МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-2-7-11

УДК 517.98

Дата: поступления статьи: 15.02.2024
после рецензирования: 17.03.2024
принятия статьи: 15.05.2024

С.А. Бадонова
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация;
Санкт-Петербургский государственный университет,
г. Санкт-Петербург, Российская Федерация
E-mail: badonova0116@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0009-0006-4477-9572

О ПРОСТРАНСТВЕ ДЕ БРАНЖА, СВЯЗАННОМ С ДЗЕТА-ФУНКЦИЕЙ РИМАНА[1]

АННОТАЦИЯ

В недавней статье В.В. Капустина было построено пространство де Бранжа, элементом которого является выражение, содержащее кси-функцию Римана; были найдены каноническая система с диагональным гамильтонианом и обобщенное преобразование Фурье, соответствующие пространству. В данном кратком сообщении рассматривается аналогичное пространство де Бранжа с некоторыми предпочтительными изменениями и приводятся связанные с ним формулы; также выписываются гамильтониан и обобщенное преобразование Фурье.

Ключевые слова: пространство де Бранжа; кси-функция Римана; каноническая система с диагональным гамильтонианом; обобщенное преобразование Фурье.

Цитирование. Бадонова С.А. О пространстве де Бранжа, связанном с дзета-функцией Римана // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 2. С. 7–11. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-2-7-11.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Светлана Алексеевна Бадонова — студент механико–математического факультета, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34; Санкт-Петербургский государственный университет, 199034, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9.

Одним из важных положений теории пространств де Бранжа является их связь с каноническими системами — парами дифференциальных уравнений первого порядка, которые задаются гамильтонианом на интервале вещественной прямой. Такая связь осуществляется обобщенным преобразованием Фурье и позволяет проводить спектральный анализ дифференциальных операторов с помощью пространств де Бранжа. Пространства де Бранжа определяются их структурными функциями, представляющими собой целые функции из класса Эрмита — Билера; подпространства де Бранжа образуют упорядоченную по включению цепочку подпространств. Структурные функции подпространств де Бранжа могут быть выписаны через решения канонической системы. Таким образом, одной из важных задач при изучении пространств де Бранжа является нахождение канонической системы и обобщенного преобразования Фурье, соответствующих пространству.

[1]Работа выполнена в Санкт-Петербургском международном математическом институте имени Леонарда Эйлера при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075–15–2022–287 от 06.04.2022).

В статье [1] построено пространство де Бранжа, элементом которого является кси-функция Римана:

$$\xi(s) = \frac{1}{2}\pi^{-s/2}s(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),$$

где ζ — дзета-функция Римана, — деленная на некоторый полином; найдены гамильтониан канонической системы, соответствующей пространству, и оператор, являющийся обобщенным преобразованием Фурье канонической системы, изометрически отображающий гильбертово пространство канонической системы на пространство де Бранжа. В.В. Капустин предложил автору найти пространство де Бранжа, которому соответствует аналогичная каноническая система с некоторыми предпочтительными изменениями. В данном кратком сообщении представлены полученные результаты и отражающие их формулы.

Приведем необходимые сведения из теории пространств де Бранжа. Подробнее некоторые утверждения и их доказательства рассматриваются в работе [1]. Теория пространств де Бранжа и канонических систем с гамильтонианом, суммируемым вблизи левого конца интервала, изложена, например, в работе [2]. Несмотря на то что в данном кратком сообщении рассматривается каноническая система с гамильтонианом, не суммируемым вблизи левого конца интервала, многие утверждения из работы [2] выполняются без существенных изменений.

Классом Эрмита — Билера $\mathcal{HB}$ называется множество целых функций $\mathcal{E}$ в комплексной плоскости, для которых выполнено неравенство

$$|\mathcal{E}(\bar{z})| < |\mathcal{E}(z)|$$

при всех z из верхней полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. *Пространством де Бранжа* $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ со структурной функцией $\mathcal{E} \in \mathcal{HB}$ называется гильбертово пространство, состоящее из целых функций F таких, что функции $\frac{F}{\mathcal{E}}$ и $\frac{F^\sharp}{\mathcal{E}}$ принадлежат пространству Харди H^2 в верхней полуплоскости (здесь и далее $F^\sharp(z) = \overline{F(\bar{z})}$). Нормы функций $\frac{F}{\mathcal{E}}$ и $\frac{F^\sharp}{\mathcal{E}}$ совпадают в пространстве H^2 и определяют норму функции F в пространстве $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$.

Каждому пространству де Бранжа соответствует каноническая система, которая задается гамильтонианом на интервале вещественной прямой. *Гамильтониан* H представляет собой локально суммируемую матричнозначную функцию на интервале (a, b) вещественной прямой, значениями которой являются вещественные матрицы размера 2×2 такие, что $H(t) \geqslant 0$ почти всюду.

Будем рассматривать гамильтониан H на интервале (a, b) вещественной прямой, который дополнительно обладает свойствами i–iv:

i. Гамильтониан является диагональным, то есть представим в виде

$$H(t) = \begin{pmatrix} w_+(t) & 0 \\ 0 & w_-(t) \end{pmatrix}.$$

ii. Каждая из функций w_+, w_- отлична от нуля почти всюду.
iii. Гамильтониан суммируем вблизи правого конца b интервала.
iv. Вблизи левого конца a интервала гамильтониан не суммируем, но выполняется условие

$$\lim_{x\to a}\left(\int_a^x w_+(t)\,dt \times \int_x^b w_-(t)\,dt\right) = 0.$$

Канонической системой называется матричное дифференциальное уравнение $J\dot{f}(t) = zH(t)f(t)$ на интервале (a, b), где $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} f_+ \\ f_- \end{pmatrix}$ — векторнозначная функция от переменной t, $z \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр. В случае диагонального гамильтониана H каноническая система может быть переписана в виде

$$\begin{cases} -\dot{f}_- = z\,w_+f_+, \\ \dot{f}_+ = z\,w_-f_-. \end{cases}$$

Пространством канонической системы называется гильбертово пространство, состоящее из векторнозначных функций f на интервале (a, b); норма в пространстве определяется по формуле

$$\|f\|^2 = \int_a^b \left\langle H(t)f(t),\ f(t)\right\rangle dt,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{C}^2$. (Если свойство ii не выполнено, дополнительно требуется факторизация пространства). В случае гамильтониана H, обладающего свойствами i, ii, пространство может быть представлено в виде прямой суммы $L^2_{w_+} \oplus L^2_{w_-}$ пространств, для которых диагональные элементы w_+, w_- гамильтониана являются весовыми функциями.

Пусть $A(t,z)$, $B(t,z)$ — целые функции при каждом t. Предположим, что для любого z функции A и B определяют решение канонической системы и выполнено условие

$$A(t,z)\to 1, \quad B(t,z)\to 0 \tag{1}$$

при $t\to a$. В случае диагонального гамильтониана H существование такого решения обеспечивается свойством iv. Данное утверждение получено как сообщение от Р.В. Романова. Приведем схему доказательства. Не умаляя общности, можно полагать $trH=1$. Тогда несуммируемость гамильтониана H вблизи левого конца a интервала равносильна тому, что $a=-\infty$; свойство iv переписывается в виде $\lim\limits_{x\to-\infty} x\int\limits_{-\infty}^{x} w_+(t)\,dt=0$. Функция A может быть найдена как неподвижная точка отображения $f_+\mapsto 1-z^2\int\limits_{-\infty}^{x} w_-(t)\int\limits_{-\infty}^{t} w_+(\tau)f_+(\tau)\,d\tau\,dt$, которое является сжимающим на пространстве $C(-\infty,b)$ при достаточно большом по модулю отрицательном $b\in\mathbb{R}$ с нормой $\|f_+\|_C=\sup\limits_{x\in(-\infty,b)}|f_+(x)|$. Тогда функция B находится по A из уравнения канонической системы. Можно показать, что для таких функций A и B условие (1) выполнено, кроме того, $A^\sharp=A$, $B^\sharp=B$. Функции A и B могут быть найдены как целые функции при каждом t.

При каждом t функция $E(t,z)=A(t,z)+iB(t,z)$ как функция от z принадлежит классу Эрмита — Билера и потому является структурной функцией некоторого пространства де Бранжа. Оператор V:

$$(Vf)(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_a^b\left\langle H(t)f(t),\ \begin{pmatrix}A(t,\bar z)\\ B(t,\bar z)\end{pmatrix}\right\rangle dt= \tag{2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_a^b\big(f_+(t)A(t,z)w_+(t)+f_-(t)B(t,z)w_-(t)\big)\,dt,$$

определяет обобщенное преобразование Фурье канонической системы. Он изометрически отображает пространство канонической системы на пространство де Бранжа со структурной функцией $E(b,z)$. Существование такого пространства обеспечивается свойством iii. Отметим, что утверждение также имеет место, если вместо интервала $(a,\ b)$ рассматривать интервал $(a,\ c)$, где $c\in(a,\ b)$. При разных значениях c получается упорядоченная по включению цепочка подпространств де Бранжа.

Будем рассматривать каноническую систему на интервале $(-\infty,\,-4\pi)$ с гамильтонианом H:

$$H(t)=\begin{pmatrix}\frac{e^t}{-t} & 0\\ 0 & \frac{e^{-t}}{-t}\end{pmatrix}.$$

Можно показать, что для гамильтониана выполняются свойства i–iv. Отметим, что каноническую систему с таким гамильтонианом можно определить на всей отрицательной полуоси, но рассматривается только ее сужение на указанный интервал.

Обозначим $\alpha=\alpha(z)=\frac{1}{2}-iz$.

Теорема.

1. Функции

$$A(t,z)=\sqrt{\frac{-t}{4\pi}}e^{-\frac{t}{2}}\left(K_\alpha\left(-\frac{t}{2}\right)+K_{\alpha-1}\left(-\frac{t}{2}\right)\right),$$

$$B(t,z)=-i\sqrt{\frac{-t}{4\pi}}e^{\frac{t}{2}}\left(K_\alpha\left(-\frac{t}{2}\right)-K_{\alpha-1}\left(-\frac{t}{2}\right)\right)$$

определяют решение канонической системы на интервале $(-\infty,\,-4\pi)$ с гамильтонианом H, где K_α — модифицированная функция Бесселя. Кроме того, для функций A и B выполнено условие (1).

2. Оператор V, определяющий обобщенное преобразование Фурье канонической системы, имеет вид

$$(Vf)(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{-4\pi}\left[f_+(t)\frac{e^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{-t}}\left(K_\alpha\left(-\frac{t}{2}\right)+K_{\alpha-1}\left(-\frac{t}{2}\right)\right)-\right.$$

$$\left.-if_-(t)\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{-t}}\left(K_\alpha\left(-\frac{t}{2}\right)-K_{\alpha-1}\left(-\frac{t}{2}\right)\right)\right]dt.$$

3. Пространство де Бранжа со структурной функцией $E(-4\pi, z)$ является образом оператора V. Оно совпадает (в смысле совпадения множеств и равенства норм) с пространством де Бранжа $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ со структурной функцией $\mathcal{E}(z) = 2K_\alpha(2\pi)$.

4. Пространство $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ содержит функцию $\frac{\xi\left(\frac{1}{2}-2iz\right)}{p(z)}$, где ξ — кси-функция Римана, p — полином степени не меньше трех, нулями которого являются различные нули функции $\xi\left(\frac{1}{2}-2iz\right)$.

Доказательство.

В работе [1] показано, что функции $A_1(t,z) = A\left(2t, \frac{z}{2}\right)$, $B_1(t,z) = B\left(2t, \frac{z}{2}\right)$ определяют решение канонической системы на интервале $(-\infty, -2\pi)$ с гамильтонианом $H_1(t) = H(2t)$ и удовлетворяют условию (1). Заменив t на $t/2$ и z на $2z$, получим доказательство утверждения 1.

Для рассматриваемого гамильтониана $H(t)$ диагональными элементами являются функции $w_+(t) = \frac{e^t}{-t}$, $w_-(t) = \frac{e^{-t}}{-t}$. Подставив функции A, B, w_+, w_- в формулу (2), найдем выражение для оператора V. Таким образом, получим доказательство утверждения 2.

Из приведенных выше утверждений следует, что образом оператора V является пространство де Бранжа со структурной функцией $E(-4\pi, z)$. Совпадение этого пространства с пространством $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, $\mathcal{E}(z) = 2K_\alpha(2\pi)$, связано со свойством пространств де Бранжа. Известно, что структурная функция пространств де Бранжа определяется неоднозначно: пространства $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ и $\mathcal{H}_{\mathcal{E}_\beta}$ совпадают (в смысле совпадения множеств и равенства норм), где

$$\mathcal{E}_\beta = \frac{\mathcal{E} - \bar{\beta}\mathcal{E}^\sharp}{\sqrt{1-|\beta|^2}}, \quad |\beta| < 1.$$

Положив $\beta = \dfrac{e^{-4\pi} - 1}{e^{-4\pi} + 1}$ для функции $\mathcal{E}(z) = 2K_\alpha(2\pi)$, получим $\mathcal{E}_\beta(z) = E(-4\pi, z)$. Таким образом, пространство де Бранжа со структурной функцией $E(-4\pi, z)$ совпадает с пространством $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$. Утверждение 3 доказано.

Для доказательства утверждения 4 определим оператор

$$\Phi : F(z) \mapsto \sqrt{2}\, F(2z).$$

Он изометрически отображает пространство де Бранжа со структурной функцией $2K_{\frac{2\alpha+1}{4}}(2\pi)$ на пространство $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$. Из работы [1] следует, что если p — полином степени не меньше трех, нулями которого являются различные нули функции $\xi\left(\frac{1}{2}-iz\right)$, то функция $F(z) = \frac{\xi\left(\frac{1}{2}-iz\right)}{p\left(\frac{z}{2}\right)}$ принадлежит пространству де Бранжа со структурной функцией $2K_{\frac{2\alpha+1}{4}}(2\pi)$. Тогда функция $\frac{\xi\left(\frac{1}{2}-2iz\right)}{p(z)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi F$ принадлежит пространству $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ как элемент образа оператора Φ. Утверждение 4 доказано.

Теорема доказана.

Литература

[1] Капустин В.В. Множество нулей дзета-функции Римана как точечный спектр оператора // Алгебра и анализ. 2021. Т. 33, № 4. С. 107–124. URL: https://www.mathnet.ru/rus/aa1771.

[2] Romanov R. Canonical systems and de Branges spaces. URL: https://arxiv.org/abs/1408.6022v1.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-2-7-11

Submited: 15.02.2024
Revised: 17.03.2024
Accepted: 15.05.2024

S.A. Badonova
Samara National Research University, Samara, Russian Federation;
Saint Petersburg University, Saint Petersburg, Russian Federation
E-mail: badonova0116@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0009-0006-4477-9572

ON A DE BRANGES SPACE RELATED TO THE RIEMANN ZETA FUNCTION[2]

ABSTRACT

In a recent article by V.V. Kapustin a de Branges space, whose element is an expression containing the Riemann xi function, was constructed; the canonical system with a diagonal Hamiltonian and the generalized Fourier transform corresponding to the space were found. In this article we present a similar de Branges space with some preferred modifications and we provide formulas related to it; we also write down the Hamiltonian and the generalized Fourier transform.

Key words: De Branges space; Riemann xi function; canonical system with diagonal Hamiltonian; generalized Fourier transform.

Citation. Badonova S.A. On a de Branges space related to the Riemann zeta function. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 2, pp. 7–11. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-2-7-11. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: author and reviewers declare no conflict of interests.

Svetlana A. Badonova — undergraduate student of the Faculty of Mechanics and Mathematics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation; Saint Petersburg University, 7/9 Universitetskaya nab., Saint Petersburg, 199034, Russian Federation.

References

[1] Kapustin V.V. The set of zeros of the Riemann zeta function as the point spectrum of an operator. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2022, vol. 33, issue 4, pp. 661–673. DOI: https://doi.org/10.1090/spmj/1720. (In English; original in Russian)

[2] Romanov R. Canonical systems and de Branges spaces. Available at: http://arxiv.org/abs/1408.6022v1.

[2]The work was performed at the Saint Petersburg Leonhard Euler International Mathematical Institute and supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement no. 075-15-2022-287).