



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-1-96-111

УДК 539.126.4

Дата: поступления статьи: 23.11.2023  
после рецензирования: 26.12.2023  
принятия статьи: 28.02.2024

**А.В. Карпишков**

Самарский национальный исследовательский университет  
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация  
E-mail: karpishkoff@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0762-5532>

**В.А. Салеев**

Самарский национальный исследовательский университет  
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация  
E-mail: saleev@samsu.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0505-5564>

**К.К. Шилиев**

Самарский национальный исследовательский университет  
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация  
E-mail: kirill.k.shilyaev@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-0531-883X>

## РОЖДЕНИЕ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ $J/\psi$ НА КОЛЛАЙДЕРЕ NICA В НРКХД И ОБОБЩЕННОЙ ПАРТОННОЙ МОДЕЛИ<sup>1</sup>

### АННОТАЦИЯ

В статье рассмотрено рождение  $J/\psi$  и  $\psi'$  мезонов в рамках нерелятивистской квантовой хромодинамики и обобщенной партонной модели. Из имеющихся экспериментальных данных ( $\sqrt{s} = 200$  ГэВ и  $\sqrt{s} = 19.4$  ГэВ) по рождению этих состояний чармония извлечены октетные непертурбативные матричные элементы и средние значения квадратов поперечных импульсов начальных партонов, которые далее использованы для предсказания сечения рождения неполяризованных чармониев и поляризации  $J/\psi$  и  $\psi'$  при энергии  $\sqrt{s} = 27$  ГэВ ускорителя NICA.

**Ключевые слова:** физика высоких энергий; квантовая хромодинамика; чармоний; спин; поляризация; нерелятивистская квантовая хромодинамика; коллинеарная партонная модель; обобщенная партонная модель; SPD NICA.

**Цитирование.** Карпишков А.В., Салеев В.А., Шилиев К.К. Рождение поляризованных  $J/\psi$  на коллайдере NICA в НРКХД и обобщенной партонной модели // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 1. С. 96–111. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-1-96-111>.

**Информация о конфликте интересов:** авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Карпишков А.В., Салеев В.А., Шилиев К.К., 2024

*Антон Витальевич Карпишков* — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

*Владимир Анатольевич Салеев* — доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

*Кирилл Константинович Шилиев* — магистрант кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта ОИЯИ.

## Введение

Экспериментальное исследование процессов рождения тяжелых кваркониев дает уникальные возможности для изучения относительной роли жестких процессов, описываемых в рамках теории возмущений квантовой хромодинамики (КХД), и непертурбативных моделей адронизации. Рождение поляризованных состояний  $J/\psi$  мезонов является прецизионным тестом для моделей, описывающих адронизацию тяжелых кварков в кваркониях: модели цветовых синглетов (МЦС) [1], нерелятивистской КХД (НРКХД) [2] и модели испарения цвета (МИЦ) [3]. Существующие экспериментальные данные по рождению поляризованных  $J/\psi$  получены в протон-протонных и антипротон-протонных столкновениях при высоких энергиях от  $\sqrt{s} = 200$  ГэВ [4] до  $\sqrt{s} = 1.96$  ТэВ [5] и  $\sqrt{s} = 13$  ТэВ [6]. Удовлетворительного описания данных не получено ни в одной из моделей адронизации [7]. В этой связи представляет интерес изучение рождения поляризованных  $J/\psi$  при энергиях коллайдера NICA,  $\sqrt{s} = 27$  ГэВ [8] и теоретические предсказания для спектров поляризованных  $J/\psi$  мезонов, полученных в различных подходах факторизации и моделях адронизации. В работе [9] были сделаны предсказания в модели адронизации НРКХД, выполненные в коллинеарной партонной модели [10] и подходе реджезации партонов [11]. В данной статье мы изучаем рождение поляризованных  $J/\psi$  в обобщенной партонной модели (ОПМ) и НРКХД впервые.

## 1. Неколлинеарная модель факторизации

Стандартным методом рассмотрения партонных подпроцессов и способом факторизации сечения жесткого адронного процесса является коллинеарная партонная модель (КПМ), имеющая известный ряд недостатков, в частности — расходимость сечения в области малых поперечных импульсов рождающейся частицы. Один из способов включить в описание область малых импульсов — это подход TMD-факторизации (transverse-momentum-dependence) [12], в котором подразумевается, что начальные партоны обладают ненулевыми поперечными компонентами импульсов. Область применения строгой TMD-факторизации ограничивается малыми значениями поперечных импульсов чармония  $p_T \ll \mu_F$ , где  $\mu_F$  — энергетический масштаб факторизации партонного подпроцесса.

ОПМ можно назвать феноменологической реализацией идеи TMD-факторизации. Если в КПМ импульсы начальных партонов описываются как продольные компоненты импульсов летящих друг навстречу другу протонов, то в ОПМ вводятся в рассмотрение ненулевые поперечные компоненты импульсов начальных партонов.

Описывая столкновение протонов с импульсами  $p_1$  и  $p_2$ , обозначим импульсы партонов в соответствующих протонах как  $q_1$  и  $q_2$ . Будем явно выделять их поперечные компоненты  $q_{1T}$ ,  $q_{2T}$ , тогда импульсы начальных партонов могут быть записаны в виде

$$q_1^\mu = x_1 p_1^\mu + y_1 p_2^\mu + q_{1T}^\mu, \quad q_2^\mu = x_2 p_2^\mu + y_2 p_1^\mu + q_{2T}^\mu, \quad q_{iT}^\mu = (0, \vec{q}_{iT}, 0), \quad i = 1, 2,$$

где  $x$  и  $y$  — это доли импульсов протонов. Здесь ради сохранения калибровочной инвариантности (то есть выполнения условия  $q_1^2 = q_2^2 = 0$ ) в импульсы партонов искусственно добавлены слагаемые, пропорциональные импульсам летящих им навстречу протонов. Условие калибровочной инвариантности требует, чтобы начальные партоны были на массовой поверхности, что позволяет найти выражения для долей импульса  $y$ :

$$y_i = \frac{t_i}{sx_i}, \quad t_i = \vec{q}_{iT}^2, \quad i = 1, 2.$$

Компоненты импульсов  $q_1$ ,  $q_2$  могут быть представлены следующим образом:

$$q_1^\mu = \left( \frac{x_1 \sqrt{s}}{2} + \frac{t_1}{2\sqrt{s}x_1}, \vec{q}_{1T}, \frac{x_1 \sqrt{s}}{2} - \frac{t_1}{2\sqrt{s}x_1} \right)^\mu, \\ q_2^\mu = \left( \frac{x_2 \sqrt{s}}{2} + \frac{t_2}{2\sqrt{s}x_2}, \vec{q}_{2T}, -\frac{x_2 \sqrt{s}}{2} + \frac{t_2}{2\sqrt{s}x_2} \right)^\mu.$$

Сечение процесса в рамках подхода КПМ, согласно теореме о факторизации, может быть представлено как произведение сечения жесткого партонного подпроцесса и партонных функций распределения (ПФР), которые описывают вероятность партона иметь ту или иную долю импульса  $x$ . Строго эта теорема доказана для КПМ, но не для ОПМ [12], однако используется для факторизации сечения и для процесса рождения чармония в столкновении протонов записывается в виде

$$d\sigma(pp \rightarrow CX) = \int dx_1 \int d^2q_{1T} F_1(x_1, \mu_F^2, q_{1T}) \int dx_2 \int d^2q_{2T} F_2(x_2, \mu_F^2, q_{2T}) d\hat{\sigma},$$

где  $d\hat{\sigma}$  — сечение жесткого партонного подпроцесса, которое соответственно для подпроцессов  $2 \rightarrow 1$  и  $2 \rightarrow 2$  выражается следующим образом:

$$d\hat{\sigma}(ab \rightarrow C) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q_1 + q_2 - k_1) \frac{|\overline{\mathcal{M}}|^2}{I} \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3 2k_{10}},$$

$$d\hat{\sigma}(ab \rightarrow Cd) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q_1 + q_2 - k_1 - k_2) \frac{|\overline{\mathcal{M}}|^2}{I} \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3 2k_{10}} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3 2k_{20}},$$

здесь  $k_i$  — импульсы конечных частиц,  $I$  — потоковый фактор, а  $|\overline{\mathcal{M}}|^2$  — усредненный по конечным спиновым и цветовым состояниям и суммированный по начальным квадрат модуля амплитуды партонного подпроцесса. Партонные функции распределения  $F(x, \mu_F^2, q_T)$  в ОПМ-факторизации представляются в форме произведения не зависящих от поперечного импульса коллинеарных партонных распределений и множителей, включающих данную зависимость:

$$F(x, \mu_F^2, q_T) = f(x, \mu_F^2) G(q_T),$$

используемый нами анзац для функции  $G(q_T)$  имеет гауссову форму с соответствующим нормировочным условием [13]:

$$G(q_T) = \frac{e^{-q_T^2/\langle q_T^2 \rangle}}{\pi \langle q_T^2 \rangle}, \quad \int G(q_T) d^2 q_T = 1.$$

Значение феноменологического параметра  $\langle q_T^2 \rangle$ , имеющего смысл среднего значения квадрата поперечного импульса начальных партонов, традиционно берется равным около 1 ГэВ<sup>2</sup> [14], мы же, исходя из зависимости величины  $\langle q_T^2 \rangle$  от энергии столкновения, извлечем в дальнейшем его значение из экспериментальных данных.

## 2. Нерелятивистская квантовая хромодинамика

Основная идея нерелятивистской квантовой хромодинамики (НРКХД) состоит в разложении волновой функции тяжелого кваркония в ряд по степеням малого параметра, роль которого выполняет относительная скорость конститuentных кварков  $v$  [2]. Соотношение между кинетической и потенциальной энергией, которая для достаточно больших масс кваркония  $M$  подавляется членом, пропорциональным  $\alpha_s/r$ , показывает, что относительная скорость  $v$  пропорциональна сильной константе связи  $\alpha_s$ , которая в свою очередь с ростом  $M$  логарифмически уменьшается, так как  $\alpha_s \sim 1/\ln M$ . Так что для чармония, для которого  $v^2 \approx 0.3$ , возможно введение системы масштабов, характеризующих состояния кваркония с определенным набором квантовых чисел через значения специфических динамических величин [15]. Так, значения массы кваркония  $M$  (характеризующее энергию основного состояния), трехмерного импульса  $Mv$  (обратно пропорционального размеру основного состояния) и кинетической энергии с точностью до числового множителя  $Mv^2$  (которая определяет величину расщепления между уровнями радиального и углового возбуждений) удовлетворяют неравенству  $M^2 \gg (Mv)^2 \gg (Mv^2)^2$  и позволяют реализовать разложение волновой функции основного состояния чармония

$$|J/\psi\rangle = \mathcal{O}(v^0) |c\bar{c}[{}^3S_1^{(1)}]\rangle + \mathcal{O}(v^1) |c\bar{c}[{}^3P_J^{(8)}]g\rangle + \mathcal{O}(v^2) |c\bar{c}[{}^3S_1^{(1,8)}]gg\rangle + \mathcal{O}(v^2) |c\bar{c}[{}^1S_0^{(8)}]g\rangle + \dots$$

Если ограничиться лишь слагаемым лидирующего по  $v$  порядка, то в итоговое сечение внесет вклад только рождение синглетных по цвету состояний чармония, данное приближение носит название модели цветовых синглетов (МЦС).

Подход НРКХД также позволяет осуществить факторизацию жесткого сечения [2], которое распадается на произведение сечения рождения кварк-антикварковой пары в некотором состоянии, определяемом соответствующим набором квантовых чисел, и непертурбативного матричного элемента (НМЭ), отвечающего за адронизацию кварк-антикварковой пары в кварконий (здесь  $c$  обозначает очарованный кварк, а суммирование проводится по фоковским состояниям, обозначенным для краткости  $n$ ):

$$d\hat{\sigma}(ab \rightarrow CX) = \sum_n d\hat{\sigma}(ab \rightarrow c\bar{c}[n]X) \langle \mathcal{O}^C[n] \rangle / (N_{\text{col}} N_{\text{pol}}),$$

где  $N_{\text{col}} = 2N_c$  для синглетных состояний,  $N_{\text{col}} = N_c^2 - 1$  для октетных и  $N_{\text{pol}} = 2J + 1$  ( $N_c = 3$  — число учитываемых цветов,  $J$  — полный момент кварк-антикварковой пары). НМЭ синглетных состояний могут быть получены в потенциальных моделях тяжелых кваркониев [16], они связаны со значениями волновой функции чармония или ее производной в нуле:

$$\langle \mathcal{O}^C[{}^3S_1^{(1)}] \rangle = 2N_c(2J + 1) |\Psi(0)|^2, \quad \langle \mathcal{O}^C[{}^3P_J^{(1)}] \rangle = 2N_c(2J + 1) |\Psi'(0)|^2.$$

Подобный подход не применим к октетным НМЭ, значения которых извлекаются из экспериментальных данных.

Вычисление амплитуд в НРКХД осуществляется с помощью последовательности проецирований. Проекторы на состояния со значениями спина 0 и 1 имеют вид [17]

$$\Pi_0 = \frac{1}{\sqrt{8m_c^3}} \left( \frac{\hat{P}}{2} - \hat{q} - m_c \right) \gamma^5 \left( \frac{\hat{P}}{2} + \hat{q} + m_c \right), \quad \Pi_1^\mu = \frac{1}{\sqrt{8m_c^3}} \left( \frac{\hat{P}}{2} - \hat{q} - m_c \right) \gamma^\mu \left( \frac{\hat{P}}{2} + \hat{q} + m_c \right),$$

где  $m_c$  — это масса  $c$ -кварка,  $P$  — полный импульс кварка и антикварка, а  $q$  — их относительный импульс. Проекторы на цветовые состояния — синглетное и октетное соответственно:

$$C_1 = \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{N_c}}, \quad C_8 = \sqrt{2}T_{ij}^a,$$

где  $\delta_{ij}$  — дельта Кронекера,  $T_{ij}^a$  — генераторы фундаментального представления цветовой группы  $SU(3)$ , а  $N_c = 3$ . Окончательное проецирование на состояние с определенным значением углового момента производится с помощью взятия следа и производной по относительному импульсу  $q$  порядка, равного орбитальному квантовому числу (с последующим занулением  $q$ ). Поэтому амплитуды рождения  $c\bar{c}$ -пар могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(a + b \rightarrow c\bar{c}[{}^3S_1^{(1)}]) &= \text{Tr}[C_1 \Pi_1^\mu \mathcal{M}(a + b \rightarrow c\bar{c}) \varepsilon_\mu(J_z, P)]|_{q=0}, \\ \mathcal{M}(a + b \rightarrow c\bar{c}[{}^3P_J^{(1)}]) &= \frac{d}{dq_\nu} \text{Tr}[C_1 \Pi_1^\mu \mathcal{M}(a + b \rightarrow c\bar{c}) \varepsilon_{\mu\nu}^{(J)}(J_z, P)]|_{q=0}, \\ \mathcal{M}(a + b \rightarrow c\bar{c}[{}^1S_0^{(8)}]) &= \text{Tr}[C_8 \Pi_0 \mathcal{M}(a + b \rightarrow c\bar{c})]|_{q=0}, \end{aligned}$$

здесь приведены характерные амплитуды рождения пар. Обозначение  $\mathcal{M}$  внутри знаков следа соответствует амплитуде рождения пары с "отрезанными" линиями конечных кварков,  $\varepsilon(J_z, P)$  — это вектор или тензор поляризации.

Суммирование по поляризациям в процессе получения квадрата модуля амплитуды неполяризованного  ${}^3S_1$  состояния чармония осуществляется с помощью поляризационного тензора

$$\mathcal{P}_{\mu\nu} = \sum_{J_z} \varepsilon_\mu(J_z, P) \varepsilon_\nu^*(J_z, P) = -g_{\mu\nu} + \frac{P_\mu P_\nu}{M^2}.$$

Для неполяризованных  ${}^3P_J$  состояний тензоры имеют следующий вид ( $J = 0, 1, 2$ ):

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mu\nu\rho\sigma} &= \varepsilon_{\mu\nu}^{(0)}(P) \varepsilon_{\rho\sigma}^{(0)*}(P) = \frac{1}{3} \mathcal{P}_{\mu\nu} \mathcal{P}_{\rho\sigma}, \\ \mathcal{P}_{\mu\nu\rho\sigma} &= \sum_{J_z} \varepsilon_{\mu\nu}^{(1)}(J_z, P) \varepsilon_{\rho\sigma}^{(1)*}(J_z, P) = \frac{1}{2} [\mathcal{P}_{\mu\rho} \mathcal{P}_{\nu\sigma} - \mathcal{P}_{\mu\sigma} \mathcal{P}_{\rho\nu}], \\ \mathcal{P}_{\mu\nu\rho\sigma} &= \sum_{J_z} \varepsilon_{\mu\nu}^{(2)}(J_z, P) \varepsilon_{\rho\sigma}^{(2)*}(J_z, P) = \frac{1}{2} [\mathcal{P}_{\mu\rho} \mathcal{P}_{\nu\sigma} + \mathcal{P}_{\mu\sigma} \mathcal{P}_{\rho\nu}] - \frac{1}{3} \mathcal{P}_{\mu\nu} \mathcal{P}_{\rho\sigma}. \end{aligned}$$

Кроме того, в работе изучаются и поляризованные состояния чармония. Для определения направления спина нами выбрана система отсчета, связанная со спиральностью кваркония (helicity frame); в этой системе вектор продольной поляризации направлен вдоль трехмерного импульса кваркония. Приведем выражения тензоров и для суммирования по состояниям с выделенной поляризацией. Процедура построения вектора продольной поляризации описана в работе, а его явное выражение и соответствующий тензор для  ${}^3S_1$  состояния [18]:

$$\varepsilon_\mu(0, P) = \frac{(PQ)P_\mu/M - MQ_\mu}{\sqrt{(PQ)^2 - sM^2}}, \quad \mathcal{P}_{\mu\nu}^0 = \varepsilon_\mu(0, P) \varepsilon_\nu^*(0, P),$$

где  $Q$  — сумма импульсов сталкивающихся адронов (в нашем случае протонов) и  $s = Q^2$ . Поляризованное  ${}^3P_1$  состояние вычислялось с помощью процедуры, описанной в работе [19]. Тензоры для поляризованных  ${}^3P_2$  состояний, проекция  $J_z$  указана у тензоров верхним индексом [20]:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mu\nu\rho\sigma}^0 &= \varepsilon_{\mu\nu}^{(2)}(0, P) \varepsilon_{\rho\sigma}^{(2)*}(0, P) = \frac{1}{6} [2\mathcal{P}_{\mu\nu}^0 - \mathcal{P}_{\mu\nu}^1] [2\mathcal{P}_{\rho\sigma}^0 - \mathcal{P}_{\rho\sigma}^1], \quad \mathcal{P}_{\mu\nu}^1 = \mathcal{P}_{\mu\nu} - \mathcal{P}_{\mu\nu}^0, \\ \mathcal{P}_{\mu\nu\rho\sigma}^1 &= \sum_{|J_z|=1} \varepsilon_{\mu\nu}^{(2)}(J_z, P) \varepsilon_{\rho\sigma}^{(2)*}(J_z, P) = \frac{1}{2} [\mathcal{P}_{\mu\rho}^0 \mathcal{P}_{\nu\sigma}^1 + \mathcal{P}_{\mu\sigma}^0 \mathcal{P}_{\rho\nu}^1 + \mathcal{P}_{\nu\sigma}^0 \mathcal{P}_{\mu\rho}^1 + \mathcal{P}_{\nu\rho}^0 \mathcal{P}_{\mu\sigma}^1], \end{aligned}$$

$$\mathcal{P}_{\mu\nu\rho\sigma}^2 = \sum_{|J_z|=2} \varepsilon_{\mu\nu}^{(2)}(J_z, P) \varepsilon_{\rho\sigma}^{(2)*}(J_z, P) = \frac{1}{2} [\mathcal{P}_{\mu\rho}^1 \mathcal{P}_{\nu\sigma}^1 + \mathcal{P}_{\mu\sigma}^1 \mathcal{P}_{\rho\nu}^1 - \mathcal{P}_{\mu\nu}^1 \mathcal{P}_{\rho\sigma}^1].$$

Также следует обратить внимание на учет распадов вышележащих энергетических состояний в рождении чармония. Для получения сечения неполяризованного  $J/\psi$  проводится суммирование по сечениям рождения возбужденных состояний, умноженным на бранчинг распада данного состояния в основное, причем вычисление проводится с учетом эффекта отдачи, а именно — выражения для сдвига по поперечному импульсу основного состояния:  $p_{TC} \approx (M_C/M_{C'}) \cdot p_{TC'}$ . Учет распадов в рождении продольно поляризованного состояния  $J/\psi$  устроен сложнее, далее приведено полное выражение для этого сечения [19]:

$$\sigma_L^{J/\psi} = \sigma_L^{J/\psi, \text{прямое}} + \sigma_L^{\chi_{cJ}} + \sigma_L^{\psi'} + \sigma_L^{\psi' \rightarrow \chi_{cJ}},$$

каждое из слагаемых само представлено суммой сечений:

$$\begin{aligned} \sigma_L^{J/\psi(\psi'), \text{прямое}} &= \sigma_0^{J/\psi(\psi')} ({}^3S_1^{(1)}) + \sigma_0^{J/\psi(\psi')} ({}^3S_1^{(8)}) + \frac{1}{3} \sigma^{J/\psi(\psi')} ({}^1S_0^{(8)}) + \\ &+ \frac{1}{3} \sigma^{J/\psi(\psi')} ({}^3P_0^{(8)}) + \frac{1}{2} \sigma_1^{J/\psi(\psi')} ({}^3P_1^{(8)}) + \frac{2}{3} \sigma_0^{J/\psi(\psi')} ({}^3P_2^{(8)}) + \frac{1}{2} \sigma_1^{J/\psi(\psi')} ({}^3P_2^{(8)}), \\ \sigma_L^{\chi_{cJ}} &= \left[ \frac{1}{3} \sigma^{\chi_{c0}} ({}^3P_0^{(1)}) + \frac{1}{3} \sigma^{\chi_{c0}} ({}^3S_1^{(8)}) \right] \text{Br}(\chi_{c0} \rightarrow J/\psi + \gamma) + \\ &+ \left[ \frac{1}{2} \sigma_1^{\chi_{c1}} ({}^3P_1^{(1)}) + \frac{1}{2} \sigma_0^{\chi_{c1}} ({}^3S_1^{(8)}) + \frac{1}{4} \sigma_1^{\chi_{c1}} ({}^3S_1^{(8)}) \right] \text{Br}(\chi_{c1} \rightarrow J/\psi + \gamma) + \\ &+ \left[ \frac{2}{3} \sigma_0^{\chi_{c2}} ({}^3P_2^{(1)}) + \frac{1}{2} \sigma_1^{\chi_{c2}} ({}^3P_2^{(1)}) + \frac{17}{30} \sigma_0^{\chi_{c2}} ({}^3S_1^{(8)}) + \frac{13}{60} \sigma_1^{\chi_{c2}} ({}^3S_1^{(8)}) \right] \text{Br}(\chi_{c2} \rightarrow J/\psi + \gamma), \end{aligned}$$

$$\sigma_L^{\psi'} = \sigma_L^{\psi', \text{прямое}} \text{Br}(\psi' \rightarrow J/\psi + X),$$

$$\begin{aligned} \sigma_L^{\psi' \rightarrow \chi_{cJ}} &= \frac{1}{3} \sigma_L^{\psi', \text{прямое}} \text{Br}(\psi' \rightarrow \chi_{c0} + \gamma) \text{Br}(\chi_{c0} \rightarrow J/\psi + \gamma) + \\ &+ \left[ \frac{1}{2} \sigma_L^{\psi', \text{прямое}} + \frac{1}{4} \sigma_T^{\psi', \text{прямое}} \right] \text{Br}(\psi' \rightarrow \chi_{c1} + \gamma) \text{Br}(\chi_{c1} \rightarrow J/\psi + \gamma) + \\ &+ \left[ \frac{17}{30} \sigma_L^{\psi', \text{прямое}} + \frac{13}{60} \sigma_T^{\psi', \text{прямое}} \right] \text{Br}(\psi' \rightarrow \chi_{c2} + \gamma) \text{Br}(\chi_{c2} \rightarrow J/\psi + \gamma). \end{aligned}$$

Нижние индексы  $L$  и  $T$  соответствуют продольной и поперечной поляризациям состояний.

### 3. Результаты расчетов

Приведем перечень инструментов, использованных для вычислений. В первую очередь, по процедуре, описанной в предыдущей части, были получены квадраты модулей амплитуд партонных подпроцессов, рассматриваемых ниже; их вычисление проводилось в системе компьютерной алгебры Wolfram Mathematica с применением пакетов FeynCalc [21] и FeynArts [22]. Численное интегрирование сечений проводилось с помощью библиотеки численного интегрирования CUBA и алгоритма интегрирования Suave [23]. В качестве коллинеарных ПФР были взяты численно заданные функции MSTW2008LO [24]. Относительная погрешность всех вычислений не превышала 1 %.

Вычисление всех вкладов в рождение  $J/\psi$  было проведено в лидирующем порядке теории возмущений по бегущей константе связи  $\alpha_s$ . Среди партонных подпроцессов  $2 \rightarrow 1$  и  $2 \rightarrow 2$ , дающих вклад как в прямое рождение  $J/\psi$ , так и через промежуточные вышележащие состояния, выделим те, в которых рождаются синглетные состояния чармония, и те, в которых — октетные состояния:

$$\begin{aligned} g + g &\rightarrow \chi_{cJ} [{}^3P_J^{(1)}], & J = 0, 2, & & g + g &\rightarrow J/\psi [{}^1S_0^{(8)}], \\ g + g &\rightarrow J/\psi [{}^3S_1^{(1)}] + g, & & & g + g &\rightarrow J/\psi [{}^3P_J^{(8)}], & J = 0, 2, \\ g + g &\rightarrow \psi' [{}^3S_1^{(1)}] + g, & & & q + \bar{q} &\rightarrow J/\psi [{}^3S_1^{(8)}], \\ g + g &\rightarrow \chi_{c1} [{}^3P_1^{(1)}] + g, & & & q + \bar{q} &\rightarrow \chi_{cJ} [{}^3S_1^{(8)}], & J = 0, 2. \end{aligned}$$

В качестве начальных партонных учитывались глюоны  $g$  и кварки  $q$  ( $\bar{q}$ ). Здесь не указаны подпроцессы  $2 \rightarrow 1$ , которым отвечают равные нулю матричные элементы синглетных состояний. В вычислениях массы состояний чармония принимались следующими [25]:  $m_{J/\psi} = 3.096$  ГэВ,  $m_{\psi'} = 3.686$  ГэВ,

$m_{\chi_{c0}} = 3.415$  ГэВ,  $m_{\chi_{c1}} = 3.510$  ГэВ,  $m_{\chi_{c2}} = 3.556$  ГэВ. Распады состояний чармония в  $J/\psi$  и распады  $J/\psi$  в пары электрон-позитрон или мюон-антимюон учитывались бранчингами — дополнительными феноменологическими множителями, на которые домножались соответствующие сечения [25]:  $\text{Br}(\chi_{c0} \rightarrow J/\psi + \gamma) = 0.014$ ,  $\text{Br}(\chi_{c1} \rightarrow J/\psi + \gamma) = 0.343$ ,  $\text{Br}(\chi_{c2} \rightarrow J/\psi + \gamma) = 0.19$ ,  $\text{Br}(\psi' \rightarrow J/\psi + X) = 0.614$ ,  $\text{Br}(J/\psi \rightarrow e^+e^-) = 0.05971$ ,  $\text{Br}(J/\psi \rightarrow \mu^+\mu^-) = 0.05961$ ,  $\text{Br}(\psi' \rightarrow \chi_{c0} + \gamma) = 0.0979$ ,  $\text{Br}(\psi' \rightarrow \chi_{c1} + \gamma) = 0.0975$ ,  $\text{Br}(\psi' \rightarrow \chi_{c2} + \gamma) = 0.0952$ . Значения НМЭ, которые в НРКХД соответствуют адронизации рождающейся пары очарованных кварков, были взяты следующими [26]:  $\langle \mathcal{O}^{J/\psi}[{}^3S_1^{(1)}] \rangle = 1.3$  ГэВ<sup>3</sup>,  $\langle \mathcal{O}^{\psi'}[{}^3S_1^{(1)}] \rangle = 0.65$  ГэВ<sup>3</sup>,  $\langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}}[{}^3P_0^{(1)}] \rangle = 0.089$  ГэВ<sup>5</sup>, также использовались соотношения для НМЭ, справедливые в лидирующем порядке НРКХД по  $v$  и отражающие спиновую симметрию тяжелых кварков:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}^{\chi_{cJ}}[{}^3P_J^{(1)}] \rangle &= (2J + 1) \cdot \langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}}[{}^3P_0^{(1)}] \rangle, \\ \langle \mathcal{O}^{J/\psi}[{}^3P_J^{(8)}] \rangle &= (2J + 1) \cdot \langle \mathcal{O}^{J/\psi}[{}^3P_0^{(8)}] \rangle, \\ \langle \mathcal{O}^{\chi_{cJ}}[{}^3S_1^{(8)}] \rangle &= (2J + 1) \cdot \langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}}[{}^3S_1^{(8)}] \rangle. \end{aligned}$$

При расчетах в качестве масштаба перенормировки  $\mu_R$ , входящего в выражение для константы связи  $\alpha_s$ , и масштаба факторизации  $\mu_F$ , от которого зависят ПФР, была принята поперечная масса чармония  $m_T = \sqrt{m^2 + p_T^2}$ . Так как выбор величины для масштабов является довольно свободным, то для оценки коридора ошибок теоретических предсказаний масштаб варьировался на множитель 2 в большую и меньшую сторону, коридор погрешностей на графиках будет показан светлой полосой того же цвета, что и основная линия.

Для предсказания рождения и поляризации  $J/\psi$  в протон-протонных столкновениях на ускорителе NICA при энергии  $\sqrt{s} = 27$  ГэВ сначала были проведены вычисления и сравнения для того же процесса при других энергиях, мы использовали результаты измерений коллабораций PHENIX ( $\sqrt{s} = 200$  ГэВ) [27] и NA3 ( $\sqrt{s} = 19.4$  ГэВ) [28]. Для описания рождения  $J/\psi$  в интервале малых быстрот  $|y| < 0.35$  и при  $p_T \ll 3$  ГэВ было достаточно синглетного вклада при традиционном значении  $\langle q_T^2 \rangle_g = 1$  ГэВ<sup>2</sup>. Однако его оказалось достаточно для описания данных измерений вплоть до  $p_T \lesssim 3$  ГэВ, то есть во всей области применимости ОПМ, мы фитировали на этих экспериментальных данных для рождения  $J/\psi$  сам параметр  $\langle q_T^2 \rangle_g$ , значение которого чувствительно к энергии процесса:  $\langle q_T^2 \rangle_g = 2.80$  ГэВ<sup>2</sup>,  $\chi^2/\text{d.o.f.} = 0.18$ , а расчеты отображены на графике (рис. 3.1) с указанием вкладов различных синглетных состояний в суммарное сечение  $J/\psi$ .

Также были фитированы данные измерений коллаборации PHENIX [27] для больших быстрот  $1.2 < |y| < 2.2$  и данные коллаборации NA3 [28]. Для описания этих экспериментов синглетного вклада было недостаточно, поэтому учитывался вклад от октетных состояний с начальными глюонами и кварками, так как состояние  ${}^3S_1^{(8)}$  в процессах с начальными глюонами не рождается. Следовательно, появился целый ряд новых параметров для фитирования:  $\langle q_T^2 \rangle_q$  (помимо аналогичного глюонного параметра) и октетные НМЭ, причем вклады от рождения  $J/\psi$  в процессах  $2 \rightarrow 1$  в состояниях  ${}^1S_0^{(8)}$ ,  ${}^3P_0^{(8)}$ ,  ${}^3P_2^{(8)}$  имеют одинаковую зависимость от  $p_T$ , то есть пропорциональны друг другу, поэтому соответствующие им НМЭ могут быть извлечены из экспериментальных данных только в виде линейной комбинации  $M_7^{J/\psi} = \langle \mathcal{O}^{J/\psi}[{}^1S_0^{(8)}] \rangle + 7 \cdot \langle \mathcal{O}^{J/\psi}[{}^3P_0^{(8)}] \rangle / m_c^2$ . Значения всех параметров, фитированных на данных PHENIX и NA3, расположены в табл. 3.1, а результаты наших расчетов — на рис. 3.2 и рис. 3.3. Как видно, вклад октетных состояний (в процессах с начальными глюонами) становится сравним с синглетным вкладом и даже превышает его, а в случае с данными NA3 — он один почти полностью описывает эксперимент, поэтому во всяком случае при больших  $y$  октетный вклад не может быть проигнорирован.

Для расчета предсказаний поляризации  $\psi'$  мы фитировали и данные PHENIX по рождению  $\psi'$  при  $\sqrt{s} = 200$  ГэВ [27]. Параметры, относящиеся к ОПМ, были взяты из фитирования данных по рождению  $J/\psi$  (табл. 3.1), так как они не должны зависеть от процесса, а октетные НМЭ, в частности  $M_7^{\psi'} = \langle \mathcal{O}^{\psi'}[{}^1S_0^{(8)}] \rangle + 7 \cdot \langle \mathcal{O}^{\psi'}[{}^3P_0^{(8)}] \rangle / m_c^2$  и  $\langle \mathcal{O}^{\psi'}[{}^3P_1^{(8)}] \rangle$ , были фитированы, и результаты этих расчетов помещены в табл. 3.2 и на рис. 3.4.

Перейдем к предсказаниям рождения  $J/\psi$  при энергии эксперимента SPD NICA. В расчетах учитывались вклады и использовались параметры, фитированные на данных измерений коллаборации NA3 из-за близости энергии  $\sqrt{s}$  этих двух экспериментов. На рис. 3.5 и 3.6 показаны результаты расчетов для дифференциального сечения рождения  $J/\psi$  как функций поперечного импульса  $p_T$  и быстроты  $y$  соответственно.

Кроме того, мы сравнили наши вычисления для сечения рождения  $J/\psi$  в ОПМ с конвенциональными расчетами в КПМ. Аналогично были фитированы данные коллабораций PHENIX и NA3 для  $p_T > 2$  ГэВ. Так же, как и в ОПМ, часть октетных НМЭ может быть фитирована лишь в виде линейной комбинации, однако она будет иной, так как в КПМ не существует процессов  $2 \rightarrow 1$ , и все состояния могут рождаться только в процессах  $2 \rightarrow 2$ . Анализ показывает, что отношение вкладов состояний  ${}^1S_0^{(8)}$ ,  ${}^3P_0^{(8)}$ ,  ${}^3P_1^{(8)}$ ,

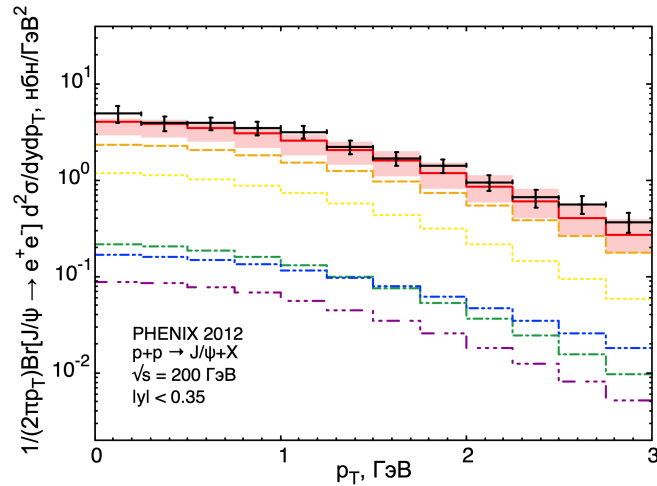


Рис. 3.1. Зависимость дифференциального сечения рождения  $J/\psi$  от поперечного импульса чармония  $p_T$ . Красная сплошная линия соответствует суммарному сечению, в которое входят сечение прямого рождения  $J/\psi$  (оранжевая штриховая линия) и вклады от распадов  $\chi_{c2}$  (желтая пунктирная),  $\psi'$  (зеленая штрихпунктирная),  $\chi_{c1}$  (синяя штрихпунктирная с двумя точками) и  $\chi_{c0}$  (фиолетовая штрихпунктирная с тремя точками). Экспериментальные данные по рождению  $J/\psi$  коллаборации PHENIX [27]

Fig. 3.1. Differential cross section of prompt  $J/\psi$  production versus charmonium transverse momentum  $p_T$ . Summed  $J/\psi$  cross section (red solid line) consists of direct  $J/\psi$  production (orange dashed line) and feed-down contributions of  $\chi_{c2}$  (yellow dotted line),  $\psi'$  (green dash-dotted line),  $\chi_{c1}$  (blue dash-dot-dotted line) and  $\chi_{c0}$  (purple dash-dot-dot-dotted line). Experimental data is taken from the PHENIX collaboration paper [27]

Таблица 3.1

**Результаты фитирования сечения рождения  $J/\psi$  в ОПМ на данных коллаборации PHENIX в области больших быстрот  $1.2 < |y| < 2.2$  и данных коллаборации NA3 при  $y > 0$**

Table 3.1

**Result of fitting of the prompt  $J/\psi$  production within GPM on the PHENIX collaboration data ( $1.2 < |y| < 2.2$ ) and the NA3 collaboration data ( $y > 0$ )**

Эксп. данные	PHENIX [27]	NA3 [28]
$\langle q_T^2 \rangle_g, \text{ ГэВ}^2$	2.80	0.85
$\langle q_T^2 \rangle_q, \text{ ГэВ}^2$	1.30	0.15
$M_7^{J/\psi}, \text{ ГэВ}^3$	$(5.17 \pm 0.33) \cdot 10^{-2}$	
$\langle \mathcal{O}^{J/\psi} [{}^3S_1^{(8)}] \rangle, \text{ ГэВ}^3$	$(0.00 \pm 0.26) \cdot 10^{-2}$	
$\langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}} [{}^3S_1^{(8)}] \rangle, \text{ ГэВ}^3$	$(4.12 \pm 3.55) \cdot 10^{-3}$	
$\chi^2/\text{d.o.f}$	0.52	

${}^3P_2^{(8)}$  в КПМ остается одинаковым только при достаточно больших  $p_T$ . Другими словами, рассмотрим отношение

$$\mathcal{R}(p_T) = \frac{\sum_{J=0,1,2} d\sigma(ab \rightarrow c\bar{c} [{}^3P_J^{(8)}] \rightarrow J/\psi)}{d\sigma(ab \rightarrow c\bar{c} [{}^1S_0^{(8)}] \rightarrow J/\psi)},$$

в нашем случае на интервале по  $p_T$  от 2 до 3 ГэВ отношение  $\mathcal{R}(p_T)$  немного больше 3, то есть для фитирования данных и последующей оценки предсказаний КПМ будем использовать комбинацию  $M_3^{J/\psi} = \langle \mathcal{O}^{J/\psi} [{}^1S_0^{(8)}] \rangle + 3 \cdot \langle \mathcal{O}^{J/\psi} [{}^3P_0^{(8)}] \rangle / m_c^2$ . Результаты фитирования октетных НМЭ указаны в табл. 3.3, а расчеты для данных PHENIX и NA3 и предсказания для SPD NICA помещены на рис. 3.7–3.8 вместе с аналогичными расчетами в ОПМ. Как видно, в области малых быстрот, где сосредоточена основная доля рождающихся  $J/\psi$ , предсказания в КПМ, по крайней мере в лидирующем порядке по  $\alpha_s$ , не со-

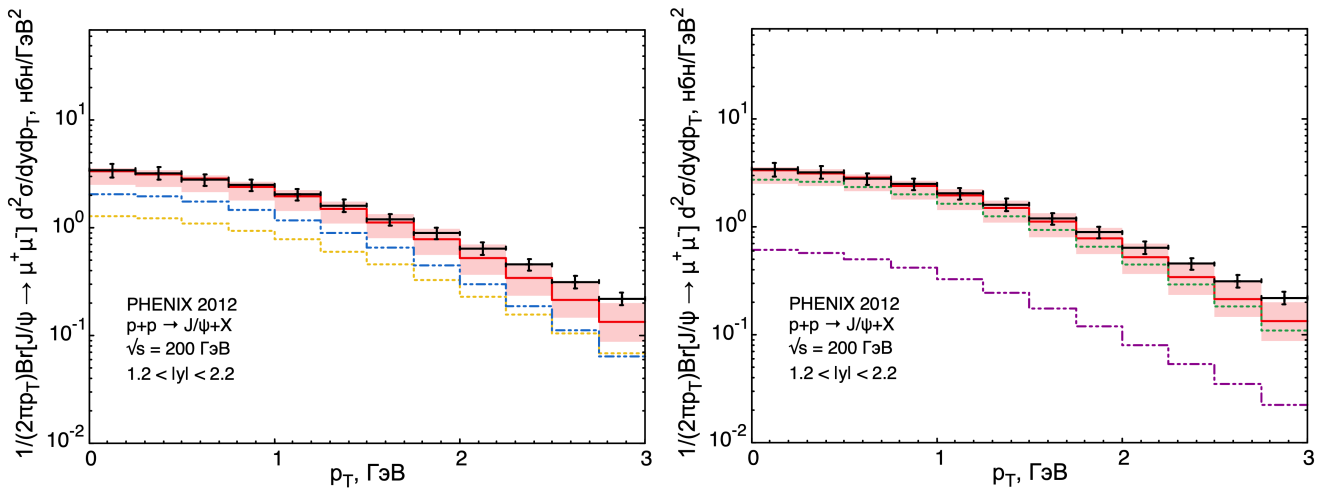


Рис. 3.2. Зависимость дифференциального сечения рождения  $J/\psi$  от поперечного импульса чармония  $p_T$  в сравнении с экспериментальными данными коллаборации PHENIX [27]. Слева показано сравнение полных синглетного (желтая пунктирная линия) и октетного (синяя штрихпунктирная с двумя точками) вкладов в рождение  $J/\psi$ . Справа — сравнение прямого рождения  $J/\psi$  (зеленая пунктирная) и вклада от распадов возбужденных состояний чармония (фиолетовая штрихпунктирная с двумя точками). Красная сплошная линия в обоих случаях отвечает суммарному сечению  $J/\psi$

Fig. 3.2. Differential cross section of prompt  $J/\psi$  production versus charmonium transverse momentum  $p_T$ . Comparison of the singlet (yellow dotted line) and octet (blue dash-dot-dotted line) contributions is shown on the left, comparison of the direct  $J/\psi$  production (green dotted line) and feed-down (purple dash-dot-dotted line) contributions is shown on the right. Red solid line refers to summed  $J/\psi$  production on both plots. Experimental data is taken from the PHENIX collaboration paper [27]

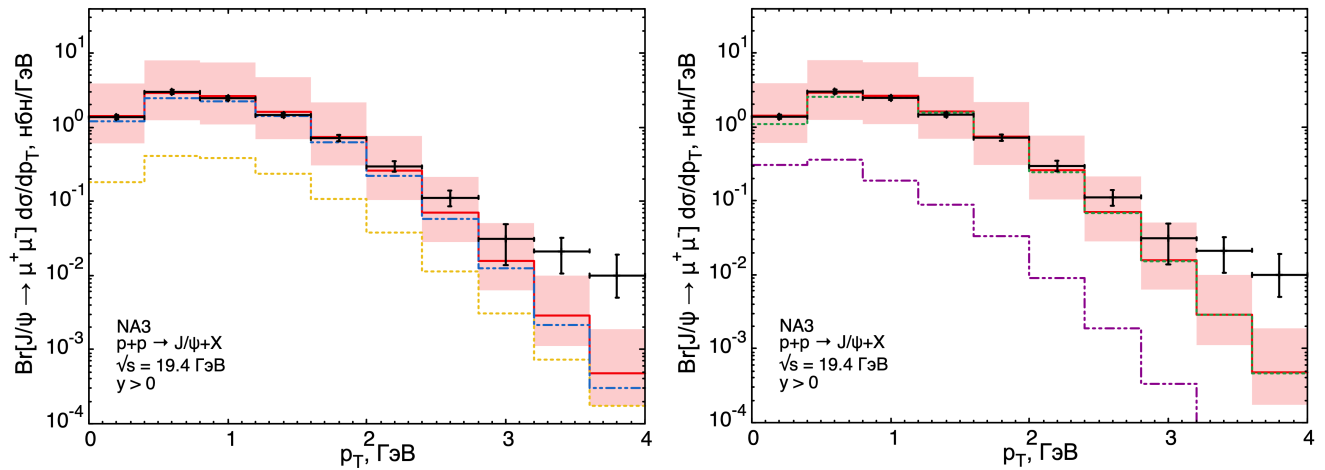


Рис. 3.3. Зависимость дифференциального сечения рождения  $J/\psi$  от поперечного импульса чармония  $p_T$  в сравнении с экспериментальными данными коллаборации NA3 [28]. Слева показано сравнение полных синглетного (желтая пунктирная линия) и октетного (синяя штрихпунктирная с двумя точками) вкладов в рождение  $J/\psi$ . Справа — сравнение прямого рождения  $J/\psi$  (зеленая пунктирная) и вклада от распадов возбужденных состояний чармония (фиолетовая штрихпунктирная с двумя точками). Красная сплошная линия в обоих случаях отвечает суммарному сечению  $J/\psi$

Fig. 3.3. Differential cross section of prompt  $J/\psi$  production versus charmonium transverse momentum  $p_T$ . Comparison of the singlet (yellow dotted line) and octet (blue dash-dot-dotted line) contributions is shown on the left, comparison of the direct  $J/\psi$  production (green dotted line) and feed-down (purple dash-dot-dotted line) contributions is shown on the right. Red solid line refers to summed  $J/\psi$  production on both plots. Experimental data is taken from the NA3 collaboration paper [28]



Таблица 3.2

**Результаты фитирования сечения рождения  $\psi'$  в ОПМ на данных коллаборации PHENIX в области быстрот  $|y| < 0.35$**

Table 3.2

**Result of fitting of the prompt  $\psi'$  production within GPM on the PHENIX collaboration data at midrapidity area  $|y| < 0.35$**

Эксп. данные	PHENIX [27]
$M_7^{\psi'}$ , ГэВ <sup>3</sup>	$(3.65 \pm 3.82) \cdot 10^{-3}$
$\langle \mathcal{O}^{\psi'} [{}^3P_1^{(8)}] \rangle$ , ГэВ <sup>5</sup>	$(0.05 \pm 1.24) \cdot 10^{-1}$
$\chi^2/\text{d.o.f}$	$6.6 \cdot 10^{-3}$

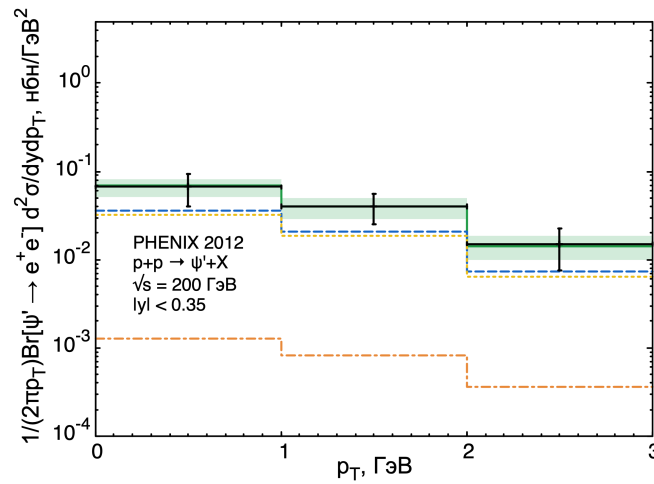


Рис. 3.4. Зависимость дифференциального сечения рождения  $\psi'$  от поперечного импульса чармония  $p_T$  в сравнении с экспериментальными данными коллаборации PHENIX [27]. Показаны вклады от рождения состояний  ${}^3S_1^{(1)}$  (синяя штриховая линия),  ${}^3S_1^{(8)}$  (оранжевая штрихпунктирная) и общий не разделяемый фитированием вклад состояний  ${}^1S_0^{(8)}$ ,  ${}^3P_0^{(8)}$ ,  ${}^3P_2^{(8)}$  (желтая пунктирная).

Сумма всех вкладов показана сплошной зеленой линией

Fig. 3.4. Differential cross section of prompt  $\psi'$  production versus charmonium transverse momentum  $p_T$ , contributions of the singlet state  ${}^3S_1^{(1)}$  (blue dashed line), octet state  ${}^3S_1^{(8)}$  (orange dash-dotted line) and a sum of octet states  ${}^1S_0^{(8)}$ ,  ${}^3P_0^{(8)}$ ,  ${}^3P_2^{(8)}$  (yellow dotted line) are shown separately. Green solid line refers to a sum of all these  $\psi'$  states contributions. Experimental data is taken from the PHENIX collaboration paper [27]

Таблица 3.3

**Результаты фитирования сечения рождения  $J/\psi$  в КПМ на данных коллабораций PHENIX ( $|y| < 0.35$ ,  $1.2 < |y| < 2.2$ ) и NA3 ( $y > 0$ )**

Table 3.3

**Result of fitting of the prompt  $J/\psi$  production within CPM on the PHENIX ( $|y| < 0.35$ ,  $1.2 < |y| < 2.2$ ) and NA3 ( $y > 0$ ) collaborations data**

Эксп. данные	PHENIX [27], NA3 [28]
$M_3^{J/\psi}$ , ГэВ <sup>3</sup>	$(0.0_{-3.3}^{+0.3}) \cdot 10^{-3}$
$\langle \mathcal{O}^{J/\psi} [{}^3S_1^{(8)}] \rangle$ , ГэВ <sup>3</sup>	$(0.0_{-2.6}^{+1.7}) \cdot 10^{-3}$
$\langle \mathcal{O}^{\chi_{c0}} [{}^3S_1^{(8)}] \rangle$ , ГэВ <sup>3</sup>	$(4.16 \pm 1.24) \cdot 10^{-3}$
$\chi^2/\text{d.o.f}$	7.23

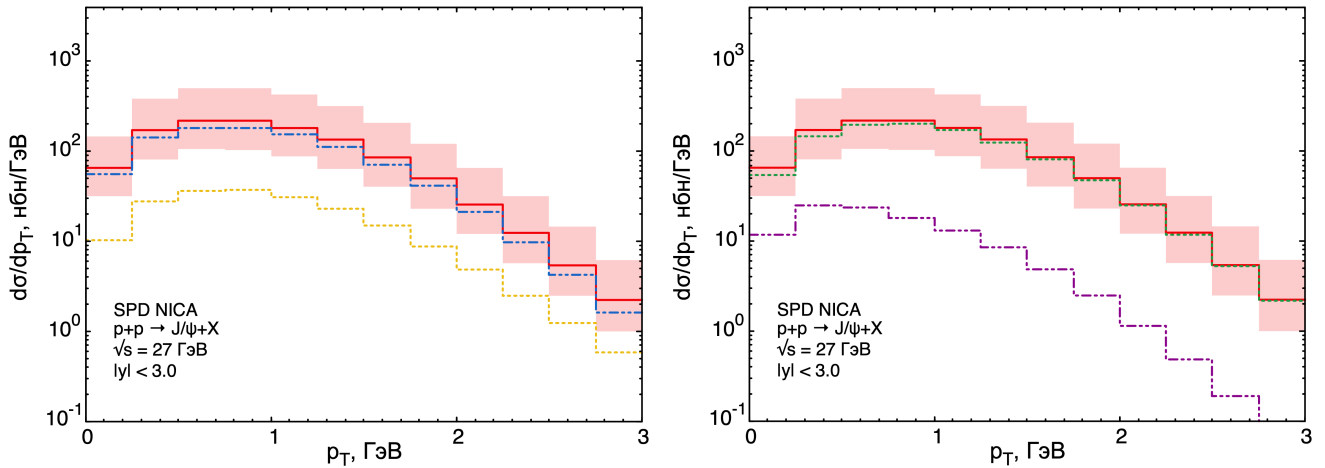


Рис. 3.5. Предсказания зависимости дифференциального сечения рождения  $J/\psi$  от поперечного импульса  $p_T$  для эксперимента SPD NICA. Слева показано сравнение полных синглетного (синяя пунктирная линия) и октетного (желтая штрихпунктирная с двумя точками) вкладов в рождение  $J/\psi$ . Справа — сравнение прямого рождения  $J/\psi$  (зеленая пунктирная) и вклада от распадов возбужденных состояний чармония (фиолетовая штрихпунктирная с двумя точками).

Красная сплошная линия в обоих случаях отвечает суммарному сечению  $J/\psi$

Fig. 3.5. Prediction for differential cross section of the prompt  $J/\psi$  production as a function of charmonium transverse momentum  $p_T$  at NICA energy  $\sqrt{s} = 27$  GeV. Comparison of the singlet (yellow dotted line) and octet (blue dash-dot-dotted line) contributions is shown on the left, comparison of the direct  $J/\psi$  production (green dotted line) and feed-down (purple dash-dot-dotted line) contributions is shown on the right. Red solid line refers to summed  $J/\psi$  production on both plots

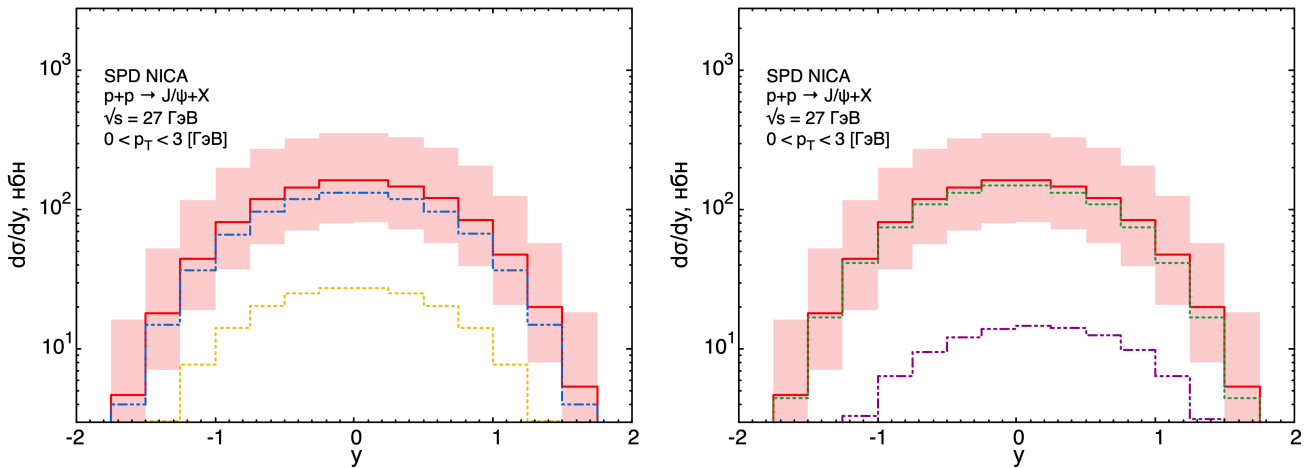


Рис. 3.6. Предсказания зависимости дифференциального сечения рождения  $J/\psi$  от быстроты  $y$  для эксперимента SPD NICA. Слева показано сравнение полных синглетного (синяя пунктирная линия) и октетного (желтая штрихпунктирная с двумя точками) вкладов в рождение  $J/\psi$ . Справа — сравнение прямого рождения  $J/\psi$  (зеленая пунктирная) и вклада от распадов возбужденных состояний чармония (фиолетовая штрихпунктирная с двумя точками). Красная сплошная линия в обоих случаях отвечает суммарному сечению  $J/\psi$

Fig. 3.6. Prediction for differential cross section of the prompt  $J/\psi$  production as a function of charmonium rapidity  $y$  at NICA energy  $\sqrt{s} = 27$  GeV. Comparison of the singlet (yellow dotted line) and octet (blue dash-dot-dotted line) contributions is shown on the left, comparison of the direct  $J/\psi$  production (green dotted line) and feed-down (purple dash-dot-dotted line) contributions is shown on the right. Red solid line refers to summed  $J/\psi$  production on both plots

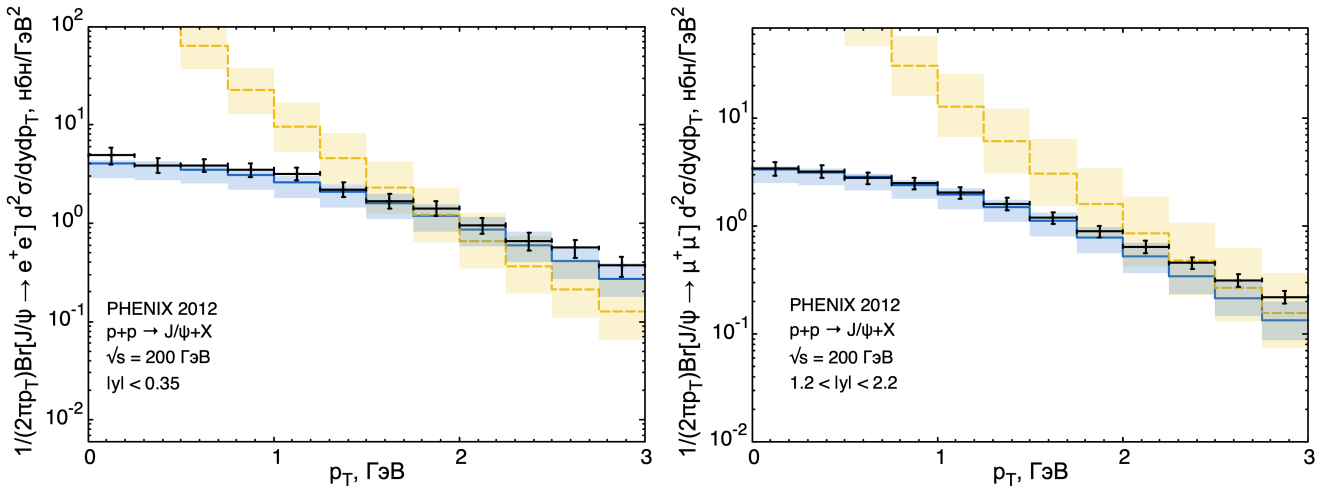


Рис. 3.7. Зависимость дифференциального сечения рождения  $J/\psi$  от поперечного импульса чармония  $p_T$ . Расчеты в КИМ (желтая штриховая линия) и ОПМ (синяя сплошная).  
 Экспериментальные данные коллаборации PHENIX [27]

Fig. 3.7. Differential cross section of the prompt  $J/\psi$  production versus charmonium transverse momentum  $p_T$  within CPM (yellow dashed line) and GPM (blue solid line) approaches. Experimental data is taken from the PHENIX collaboration paper [27]

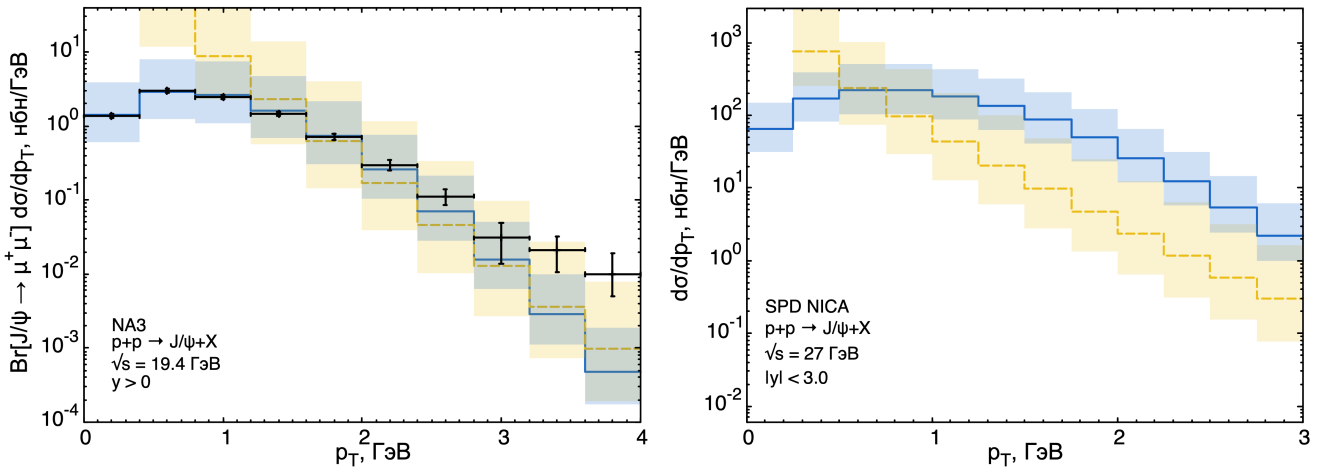


Рис. 3.8. Зависимость дифференциального сечения рождения  $J/\psi$  от поперечного импульса чармония  $p_T$ . Расчеты в КИМ (желтая штриховая линия) и ОПМ (синяя сплошная) для экспериментальных данных коллаборации NA3 [28] (слева) и предсказаний для SPD NICA (справа)  
 Fig. 3.8. Differential cross section of the prompt  $J/\psi$  production versus charmonium transverse momentum  $p_T$  within CPM (yellow dashed line) and GPM (blue solid line) approaches. Experimental data is taken from the NA3 collaboration paper [28] (on the left). Prediction for differential cross section of  $J/\psi$  production at NICA energy (on the right)

гласуются ни с экспериментальными данными, ни с нашими предсказаниями в ОПМ, что, возможно, оправдывает наш подход к описанию неполяризованных  $J/\psi$  в ОПМ при  $p_T < 3$  ГэВ.

Поляризация в рождении чармония может быть описана через один из коэффициентов в выражении для углового распределения лептонного распада чармония:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim 1 + \lambda \cos^2 \theta + \mu \sin 2\theta \cos \varphi + \nu \sin^2 \theta \cos 2\varphi, \quad \lambda = \frac{\sigma_T - 2\sigma_L}{\sigma_T + 2\sigma_L} = \frac{\sigma - 3\sigma_L}{\sigma + \sigma_L},$$

угловой коэффициент  $\lambda$  выражается через комбинацию сечений продольно и поперечно поляризованных чармониев. Расчеты для данных коллаборации PHENIX по измерению поляризации  $J/\psi$  изображены на рис. 3.9, построение границ коридора погрешностей для  $\lambda$  мы осуществляли с помощью следующих

выражений [29]:

$$\lambda_{\theta}^{\text{above}} = \lambda_{\theta}^{\text{centre}} + \sqrt{\left(\lambda_{\theta}^{\mu_F, \text{max}} - \lambda_{\theta}^{\text{centre}}\right)^2 + \left(\lambda_{\theta}^{\mu_R, \text{max}} - \lambda_{\theta}^{\text{centre}}\right)^2},$$

$$\lambda_{\theta}^{\text{below}} = \lambda_{\theta}^{\text{centre}} - \sqrt{\left(\lambda_{\theta}^{\mu_F, \text{min}} - \lambda_{\theta}^{\text{centre}}\right)^2 + \left(\lambda_{\theta}^{\mu_R, \text{min}} - \lambda_{\theta}^{\text{centre}}\right)^2}.$$

Вычисления показывают практически не зависящее от  $p_T$  значение коэффициента  $\lambda \approx 0.4$ , что совершенно не согласуется с имеющимися экспериментальными данными и говорит, вероятно, о том, что НРКХД не подходит для описания рождения поляризованных чармониев, по крайней мере, в лидирующем порядке теории возмущений.

Несмотря на расхождение наших расчетов для поляризации  $J/\psi$  с данными PHENIX, мы вычислили  $\lambda$  и для SPD NICA — наши предсказания для зависимости коэффициента  $\lambda$  от  $p_T$  и  $y$  в рождении  $J/\psi$  и  $\psi'$  показаны на рис. 3.10.

На рис. 3.11 можно увидеть наши вычисления отношений вкладов  $P$ -волновых состояний чармония  $\chi_{cJ}$  в рождение  $J/\psi$ .

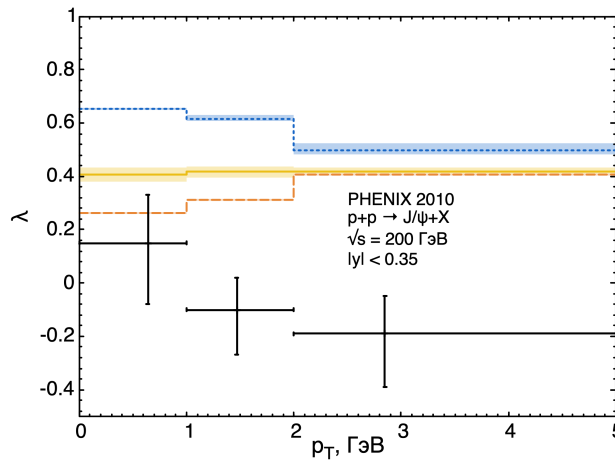


Рис. 3.9. Зависимость поляризации  $J/\psi$  от поперечного импульса  $p_T$  в ОПМ. Показаны вклад прямого рождения  $J/\psi$  (оранжевая штриховая линия), вклад от распада  $P$ -волновых состояний чармония  $\chi_{cJ}$  (синяя пунктирная) и сумма этих вкладов (желтая сплошная). Экспериментальные данные коллаборации PHENIX [4]

Fig. 3.9. Polarization of  $J/\psi$  versus charmonium transverse momentum  $p_T$ . Direct  $J/\psi$  production (orange dashed line), feed-down contribution of  $P$ -wave  $\chi_{cJ}$  states (blue dotted line) and summed  $J/\psi$  production (yellow solid line) are shown. Experimental data is taken from the PHENIX collaboration paper [4]

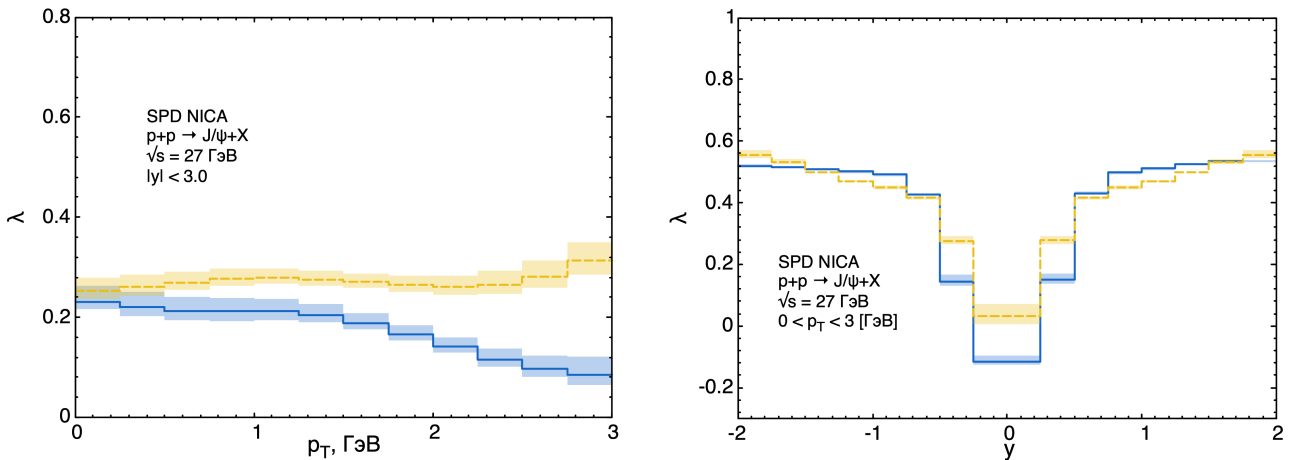


Рис. 3.10. Предсказания зависимости поляризации  $J/\psi$  (синяя сплошная линия) и  $\psi'$  (желтая штриховая) от поперечного импульса  $p_T$  и быстроты  $y$  в ОПМ для эксперимента SPD NICA

Fig. 3.10. Prediction for  $J/\psi$  (blue solid lines) and  $\psi'$  (yellow dashed lines) polarization as functions of charmonium transverse momentum  $p_T$  (on the left) and charmonium rapidity  $y$  (on the right) at NICA energy

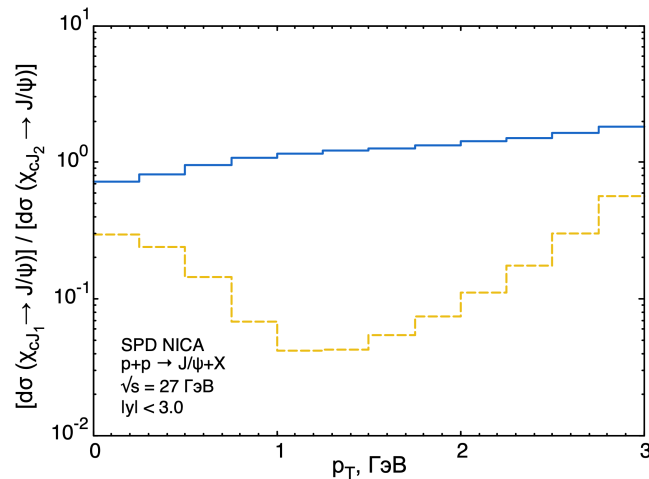


Рис. 3.11. Предсказания для отношений вкладов  $P$ -волновых состояний в рождение  $J/\psi$  в ОПМ для эксперимента SPD NICA. Показаны отношения сечений для  $J_1 = 0 / J_2 = 2$  (синяя сплошная линия) и  $J_1 = 1 / J_2 = 2$  (желтая штриховая)

Fig. 3.11. Prediction for ratios of  $P$ -wave states contributions to the  $J/\psi$  production at NICA energy. Ratios for  $J_1 = 0 / J_2 = 2$  (blue solid line) and  $J_1 = 1 / J_2 = 2$  (yellow dashed line) are shown

## Заключение

Итак, в ходе нашей работы по изучению рождения  $J/\psi$  в НРКХД и ОПМ мы провели фитирование ряда экспериментальных данных по рождению  $J/\psi$  и  $\psi'$  в протон-протонных столкновениях для извлечения из них значений феноменологических параметров, входящих в описание процесса в рамках выбранных нами подходов. С использованием этих параметров мы получили предсказания для рождения неполяризованных и поляризованных  $J/\psi$  и  $\psi'$  на ускорителе NICA. Исходя из сравнения с предыдущими расчетами в НРКХД и ОПМ и имеющимися экспериментальными данными, можно считать адекватным выбранный нами подход для предсказания рождения неполяризованных чармониев на NICA и недостаточно удовлетворительным для описания поляризации чармониев.

## Литература

- [1] Kühn J.H., Kaplan J., Safiani E.G.O. Electromagnetic Annihilation of  $e^+e^-$  Into Quarkonium States with Even Charge Conjugation // Nuclear Physics B. 1979. Vol. 157, Issue 1. Pp. 125–144. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(79\)90055-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(79)90055-5).
- [2] Bodwin G.T., Braaten E., Lepage G.P. Rigorous QCD analysis of inclusive annihilation and production of heavy quarkonium // Physical Review D. 1995. Vol. 51, Issue 3. Pp. 1125–1171. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.55.5853>.
- [3] Fritzsche H. Producing Heavy Quark Flavours in Hadronic Collisions: A Test of Quantum Chromodynamics // Physics Letters B. 1977. Vol. 67, Issue 2. Pp. 217–221. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(77\)90108-3](https://doi.org/10.1016/0370-2693(77)90108-3).
- [4] Adare A. [et al.] Transverse momentum dependence of  $J/\psi$  polarization at midrapidity in  $p + p$  collisions at  $\sqrt{s} = 200$  GeV // Physical Review D. 2010. Vol. 82, Issue 1. P. 012001. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.82.012001>.
- [5] Abulencia A. [et al.] Polarizations of  $J/\psi$  and  $\psi(2S)$  Mesons Produced in  $p\bar{p}$  Collisions at  $\sqrt{s} = 1.96$  TeV // Physical Review Letters. 2007. Vol. 99, Issue 13. P. 132001. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.99.132001>.
- [6] Brambilla N. [et al.] Heavy Quarkonium: Progress, Puzzles, and Opportunities // The European Physical Journal C. 2011. Vol. 71. Article number 1534. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-010-1534-9>.
- [7] Butenschoen M., Kniehl B.A. Next-to-leading-order tests of NRQCD factorization with  $J/\psi$  yield and polarization // Modern Physics Letters A. 2013. Vol. 28, No. 9. P. 1350027. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0217732313500272>.
- [8] Arbuzov A. [et al.] On the physics potential to study the gluon content of proton and deuteron at NICA SPD // Progress in Particle and Nuclear Physics. 2021. Vol. 119. P. 103858. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.pnpnp.2021.103858>.

- [9] Karpishkov A.V., Nefedov M.A., Saleev V.A. Spectra and polarizations of prompt  $J/\psi$  at the NICA within collinear parton model and parton Regeization approach // Journal of Physics Conference Series. 2020. Vol. 1435, No. 1. P. 012015. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1435/1/012015>.
- [10] Butenschoen M., Kniehl B. A.  $J/\psi$  Polarization at the Tevatron and the LHC: Nonrelativistic-QCD Factorization at the Crossroads // Physical Review Letters. 2012. Vol. 108, Issue 17. P. 172002. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.108.172002>.
- [11] Fadin V.S., Lipatov L.N. Radiative corrections to QCD scattering amplitudes in a multi-Regge kinematics // Nuclear Physics B., 1993. Vol. 406, Issues 1–2. Pp. 259–292. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(93\)90168-O](https://doi.org/10.1016/0550-3213(93)90168-O).
- [12] Collins J. Foundation of Perturbative QCD. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. 624 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511975592.020>.
- [13] D’Alesio U., Murgia F., Pisano C. Towards a first estimate of the gluon Sivers function from  $A_N$  data in  $pp$  collisions at RHIC // Journal of High Energy Physics. 2015. Vol. 9. Article number 119. DOI: [https://doi.org/10.1007/JHEP09\(2015\)119](https://doi.org/10.1007/JHEP09(2015)119).
- [14] D’Alesio U., Murgia F., Pisano C., Taels P. Probing the Gluon Sivers Function in  $p^\uparrow p \rightarrow J/\psi X$  and  $p^\uparrow p \rightarrow DX$  // Physical Review D. 2017. Vol. 96, Issue 3. P. 036011. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.036011>.
- [15] Lepage G.P., Magnea L., Nakhleh C., Magnea U., Hornbostel K. Improved nonrelativistic QCD for heavy-quark physics // Physical Review D. 1992. Vol. 46, Issue 9. Pp. 4052–4067. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.46.4052>.
- [16] Eichten E., Quigg C. Quarkonium wave functions at the origin // Physical Review D. 1995. Vol. 52, Issue 3. P. 1726–1728. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.52.1726>.
- [17] Cho P.L., Leibovich A.K. Color-octet quarkonia production // Physical Review D. 1996. Vol. 53, Issue 1. Pp. 150–162. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.53.150>.
- [18] Beneke M., Krämer M., Vanttinen M. Inelastic photoproduction of polarized  $J/\psi$  // Physical Review D. 1998. Vol. 57, Issue 7. Pp. 4258–4274. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.57.4258>.
- [19] Kniehl B.A., Lee J. Polarized  $J/\psi$  from  $\chi_{cJ}$  and  $\psi'$  decays at the Fermilab Tevatron // Physical Review D. 2000. Vol. 62, Issue 11. P. 114027. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.62.114027>.
- [20] Cho P.L., Wise M.B., Trivedi S.P. Gluon fragmentation into polarized charmonium // Physical Review D. 1995. Vol. 51, Issue 5. Pp. R2039–R2043. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.51.R2039>.
- [21] Shtabovenko V., Mertig R., Orellana F. FeynCalc 9.3: New features and improvements // Computer Physics Communications. 2020. Vol. 256. P. 107478. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2020.107478>.
- [22] Hahn T. Generating Feynman diagrams and amplitudes with FeynArts 3 // Computer Physics Communications. 2001. Vol. 140, Issue 3. Pp. 418–431. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0010-4655\(01\)00290-9](https://doi.org/10.1016/s0010-4655(01)00290-9).
- [23] Hanh T. Cuba — a library for multidimensional numerical integration // Computer Physics Communications. 2005. Vol. 168, Issue 2. Pp. 78–95. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2005.01.010>.
- [24] Martin A.D., Stirling W.J., Thorne R.S., Watt G. Parton distributions for the LHC // The European Physical Journal C. 2009. Vol. 63. Pp. 189–285. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-009-1072-5>.
- [25] Zyla P.A. [et al.] Review of Particle Physics // Progress of Theoretical and Experimental Physics. 2020. Vol. 2020, Issue 8. P. 083C01. DOI: <https://doi.org/10.1093/ptep/ptaa104>.
- [26] Braaten E., Kniehl B.A., Lee J. Polarization of prompt  $J/\psi$  at the Tevatron // Physical Review D. 2000. Vol. 62, Issue 9. P. 094005. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.62.094005>.
- [27] Adare A. [et al.] Ground and excited state charmonium production in  $p + p$  collisions at  $\sqrt{s} = 200$  GeV // Physical Review D. 2012. Vol. 85, Issue 9. P. 092004. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.092004>.
- [28] Badier J. [et al.] Experimental  $J/\psi$  Hadronic Production from 150-GeV/c to 280-GeV/c // Zeitschrift fur Physik C Particles and Fields. 1983. Vol. 20. Pp. 101–116. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01573213>.
- [29] Nelson R.E., Vogt R., Frawley A.D. Narrowing the uncertainty on the total charm cross section and its effect on the  $J/\psi$  cross section // Physical Review C. 2013. Vol. 87, Issue 1. P. 014908. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.87.014908>.



**A.V. Karpishkov**

Samara National Research University, Samara, Russian Federation  
E-mail: karpishkoff@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0762-5532>

**V.A. Saleev**

Samara National Research University, Samara, Russian Federation  
E-mail: saleev@samsu.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0505-5564>

**K.K. Shilyaev**

Samara National Research University, Samara, Russian Federation  
E-mail: kirill.k.shilyaev@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-0531-883X>

## PROMPT POLARIZED $J/\psi$ PRODUCTION AT NICA WITHIN NRQCD AND GENERALIZED PARTON MODEL

### ABSTRACT

In our work we consider prompt  $J/\psi$  and  $\psi'$  production within the approaches of nonrelativistic quantum chromodynamics and generalized parton model. We use various experimental data ( $\sqrt{s} = 200$  GeV and  $\sqrt{s} = 19.4$  GeV) of charmonium production to fit octet nonperturbative matrix elements and averaged values of initial partons' transverse momenta. Further, we make evaluation with the extracted parameters and predict  $J/\psi$  production cross section and polarization of  $J/\psi$  and  $\psi'$  at NICA collider energy  $\sqrt{s} = 27$  GeV.

**Key words:** high energy physics; quantum chromodynamics; charmonium; spin; polarization; nonrelativistic quantum chromodynamics; collinear parton model; generalized parton model; SPD NICA.

**Citation.** Karpishkov A.V., Saleev V.A., Shilyaev K.K. Prompt polarized  $J/\psi$  production at NICA within NRQCD and generalized parton model. *Vestnik Samarского университета. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 1, pp. 96–111. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-1-96-111>. (In Russ.)

**Information about the conflict of interests:** authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Karpishkov A.V., Saleev V.A., Shilyaev K.K., 2024

*Anton V. Karpishkov* — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, senior lecturer of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

*Vladimir A. Saleev* — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

*Kirill K. Shilyaev* — Master's Student of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

## References

- [1] Kühn J.H., Kaplan J., Safiani E.G.O. Electromagnetic Annihilation of  $e^+e^-$  Into Quarkonium States with Even Charge Conjugation. *Nuclear Physics B*, 1979, vol. 157, issue 1, pp. 125–144. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(79\)90055-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(79)90055-5).
- [2] Bodwin G.T., Braaten E., Lepage G.P. Rigorous QCD analysis of inclusive annihilation and production of heavy quarkonium. *Physical Review D*, 1995, vol. 51, issue 3, pp. 1125–1171. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.55.5853>.
- [3] Fritzsche H. Producing Heavy Quark Flavours in Hadronic Collisions: A Test of Quantum Chromodynamics. *Physics Letters B*, 1977, vol. 67, issue 2, pp. 217–221. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(77\)90108-3](https://doi.org/10.1016/0370-2693(77)90108-3).
- [4] Adare A. [et al.] Transverse momentum dependence of  $J/\psi$  polarization at midrapidity in  $p + p$  collisions at  $\sqrt{s} = 200$  GeV. *Physical Review D*, 2010, vol. 82, issue 1, p. 012001. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.82.012001>.
- [5] Abulencia A. [et al.] Polarizations of  $J/\psi$  and  $\psi(2S)$  Mesons Produced in  $p\bar{p}$  Collisions at  $\sqrt{s} = 1.96$  TeV. *Physical Review Letters*, 2007, vol. 99, issue 13, p. 132001. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.99.132001>.
- [6] Brambilla N. [et al.] Heavy quarkonium: Progress, puzzles, and opportunities. *The European Physical Journal C*, 2011, vol. 71, Article number 1534. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-010-1534-9>.
- [7] Butenschoen M., Kniehl B.A. Next-to-leading-order tests of NRQCD factorization with  $J/\psi$  yield and polarization. *Modern Physics Letters A*, 2013, vol. 28, no. 9, p. 1350027. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0217732313500272>.



- [8] Arbuzov A. [et al.] On the physics potential to study the gluon content of proton and deuteron at NICA SPD. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 2021, vol. 119, p. 103858. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.pnpnp.2021.103858>.
- [9] Karpishkov A.V., Nefedov M.A., Saleev V.A. Spectra and polarizations of prompt  $J/\psi$  at the NICA within collinear parton model and parton Reggeization approach. *Journal of Physics Conference Series*, 2020, vol. 1435, no. 1, p. 012015. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1435/1/012015>.
- [10] Butenschoen M., Kniehl B. A.  $J/\psi$  Polarization at the Tevatron and the LHC: Nonrelativistic-QCD Factorization at the Crossroads. *Physical Review Letters*, 2012, vol. 108, issue 17, p. 172002. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.108.172002>.
- [11] Fadin V.S., Lipatov L.N. Radiative corrections to QCD scattering amplitudes in a multi-Regge kinematics. *Nuclear Physics B*, 1993, vol. 406, issues 1–2, pp. 259–292. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(93\)90168-O](https://doi.org/10.1016/0550-3213(93)90168-O).
- [12] Collins J. *Foundation of Perturbative QCD*. Cambridge: Cambridge University Press, 2011, 624 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511975592.020>.
- [13] D’Alesio U., Murgia F., Pisano C. Towards a first estimate of the gluon Sivers function from  $A_N$  data in  $pp$  collisions at RHIC. *Journal of High Energy Physics*, 2015, vol. 9, Article number 119. DOI: [https://doi.org/10.1007/JHEP09\(2015\)119](https://doi.org/10.1007/JHEP09(2015)119).
- [14] D’Alesio U., Murgia F., Pisano C., Taels P. Probing the gluon Sivers function in  $p^\uparrow p \rightarrow J/\psi X$  and  $p^\uparrow p \rightarrow DX$ . *Physical Review D*, 2017, vol. 96, issue 3, p. 036011. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.036011>.
- [15] Lepage G.P., Magnea L., Nakhleh C., Magnea U., Hornbostel K. Improved nonrelativistic QCD for heavy-quark physics. *Physical Review D*, 1992, vol. 46, issue 9, pp. 4052–4067. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.46.4052>.
- [16] Eichten E., Quigg C. Quarkonium wave functions at the origin. *Physical Review D*, 1995, vol. 52, issue 3, pp. 1726–1728. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.52.1726>.
- [17] Cho P.L., Leibovich A.K. Color-octet quarkonia production. *Physical Review D*, 1996, vol. 53, issue 1, pp. 150–162. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.53.150>.
- [18] Beneke M., Krämer M., Vanttinen M. Inelastic photoproduction of polarized  $J/\psi$ . *Physical Review D*, 1998, vol. 57, issue 7, pp. 4258–4274. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.57.4258>.
- [19] Kniehl B.A., Lee J. Polarized  $J/\psi$  from  $\chi_{cJ}$  and  $\psi'$  decays at the Fermilab Tevatron. *Physical Review D*, 2000, vol. 62, issue 11, p. 114027. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.62.114027>.
- [20] Cho P.L., Wise M.B., Trivedi S.P. Gluon fragmentation into polarized charmonium. *Physical Review D*, 1995, vol. 51, issue 5, pp. R2039–R2043. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.51.R2039>.
- [21] Shtabovenko V., Mertig R., Orellana F. FeynCalc 9.3: New features and improvements. *Computer Physics Communications*, 2020, vol. 256, p. 107478. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2020.107478>.
- [22] Hahn T. Generating Feynman diagrams and amplitudes with FeynArts 3. *Computer Physics Communications*, 2001, vol. 140, issue 3, pp. 418–431. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0010-4655\(01\)00290-9](https://doi.org/10.1016/s0010-4655(01)00290-9).
- [23] Hanh T. Cuba — a library for multidimensional numerical integration. *Computer Physics Communications*, 2005, vol. 168, issue 2, pp. 78–95. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2005.01.010>.
- [24] Martin A.D., Stirling W.J., Thorne R.S., Watt G. Parton distributions for the LHC. *The European Physical Journal C*, 2009, vol. 63, pp. 189–285. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-009-1072-5>.
- [25] Zyla P.A. [et al.] Review of Particle Physics. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2020, vol. 2020, issue 8, p. 083C01. DOI: <https://doi.org/10.1093/ptep/ptaa104>.
- [26] Braaten E., Kniehl B.A., Lee J. Polarization of prompt  $J/\psi$  at the Tevatron. *Physical Review D*, 2000, vol. 62, issue 9, p. 094005. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.62.094005>.
- [27] Adare A. [et al.] Ground and excited state charmonium production in  $p+p$  collisions at  $\sqrt{s} = 200$  GeV. *Physical Review D*, 2012, vol. 85, issue 9, p. 092004. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.85.092004>.
- [28] Badier J. [et al.] Experimental  $J/\psi$  Hadronic Production from 150-GeV/c to 280-GeV/c. *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, 1983, vol. 20, pp. 101–116. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01573213>.
- [29] Nelson R.E., Vogt R., Frawley A.D. Narrowing the uncertainty on the total charm cross section and its effect on the  $J/\psi$  cross section. *Physical Review C*, 2013, vol. 87, issue 1, p. 014908. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.87.014908>.