и правой части уравнений.

Таким образом, последовательность приближенных решений задачи 2 построена.

На следующем этапе доказательства существования решения выведем априорную оценку. Для этого умножим каждое из соотношений (2.19) на свою $c'_{mi}(t)$, просуммируем по i от 1 до m, а затем проинтегрируем по $t\in(0,\tau)$. Получим

$$\int_0^\tau\int_0^l(u^m_{tt}u^m_t+au^m_xu^m_{xt}+bu^m_{xtt}u^m_{xt+}cu^mu^m_t)dxdt+$$

$$+\int_0^\tau u^m_t(0,t)[\alpha_{11}(t)u(0,t)+\alpha_{12}(t)u(l,t)+\beta_{11}(t)u_{tt}(0,t)+\beta_{12}u_{tt}(l,t)]dt-$$

$$-\int_0^\tau u^m_t(l,t)[\alpha_{21}(t)u(0,t)+\alpha_{22}(t)u(l,t)+\beta_{21}(t)u_{tt}(0,t)+\beta_{22}u_{tt}(l,t)]dt+$$

$$+\int_0^\tau u^m_t(0,t)\Big(\int_0^l H_1(x,t)u^m(x,t)dx+\int_0^l P_1(x,t)u^m_t(x,t)dx\Big)dt-$$

$$-\int_0^\tau u^m_t(l,t)\Big(\int_0^l H_2(x,t)u^m(x,t)dx+\int_0^l P_2(x,t)u^m_t(x,t)dx\Big)dt=$$

$$=\int_0^\tau\int_0^l fu^m_tdxdt-\int_0^\tau F_1(t)u^m_t(0,t)dt+\int_0^\tau F_2(t)u^m_t(l,t)dt.$$

Для вывода оценки применим в основном ту же технику, что и при доказательстве единственности решения, обратив внимание лишь на некоторые детали.

Первое слагаемое преобразуется стандартным образом с помощью интегрирования по частям

$$\int_0^\tau\int_0^l(u^m_{tt}u^m_t+au^m_xu^m_{xt}+bu^m_{xtt}u^m_{xt}+cu^mu^m_t)dxdt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^l[(u^m_t(x,\tau))^2+a(u^m_x(x,\tau))^2+b(u^m_{xt}(x,\tau))^2]dx+$$

$$+\int_0^\tau\int_0^l cu^mu^m_tdxdt-\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l a_t(u^m_x)^2dxdt.$$

Рассмотрим следующие слагаемые и заметим, что в некоторых из них под знаком интеграла содержатся следы производных второго порядка искомого решения по t, что не позволит обойтись неравенством Коши для вывода оценки в пространстве $W^1_2(Q_T)$. Поэтому сделаем небольшые преобразования, интегрируя по частям и учитывая, что $u^m(x,0)=0$. После выполнения этих элементарных преобразований и учтя условие $\beta_{12}+\beta_{21}=0$, получим

$$\int_0^l[(u^m_t(x,\tau))^2+a(u^m_x(x,\tau))^2+b(u^m_{xt}(x,\tau))^2]dx=$$

$$=-2\int_0^\tau\int_0^l cu^mu^m_tdxdt+\int_0^\tau\int_0^l a_t(u^m_x)^2dxdt+$$

$$+[\alpha_{11}(\tau)(u^m(0,\tau))^2-2\alpha_{21}(\tau)u^m(0,\tau)u^m(l,\tau)-\alpha_{22}(u^m(l,\tau)^2)]-$$

$$-[\beta_{11}(\tau)(u^m_t(0,\tau))^2-2\beta_{21}(\tau)u^m_t(0,\tau)u^m_t(l,\tau)-\beta_{22}(u^m_t(l,\tau)^2)]+$$

$$+\int_0^\tau[\alpha'_{11}(u^m(0,t))^2-2\alpha'_{21}u^m(0,t)u^m(l,t)dt-\alpha'_{22}(u^m(l,t))^2]dt+$$

$$+\int_0^\tau[\beta'_{11}(u^m_t(0,t))^2-2\beta'_{21}u^m_t(0,t)u^m_t(l,t)dt-\beta'_{22}(u^m_t(l,t))^2]dt-$$

$$-2\int_0^\tau(\alpha_{12}(t)-\alpha_{21}(t))u^m_t(0,t)u^m(l,t)dt+$$

$$+2\int_0^\tau u^m_t(0,t)\Big(\int_0^l H_1(x,t)u^m(x,t)dx+\int_0^l P_1(x,t)u^m_t(x,t)dx\Big)dt-$$

$$-2\int_0^\tau u^m_t(l,t)\Big(\int_0^l H_2(x,t)u^m(x,t)dx+\int_0^l P_2(x,t)u^m_t(x,t)dx\Big)dt+$$

$$+\int_0^\tau\int_0^l fu_t^m dxdt - \int_0^\tau F_1(t)u_t^m(0,t)dt + \int_0^\tau F_2(t)u_t^m(l,t)dt. \quad (2.20)$$

Теперь выведем оценку, применяя ту же технику, что и при доказательстве единственности решения: используем неравенства Коши, Коши — Буняковского и неравенства (2.14), (2.15). Получим из (2.20) неравенство

$$\int_0^l [(u_t^m(x,\tau))^2 + (u_x^m(x,\tau))^2 + (u_{xt}^m(x,\tau)]^2 dx \leqslant$$
$$\leqslant C_4 \int_0^\tau \int_0^l [(u^m)^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m)^2 + (u_{xt}^m)^2] dxdt +$$
$$+C_5(||f||^2_{L_2(Q_T)} + ||F_1||^2_{L_2(0,T)} + ||F_2||^2_{L_2(0,T)}),$$

Прибавив к обеим частям неравенство $(u^m(x,\tau))^2 \leqslant \tau\int_0^\tau (u_t^m(x,t))^2 dt$, которое вытекает из представления $u^m(x,\tau) = \int_0^\tau u_t^m(x,t)dt$, где мы учли, что $u^m(x,0) = 0$, получим

$$\int_0^l [(u^m(x,\tau))^2 + (u_t^m(x,\tau))^2 + (u_x^m(x,\tau))^2 + (u_{xt}^m(x,\tau))^2] dx \leqslant$$
$$\leqslant C_6 \int_0^\tau \int_0^l [(u^m)^2 + (u_t^m)^2 + (u_x^m)^2 + (u_{xt}^m)^2] dxdt +$$
$$+C_5(||f||^2_{L_2(Q_T)} + ||F_1||^2_{L_2(0,T)} + ||F_2||^2_{L_2(0,T)}),$$

применив к которому лемму Гронуолла, а затем проинтегрировав по $\tau \in [0,T]$, получим нужную оценку

$$||u^m||_{W(Q_T)} \leqslant S, \quad (2.21)$$

где S не зависит от m. Существование этой мажорирующей постоянной обеспечено условиями теоремы.

Благодаря (2.21) из построенной последовательности $u^m(x,t)$ можно выбрать подпоследовательность, слабо сходящуюся в $W_2^1(Q_T)$ и равномерно по $t \in [0,T]$ в $L_2(0,l)$. За выделенной подпоследовательностью сохраним прежнее обозначение. Указанные сходимости обеспечивают выполнение начального условия $u(x,0) = 0$ и справедливость тождества (2.10), что доказывается так же, как и в [25] (с. 215).

Теорема 1 полностью доказана.

Вернемся к задаче 1 и, опираясь на лемму, под ее решением будем понимать обобщенное решение задачи 2. Поэтому нам осталось только сформулировать условия разрешимости в терминах задачи 1.

Теорема 2. Пусть выполнены условия

$$a, a_t, c \in C(\bar{Q}_T), \ \ b \in C^1[0,T], \ \ b(0) = b(l), \quad f \in L_2(Q_T),$$
$$K_i \in C^2(\bar{Q}_T), \ \ i = 1,2, \ \ \Delta = K_1(0,t)K_2(l,t) - K_2(0,t)K_1(l,t) \neq 0,$$
$$K_{2x}(l,t)K_1(l,t) - K_{1x}(l,t)K_2(l,t) + K_{1x}(0,t)K_2(0,t) - K_{2x}(0,t)K_1(0,t) = 0,$$
$$[K_{1x}(0,t)K_2(l,t) - K_{2x}(0,t)K_1(l,t)]\xi^2 - 2[K_{1x}(0,t)K_2(0,t) - K_{2x}(0,t)K_1(0,t)]\xi\eta$$
$$-[K_{2x}(l,t)K_1(0,t) - K_{1x}(l,t)K_2(0,t)]\eta^2 \geqslant 0.$$

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи 1.

Выводы

В статье предложен и реализован метод доказательства существования единственного обобщенного решения задачи с нелокальными условиями первого рода для уравнения четвертого порядка. Получены условия на входные данные, обеспечивающие однозначную разрешимость поставленной задачи, представленные в теореме 2.

Литература

[1] Самарский А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16, № 11. С. 1925–1935. URL: https://www.mathnet.ru/rus/de4116.

[2] Bažant Zdeněk P., Jirásek Milan. Nonlocal Integral Formulation of Plasticity And Damage: Survey of Progress // Journal of Engineering Mechanics. 2002. Vol. 128, issue 11. P. 1119–1149. DOI: https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:11(1119).

[3] Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quarterly of Applied Mathematics. 1963. № 21. P. 155–160. DOI: https://doi.org/10.1090/qam/160437.

[4] Камынин Л.И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1964. Т. 4, № 6. С. 1006–1024. URL: https://www.mathnet.ru/rus/zvmmf7694.

[5] Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304. URL: https://www.mathnet.ru/rus/de2993.

[6] Gordeziani D.G., Avalishvili G.A. Solutions of Nonlocal Problems for One-dimensional Oscillations of the Medium // Mat. Modelir. 2000. Vol. 12, № 1. P. 94–103. URL: https://www.mathnet.ru/rus/mm832.

[7] Korzyuk V.I., Kozlovskaya I.S., Naumavets S.N. Classical Solution of a Problem with Integral Conditions of the Second Kind for the One-Dimensional Wave Equation // Differential Equations. 2019. Vol. 55, issue 3. P. 353–362. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266119030091.

[8] Moiseev E.I., Korzyuk V.I., Kozlovskaya I.S. Classical Solution of a Problem with an Integral Congition for the One-Dimensional Wave Equation // Partial Differential Equations. 2014. Vol. 50. P. 1364–1377. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266114100103.

[9] Pulkina L.S. Initial-boundary value problem with a nonlocal boundary condition for a multidimensional hyperbolic equation // Differential equations. 2008. Vol. 44. P. 1119–1125. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266108080090.

[10] Скубачевский А.Л., Стеблов Г.М. О спектре дифференциальных операторов с областью определения, не плотной в $L_2(0,1)$. // Доклады Академии наук. 1991. Т. 321, № 6. С. 1158–1163. URL: https://www.mathnet.ru/rus/dan5707.

[11] Ashyralyev A., Aggez N. On the Solution of Multipoint NBVP for Hyperbolic Equation with Integral Condition // Malaysian Journal of Mathematical Sciences. 2012. Vol. 6, № Suppl. P. 111–121. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=20986386. EDN: https://elibrary.ru/rrgjmx.

[12] Кожанов А.И. О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для линейных гиперболических уравнений второго порядка // Математические заметки. 2011. Т. 90, № 2. С. 254–268. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm8626.

[13] Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D. On Integral Nonlocal Boundary Value Problems for some Partial Differential Equations // Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences. 2011. Vol. 5, № 1. P. 31–37. URL: http://science.org.ge/old/moambe/5-1/31-37%20Avalishvili.pdf.

[14] Beilin S.A. On a mixed nonlocal problem for a wave equation // EJDE. 2006. Vol. 2006, № 103. P. 1–10. URL: https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2006/103/beilin.pdf

[15] Bouziani A. On the solvability of parabolic and hyperbolic problems with a boundary integral condition // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2002. Vol. 31, issue 4. P. 201–213. DOI: https://doi.org/10.1155/S0161171202005860.

[16] Иванчов Н.И. Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 4. С. 547–564. URL: https://www.mathnet.ru/rus/de11062.

[17] Cannon J.R., Lin Y. Determination of a parameter $p(t)$ in some quasi-linear parabolic differential equations // Inverse Problems. 1988. Vol. 4, no. 1. P. 35–45. DOI: http://doi.org/10.1088/0266-5611/4/1/006.

[18] Камынин В.Л. Обратная задача определения младшего коэффициента в параболическом уравнении при условии интегрального наблюдения // Математические заметки. 2013. Т. 94, № 2. С. 207–217. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434613070201.

[19] Богатов А.В., Гилев А.В., Пулькина Л.С. Задача с нелокальным условием для уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками // Вестник российских университетов. Математика. 2022. Т. 27, № 139. С. 214–230. DOI: https://doi.org/10.20310/2686-9667-2022-27-139-214-230. EDN: https://elibrary.ru/ahjfou.

[20] Пулькина Л.С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями 1-го и 2-го рода // Известия вузов. Математика. 2012. № 4. С. 74–83. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=17309554. EDN: https://elibrary.ru/ooukmt.

[21] Pulkina L.S. Nonlocal problems for hyperbolic equations from the viewpoint of strongly regular boundary conditions // EJDE. 2020. Vol. 2020, no. 01-132. P. 1–20. DOI: https://doi.org/10.58997/ejde.2020.28.

[22] Pulkina L.S. Nonlocal Problems for Hyperbolic Equations // Parasidis, I.N., Providas, E., Rassias, T.M. (eds.) Mathematical Analysis in Interdisciplinary Research. Springer Optimization and Its Applications. 2021. Vol 179. Springer, Cham. P. 619–640. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-84721-0_28.

[23] Дмитриев В.Б. Нелокальная задача с интегральными условиями для волнового уравнения // Вестник Самарского государственного университета. 2006. № 2 (42). С. 15–27. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/nelokalnaya-zadacha-s-integralnymi-usloviyami-dlya-volnovogo-uravneniya/viewer.

[24] Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. Москва: Изд-во иностранной литературы. 1961. 120 с. URL: https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Gording1961ru.pdf.

[25] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. Москва: Наука, 1973. 409 с. URL: https://djvu.online/file/Rh97R3cVXNcZE.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-2-30–44

Submited: 23.01.2024
Revised: 25.04.2024
Accepted: 15.05.2024

L.S. Pulkina
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: louise@samdiff.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7947-6121

A PROBLEM WITH NONLOCAL INTEGRAL 1ST KIND CONDITIONS FOR 4TH ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

ABSTRACT

In this article, we consider a nonlocal problem with integral conditions for one-dimensional 4th order partial differential equation. A distinguishing feature of this problem is the presence of integral conditions of the 1st kind. Moreover, the kernels of these conditions depend on both spatial and time variables. We suggest a new approach which enables to overcome the difficulties arising from the form of nonlocal conditions and derive a priori estimates. Obtained estimates play a significant role when we prove the existence and uniqueness of the solution to the problem.

Key words: 4th-order partial differential equation; nonlocal problem; integral conditions of 1st and 2nd kind; generalized solution; Sobolev space; a priori estimates.

Citation. Pulkina L.S. A problem with nonlocal integral 1st kind conditions for 4th order partial differential equation. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 2, pp. 30–44. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-2-30-44. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: author and reviewers declare no conflict of interests.

Ludmila S. Pulkina — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, professor of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

[1] Samarskii A.A. Some problems of the theory of differential equations. *Differentsial'nye Uravneniya*, 1980, vol. 16, no. 11, pp. 1925–1935. Available at: https://www.mathnet.ru/rus/de4116. (In Russ.)

[2] Bažant Zdeněk P., Jirásek Milan. Nonlocal Integral Formulation of Plasticity And Damage: Survey of Progress. *Journal of Engineering Mechanics*, 2002, vol. 128, issue 11, pp. 1119–1149. DOI: https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:11(1119).

[3] Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1963, no. 21, pp. 155–160. DOI: https://doi.org/10.1090/qam/160437.

[4] Kamynin L.I. A boundary value problem in the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1964, vol. 4, issue 6, pp. 33–59. DOI: https://doi.org/10.1016/0041-5553(64)90080-1. (In English; original in Russian)

[5] Ionkin N.I. The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition. *Differentsial'nye Uravneniya*, 1977, vol. 13, no. 2, pp. 294–304. Available at: https://www.mathnet.ru/rus/de2993. (In Russ.)

[6] Gordeziani D.G., Avalishvili G.A. Solutions of Nonlocal Problems for One-dimensional Oscillations of the Medium. *Matematicheskoe Modelirovanie*, 2000, vol. 12, no. 1, pp. 94–103. Available at: https://www.mathnet.ru/rus/mm832. (In Russ.)

[7] Korzyuk V.I., Kozlovskaya I.S., Naumavets S.N. Classical Solution of a Problem with Integral Conditions of the Second Kind for the One-Dimensional Wave Equation. *Differential Equations*, 2019, vol. 55, issue 3, pp. 353–362. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266119030091.

[8] Moiseev E.I., Korzyuk V.I., Kozlovskaya I.S. Classical Solution of a Problem with an Integral Congition for the One-Dimensional Wave Equation. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, issue 10, pp. 1364–1377. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266114100103.

[9] Pulkina L.S. Initial-boundary value problem with a nonlocal boundary condition for a multidimensional hyperbolic equation. *Differential equations*, 2008, vol. 44, pp. 1119–1125. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266108080090.

[10] Skubachevskii A.L., Steblov G.M. On the spectrum of differential operators with domain that is not dense in $L_2(0,1)$. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1991, vol. 321, number 6, pp. 1158—1163. Available at: https://www.mathnet.ru/rus/dan5707. (In Russ.)

[11] Ashyralyev A., Aggez N. On the Solution of Multipoint NBVP for Hyperbolic Equation with Integral Condition. *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*, 2012, vol. 6, no. Suppl., pp. 111–121. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=20986386. EDN: https://elibrary.ru/rrgjmx.

[12] Kozhanov A.I. On the solvability of certain spatially nonlocal boundary-value problems for linear hyperbolic equations of second order. *Mathematical Notes*, 2011, vol. 90, Article number 238. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434611070236. (In English; original in Russian)

[13] Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D. On Integral Nonlocal Boundary Value Problems for some Partial Differential Equations. *Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences*, 2011, vol. 5, no. 1, pp. 31–37. Available at: http://science.org.ge/old/moambe/5-1/31-37%20Avalishvili.pdf.

[14] Beilin S.A. On a mixed nonlocal problem for a wave equation. *EJDE*, 2006, vol. 2006, no. 103, pp. 1–10. Available at: https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2006/103/beilin.pdf.

[15] Bouziani A. On the solvability of parabolic and hyperbolic problems with a boundary integral condition. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2002, vol. 31, issue 4, pp. 201–213. DOI: https://doi.org/10.1155/S0161171202005860.

[16] Ivanchov N.I. Boundary Value Problems for a Parabolic Equation with Integral Conditions. *Differential Equations*, 2004, vol. 40, pp. 591–609. DOI: https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000035796.56467.44. (In English; original in Russian).

[17] Cannon J.R., Lin Y. Determination of a parameter $p(t)$ in some quasi-linear parabolic differential equations. *Inverse Problems*, 1988, vol. 4, number 1, pp. 35–45. DOI: http://doi.org/10.1088/0266-5611/4/1/006.

[18] Kamynin V.L. The inverse problem of determining the lower-order coefficient in parabolic equations with integral observation. *Mathematical Notes*, vol. 94, pp. 205—213. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434613070201. (In English; original in Russian)

[19] Bogatov A.V., Gilev A.V., Pulkina L.S. A problem with a non-local condition for a fourth-order equation with multiple characteristics. *Russian Universities Reports. Mathematics*, 2022, vol. 27, no. 139, pp. 214–230. DOI: https://doi.org/10.20310/2686-9667-2022-27-139-214-230. EDN: https://elibrary.ru/ahjfou. (In Russ.)

[20] Pul'kina L.S. Boundary-value problems for a hyperbolic equation with nonlocal conditions of the I and II kind. *Russian Mathematics*, 2012, vol. 56, no. 4, pp. 62–69. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X12040081. EDN: https://elibrary.ru/pdszmv. (In English; original in Russian)

[21] Pulkina L.S. Nonlocal problems for hyperbolic equation from the viewpoint of strongly regular boundary conditions. *EJDE*, 2020, vol. 2020, no. 01-132, pp. 1–20. DOI: https://doi.org/10.58997/ejde.2020.28.

[22] Pulkina L.S. Nonlocal Problems for Hyperbolic Equations. In: *Parasidis, I.N., Providas, E., Rassias, T.M. (eds.) Mathematical Analysis in Interdisciplinary Research. Springer Optimization and Its Applications, vol 179*. Springer, Cham, 2021, pp. 619–640. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-84721-0_28.

[23] Dmitriev V.B. A non-local problem with integral conditions for a wave equation. *Vestnik Samarskogo Universiteta*, 2006, no. 2 (42), pp. 15–27. Available at: https://cyberleninka.ru/article/n/nelokalnaya-zadacha-s-integralnymi-usloviyami-dlya-volnovogo-uravneniya/viewer. (In Russ.)

[24] G̊ording L. Cauchy's Problem for Hyperbolic Equations. Moscow: Izd-vo inostrannoi literatury, 1961, 120 p. Available at: https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Gording1961ru.pdf. (In Russ.)

[25] Ladyzhenskaya O.A. Boundary-value problems of mathematical physics. Moscow: Nauka, 1973, 409 p. Available at: https://djvu.online/file/Rh97R3cVXNcZE. (In Russ.)