ФИЗИКА

PHYSICS

 Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-1-82-95

УДК 517.9; 519.7; 530.145.83

Дата: поступления статьи: 25.12.2023
после рецензирования: 01.02.2024
принятия статьи: 28.02.2024

А.Р. Багров
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail:alexander.bagrov00@mail.ru ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1098-0300
Е.К. Башкиров
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail:bashkirov.ek@ssau.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8682-4956

ДИНАМИКА ПЕРЕПУТАННЫХ СОСТОЯНИЙ ГРИНБЕРГЕРА — ХОРНА — ЦАЙЛИНГЕРА В ТРЕХКУБИТНОЙ ТЕПЛОВОЙ МОДЕЛИ ТАВИСА — КАММИНГСА

АННОТАЦИЯ

В данной статье мы исследовали динамику систем двух и трех идентичных кубитов, резонансно взаимодействующих с выделенной модой общего теплового поля резонатора без потерь. Нами найдено решение квантового временного уравнения Лиувилля для различных трех- и двухкубитных перепутанных состояний кубитов. На основе указанных решений проведено вычисление критерия перепутанности кубитов – степени совпадения. Результаты численного моделирования степени совпадения показали, что увеличение среднего числа фотонов в моде приводит к уменьшению максимальной степени перепутывания. При этом показано, что двухкубитное перепутанное состояние более устойчиво по отношению к внешнему шуму, нежели трехкубитные перепутанные состояния Гринбергера — Хорна — Цайлингера (GHZ). При этом истинно перепутанное GHZ-состояние более устойчиво к шуму, чем GHZ-подобное перепутанное состояние.

Ключевые слова: кубиты; трехкубитные состояния Гринбергера — Хорна — Цайлингера; резонансное взаимодействие; резонатор; тепловое поле; перепутывание; степень совпадения.

Цитирование. Багров А.Р., Башкиров Е.К. Динамика перепутанных состояний Гринбергера — Хорна — Цайлингера в трехкубитной тепловой модели Тависа — Каммингса // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 1. С. 82–95. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-1-82-95.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Александр Романович Багров — магистр кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.
Евгений Константинович Башкиров — доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

Перепутанные состояния в настоящее время являются основным ресурсом физики квантовых вычислений, квантовых коммуникаций и квантовой криптографии, квантовой метрологии и т. д. [1–10]. Используя различные классы перепутанных состояний, можно ускорить вычисления, обеспечить безопасность коммуникаций и преодолеть стандартные квантовые пределы при измерениях. Для многокубитных систем существуют несколько неэквивалентных классов перепутанных состояний [11–13]. В частности, для простейшего случая трехкубитной системы существуют всего два подлинно перепутанных состояния [14–19]. К последним относятся перепутанные состояния Гринбергера — Хорна — Цайлингера (GHZ-состояния) и перепутанные состояния Вернера (W-состояния). Среди всех классов перепутанных состояний GHZ-состояния являются одними из наиболее востребованных состояний для целей квантовой информатики и квантовой метрологии [20–23]. В последние годы многочастичные GHZ-состояния были реализованы для различных физических систем кубитов: ионов в ловушках [24–26], ридберговских атомов [27], фотонов [28–30], сверхпроводящих кубитов [31–33]. Указанные работы открыли новые возможности в развитии масштабируемых квантовых компьютеров, квантовой метрологии и квантовой связи. В работах [22; 23] осуществлено перепутывание до 20 кубитов с точностью (степенью совпадения) выше 0,5. Точность и технические сложности в реализации перепутанных состояний кубитов растут экспоненциально с увеличением числа кубитов. Сложности теоретического анализа динамики GHZ-состояний также существенно возрастают с увеличением числа кубитов в системе. Поэтому при теоретическом рассмотрении таких состояний особое внимание уделяется анализу трехкубитных систем (см. ссылки в [34]). Для генерации, управления, контроля и измерения состояний систем кубитов используют электромагнитные поля резонаторов. При этом резонаторы функционируют при конечных температурах от мК для систем сверхпроводящих кубитов до комнатных в случае примесных спинов. Это означает, что кубиты взаимодействуют с тепловыми полями резонаторов. Такое взаимодействие приводит к осцилляциям Раби параметров перепутывания кубитов и, соответственно, к уменьшению степени их начального перепутывания. Еще одним эффектом, приводящим к ошибкам при измерении состояний кубитов, является мгновенная смерть перепутывания [35]. Указанный эффект экспериментально наблюдался для кубитов различной физической природы [36–38]. Поэтому представляет значительный интерес изучение методов, предотвращающих эффект мгновенной смерти перепутывания кубитов, вызванной взаимодействием с тепловыми полями резонаторов. Изучение указанного эффекта для кубитов, взаимодействующих с тепловыми шумами резонаторов, особенно важно в связи с тем, что в резонаторах всех квантовых устройств обязательно присутствуют тепловые фотоны.

В нашей работе [39] мы детально исследовали динамику перепутывания в системе трех кубитов, резонансно взаимодействующих с модой теплового квантового электромагнитного поля в идеальном резонаторе, для сепарабельных, бисепарабельных и истинно перепутанных состояний W-типа. При этом было показано, что эффект мгновенной смерти перепутывания имеет место для любых интенсивностей теплового поля резонатора. Представляет большой интерес изучить динамику трехкубитной модели в резонаторе для истинно перепутанного состояния кубитов GHZ-типа.

В настоящей статье мы исследовали динамику системы, состоящей из трех идентичных кубитов, резонансно взаимодействующих с модой теплового квантового электромагнитного поля идеального резонатора посредством однофотонных переходов, для перепутанных состояний кубитов GHZ-типа. При этом в качестве количественной меры перепутывания подсистемы кубитов использовались не отрицательности пар кубитов, а степень совпадения (fidelity) состояния подсистемы кубитов в произвольный момент времени и начального GHZ-состояния.

1. Модель и решение временного уравнения Шредингера

Рассмотрим систему трех идентичных кубитов Q_1, Q_2, Q_3, резонансно взаимодействующих с модой квантового электромагнитного поля идеального резонатора. Гамильтониан взаимодействия такой модели в дипольном приближении и приближении вращающейся волны можно представить в виде

$$\hat{H}_{int} = \sum_{k=1}^{3} \hbar\gamma(\hat{\sigma}_k^+ \hat{c} + \hat{\sigma}_k^- \hat{c}^+), \tag{1}$$

где $\hat{\sigma}_k^+ = |+\rangle_{kk}\langle-|$ и $\hat{\sigma}_k^- = |-\rangle_{kk}\langle+|$ — повышающий и понижающий операторы в k-м кубите, $|-\rangle_k$– основное и $|+\rangle_k$ — возбужденное состояние k-го кубита ($k = 1, 2, 3$), $\hat{c}^+$ и $\hat{c}$ — операторы рождения и уничтожения фотонов резонаторной моды и γ — параметр кубит-фотонного взаимодействия.

Будем полагать, что в начальный момент времени кубиты приготовлены в истинно перепутанном состоянии GHZ-типа

$$|\Psi(0)\rangle_{Q_1Q_2Q_3} = \cos\theta|+,+,+\rangle + \sin\theta|-,-,-\rangle \tag{2}$$

или GHZ-подобном состоянии вида

$$|\Psi(0)\rangle_{Q_1Q_2Q_3} = \cos\varphi|+,-,-\rangle + \sin\varphi|-,+,+\rangle, \tag{3}$$

где θ и φ — параметры, определяющие степень начального перепутывания кубитов. Начальные состояния кубитов вида (2) и (3) в резонаторах можно получить с помощью импульсов электромагнитного поля определенной длительностью.

В качестве начального состояния поля выберем одномодовое тепловое состояние с матрицей плотности вида

$$\varrho_F\,(0) = \sum_n p_n\,|n\rangle\,\langle n|\,. \tag{4}$$

Здесь весовые функции p_n в формуле (4) имеют вид

$$p_n = \frac{\overline{n}^n}{(1+\overline{n})^{n+1}},$$

где $\overline{n}$ — среднее число тепловых фотонов, определяемое формулой Бозе–Эйнштейна

$$\overline{n} = \left(\exp\left[\hbar\omega/k_BT\right]-1\right)^{-1},$$

здесь k_B — постоянная Больцмана и T — температура микроволнового резонатора.

Поставим перед собой задачу найти динамику рассматриваемой модели для начального состояния кубитов (2) и (3) и теплового поля резонатора (4). В качестве первого шага для решения поставленной задачи рассмотрим решение уравнения эволюции в случае фоковского начального состояния электромагнитного поля резонатора, а затем обобщим полученные результаты для теплового состояния поля резонатора (4).

В случае чистого фоковского состояния начальную волновую функцию поля резонатора выберем в виде

$$|\phi(0)\rangle_{F,n} = |n\rangle \;\; (n=0,1,2,\ldots). \tag{5}$$

Найдем вначале временную волновую функцию системы для фоковского начального состояния поля (5), а потом обобщим результаты на случай теплового поля резонатора. Введем для нашей системы число возбуждений N, равное $N = q + n$, где q — число кубитов, приготовленных в возбужденном состоянии. Для чисел возбуждения $N \geqslant 3$ оператор эволюции рассматриваемой системы имеет вид

$$S(n,t) = \begin{pmatrix} S_{11}(n,t) & \cdots & S_{18}(n,t) \\ \vdots & & \vdots \\ S_{81}(n,t) & \cdots & S_{88}(n,t) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где

$$S_{11}(n,t) = \frac{(7+2n+\Omega_n)\cos(\theta_1\gamma t) + (-7-2n+\Omega_n)\cos(\theta_2\gamma t)}{2\Omega_n},$$

$$S_{22}(n,t) = \frac{4\Omega_n\cos(\sqrt{2+n}\gamma t) + (-1-2n+\Omega_n)\cos(\theta_1\gamma t) + (1+2n+\Omega_n)\cos(\theta_2\gamma t)}{6\Omega_n},$$

$$S_{12}(n,t) = -\mathrm{i}\frac{(7+2n+\Omega_n)\theta_1\sin(\theta_1\gamma t) + (-7-2n+\Omega_n)\theta_2\sin(\theta_2\gamma t)}{6\sqrt{1+n}\Omega_n},$$

$$S_{15}(n,t) = \frac{\sqrt{(1+n)(2+n)}(-\cos(\theta_1\gamma t)+\cos(\theta_2\gamma t))}{\Omega},$$

$$S_{25}(n,t) = -\mathrm{i}\frac{\sqrt{2+n}\Omega_n\sin(\sqrt{2+n}\gamma t) - (2+n)\theta_1\sin(\theta_1\gamma t) + (2+n)\theta_2\sin(\theta_2\gamma t)}{3\sqrt{2+n}\Omega_n},$$

$$S_{58}(n,t) = -\mathrm{i}\frac{(1+2n+\Omega_n)\theta_1\sin(\theta_1\gamma t) + (-1-2n+\Omega_n)\theta_2\sin(\theta_2\gamma t)}{6\sqrt{3+n}\Omega_n},$$

$$S_{18}(n,t) = -\mathrm{i}\frac{\sqrt{2+n}(\sin(\theta_2\gamma t)\theta_1 - \sin(\theta_1\gamma t)\theta_2)}{\Omega_n},$$

$$S_{55}(n,t) = S_{22}(n,t) - \frac{1}{\Omega_n}(\cos(\theta_1\gamma t)-\cos(\theta_2\gamma t)), S_{23}(n,t) = S_{22}(n,t) - \cos(\sqrt{2+n}\gamma t),$$

$$S_{88}(n,t) = S_{11}(n,t) - \frac{3}{\Omega}(\cos(\theta_1\gamma t)-\cos(\theta_2\gamma t)), S_{56}(n,t) = S_{55}(n,t) - \cos(\sqrt{2+n}\gamma t),$$

$$S_{27}(n,t) = S_{25}(n,t) + \mathrm{i}\sin(\sqrt{2+n}\gamma t), S_{28}(n,t) = \sqrt{\frac{n+3}{n+1}}S_{15}(n,t),$$

$$S_{22} = S_{33} = S_{44}, S_{55} = S_{66} = S_{77}, S_{12} = S_{13} = S_{14} = S_{21} = S_{31} = S_{41},$$
$$S_{15} = S_{16} = S_{17} = S_{51} = S_{61} = S_{71}, S_{23} = S_{24} = S_{32} = S_{34} = S_{42} = S_{43},$$
$$S_{27} = S_{36} = S_{45} = S_{54} = S_{63} = S_{72}, S_{56} = S_{57} = S_{65} = S_{67} = S_{75} = S_{76},$$
$$S_{25} = S_{26} = S_{35} = S_{37} = S_{46} = S_{47} = S_{52} = S_{53} = S_{62} = S_{64} = S_{73} = S_{74},$$
$$S_{28} = S_{38} = S_{48} = S_{82} = S_{83} = S_{84}, S_{58} = S_{68} = S_{78} = S_{85} = S_{86} = S_{87}, S_{18} = S_{81},$$

где
$$\Omega_n = \sqrt{9 + 16(n+2)^2},\ \theta_1 = \sqrt{5(n+2) - \Omega_n},\ \theta_2 = \sqrt{5(n+2) + \Omega_n}.$$

При записи оператора эволюции в матричной форме мы использовали базисные векторы вида
$$|+,+,+,n\rangle,\ |+,+,-,n+1\rangle,\ |+,-,+,n+1\rangle,\ |-,+,+,n+1\rangle,$$
$$|+,-,-,n+2\rangle,\ |-,+,-,n+2\rangle,\ |-,-,+n+2\rangle,\ |-,-,-,n+3\rangle.$$

В рассматриваемом случае волновую функцию можно найти как
$$|\Psi_{Q_1\,Q_2\,Q_3\,F}(t)\rangle_n = S(n,t)|\Psi(t)\rangle_{Q_1\,Q_2\,Q_3}|n\rangle. \tag{7}$$

В дальнейшем при обобщении результатов на случай теплового поля резонатора нам потребуются также волновые функции, соответствующие числам возбуждения $N = 2, 1, 0$. Для $N = 2$ базис гильбертова пространства должен быть сужен до набора
$$|+,+,-,0\rangle,\ |+,-,+,0\rangle,\ |-,+,+,0\rangle,$$
$$|+,-,-,1\rangle,\ |-,+,-,1\rangle,\ |-,-,+,1\rangle,\ |-,-,-,2\rangle.$$

Соответствующая временная волновая функция есть
$$|\Psi_1(t)\rangle = Z_1(t)|+,+,-,0\rangle + Z_2(t)|+,-,+,0\rangle + Z_3(t)|-,+,+,0\rangle +$$
$$+Z_4(t)|+,-,-,1\rangle +\ + Z_5(t)|-,+,-,1\rangle + Z_6(t)|-,-,+,1\rangle + Z_7(t)|-,-,-,2\rangle, \tag{8}$$

где коэффициенты $Z_i(t)$ $(i = 1,2,3,4,5,6,7)$ есть
$$Z_1(t) = \frac{1}{15}\Big[3\left(C_1 + C_2 + C_3 - \sqrt{2}C_7\right) + 5\left(2C_1 - C_2 - C_3\right)\cos\gamma t + \left(2C_1 + 2C_2 + 2C_3 + 3\sqrt{2}C_7\right)\cos\sqrt{10}\gamma t -$$
$$-i\left(5(C_4 + C_5 - 2C_6)\sin\gamma t + \sqrt{10}(C_4 + C_5 + C_6)\sin\sqrt{10}\gamma t\right)\Big],$$

$$Z_2(t) = \frac{1}{15}\Big[3\left(C_1 + C_2 + C_3 - \sqrt{2}C_7\right) - 5(C_1 - 2C_2 + C_3)\cos\gamma t + (2C_1 + 2C_2 + 2C_3 + 3\sqrt{2}C_7)\cos\sqrt{10}\gamma t -$$
$$-i\left(5(C_4 - 2C_5 + C_6)\sin\gamma t + \sqrt{10}(C_4 + C_5 + C_6)\sin\sqrt{10}\gamma t\right)\Big],$$

$$Z_3(t) = \frac{1}{15}\Big[3\left(C_1 + C_2 + C_3 - \sqrt{2}C_7\right) - 5(C_1 + C_2 - 2C_3)\cos\gamma t + (2C_1 + 2C_2 + 2C_3 + 3\sqrt{2}C_7)\cos\sqrt{10}\gamma t +$$
$$+5i\left(2C_4 - C_5 - C_6\right)\sin\gamma t - i\sqrt{10}\left(C_4 + C_5 + C_6\right)\sin\sqrt{10}\gamma t\Big],$$

$$Z_4(t) = \frac{1}{15}\Big[5\left(2C_4 - C_5 - C_6\right)\cos\gamma t + 5(C_4 + C_5 + C_6)\cos\sqrt{10}\gamma t - i\Big(5(C_1 + C_2 - 2C_3)\sin\gamma t +$$
$$+\sqrt{5}(\sqrt{2}C_1 + \sqrt{2}C_2 + \sqrt{2}C_3 + 3C_7)\sin\sqrt{10}\gamma t\Big)\Big],$$

$$Z_5(t) = \frac{1}{15}\Big[-5(C_4 - 2C_5 + C_6)\cos\gamma t + 5(C_4 + C_5 + C_6)\cos\sqrt{10}\gamma t - i\Big(5(C_1 - 2C_2 + C_3)\sin\gamma t +$$
$$+\sqrt{5}(\sqrt{2}C_1 + \sqrt{2}C_2 + \sqrt{2}C_3 + 3C_7)\sin\sqrt{10}\gamma t\Big)\Big],$$

$$Z_6(t) = \frac{1}{15}\Big[-5(C_4 + C_5 - 2C_6)\cos\gamma t + 5(C_4 + C_5 + C_6)\cos\sqrt{10}\gamma t + 5i(2C_1 - C_2 - C_3)\sin\gamma t -$$
$$-i\sqrt{5}\Big(\sqrt{2}C_1 + \sqrt{2}C_2 + \sqrt{2}C_3 + 3C_7\Big)\sin\sqrt{10}\gamma t\Big],$$

$$Z_7(t) = \frac{1}{5}\Big[\sqrt{2}C_1 - \sqrt{2}C_2 - \sqrt{2}C_3 + 2C_7 + \Big(\sqrt{2}C_1 + \sqrt{2}C_2 + \sqrt{2}C_3 +$$
$$+3C_7\Big)\cos\sqrt{10}\gamma t - i\sqrt{5}(C_4 + C_5 + C_6)\sin\sqrt{10}\gamma t\Big].$$

Здесь использовано обозначение $C_i = Z_i(0)$.

Для $N = 1$ выбираем базис гильбертова пространства в виде

$$|+,-,-,0\rangle,\ |-,+,-,0\rangle,\ |-,-,+,0\rangle,\ |-,-,-,1\rangle.$$

Соответствующая временная волновая функция есть

$$|\Psi_2(t)\rangle = Y_1(t)|+,-,-,0\rangle + Y_2(t)|-,+,-,0\rangle + Y_3(t)|-,-,+,0\rangle + Y_4(t)|-,-,-,1\rangle, \tag{9}$$

где коэффициенты $Y_i(t)$ $(i = 1,2,3,4)$ имеют вид

$$Y_1(t) = \frac{1}{3}\Big[2F_1 - F_2 - F_3 + (F_1 + F_2 + F_3)\cos\sqrt{3}\gamma t - i\sqrt{3}F_4 \sin\sqrt{3}\gamma t\Big],$$

$$Y_2(t) = \frac{1}{3}\Big[-F_1 + 2F_2 - F_3 + (F_1 + F_2 + F_3)\cos\sqrt{3}\gamma t - i\sqrt{3}F_4 \sin\sqrt{3}\gamma t\Big],$$

$$Y_3(t) = \frac{1}{3}\Big[-F_1 - F_2 + 2F_3 + (F_1 + F_2 + F_3)\cos\sqrt{3}\gamma t - i\sqrt{3}F_4 \sin\sqrt{3}\gamma t\Big],$$

$$Y_4(t) = F_4\cos\sqrt{3}\gamma t - \frac{i(F_1 + F_2 + F3)\sin\sqrt{3}\gamma t}{\sqrt{3}}.$$

Здесь использованы обозначения $F_i = Y_i(0)$ $(i = 1,2,3,4)$.

Наконец, для $N = 0$ базис гильбертова пространства состовляет вектор $|-,-,-,0\rangle$. Соответствующая временная волновая функция есть

$$|\psi_3(t)\rangle = |-,-,-,0\rangle. \tag{10}$$

2. Расчет степени совпадения состояний кубитов

Имея явный вид для временных волновых функций системы (7)–(10), мы можем вычислить временную матрицу плотности полной системы (три кубита+мода поля) в случае теплового состояния поля

$$\rho_{Q_1\,Q_2\,Q_3\,F}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n |\Psi(t)\rangle_{n\ n}\langle\Psi(t)|. \tag{11}$$

Для вычисления параметра перепутывания кубитов нам потребуется редуцированная матрица плотности трех кубитов. Ее мы можем вычислить, усредняя выражение (11) по переменным поля

$$\rho_{Q_1\,Q_2\,Q_3}(t) = Sp_F\,\rho_{Q_1\,Q_2\,Q_3 F}(t). \tag{12}$$

При исследовании перепутывания кубитов в рассматриваемой модели для сепарабельных, бисепарабельных и истинно перепутанных состояний W-типа в качестве количественного критерия перепутывания мы использовали отрицательности пар кубитов. В случае GHZ-состояний такой критерий малоинформативен, поскольку при усреднении трехкубитной матрицы плотности $\rho_{Q_1\,Q_2\,Q_3}(t)$ по переменным одного из кубитов два оставшихся кубита оказываются неперепутанными. Поэтому в настоящей работе мы в качестве количественного критерия перепутывания кубитов используем степень совпадения (fidelity) текущего состояния кубитов в момент времени t и их начального GHZ-состояния. В случае теплового поля резонатора состояние кубитов в произвольный момент времени является смешанным. Количественная мера степени совпадения для смешанных состояний кубитов предложена в работе [40]

$$F(\rho,\rho^{'}) = \left(tr\sqrt{\rho^{\frac{1}{2}}\rho^{'}\rho^{\frac{1}{2}}}\right)^2. \tag{13}$$

В формуле (13) ρ – начальная матрица плотности системы и $\rho^{'}$ – матрица плотности кубитов в момент времени $t > 0$. Выражение (13) достаточно сложное, однако, если одна из матриц, допустим ρ, описывает чистое состояние ($\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$), то формула сильно упрощается:

$$F(\rho,\rho^{'}) = \left(tr\sqrt{|\psi\rangle\langle\psi|\rho^{'}|\psi\rangle\langle\psi|}\right)^2 = \langle\psi|\rho^{'}|\psi\rangle = tr(\rho\rho^{'}). \tag{14}$$

Выбранные начальные состояния кубитов (2) и (3) являются чистыми с матрицами плотности вида $|\Psi(0)\rangle_{Q_1Q_2Q_3}\ \ {}_{Q_1Q_2Q_3}\langle\Psi(0)|$.

Рассчитаем параметр степени совпадения для начального GHZ-состояния кубитов вида (2). В трехкубитном базисе

$$|+,+,+\rangle,\ |+,+,-\rangle,\ |+,-,+\rangle,\ |-,+,+\rangle,$$

$$|+,-,-\rangle,\ |-,+,-\rangle,\ |-,-,+\rangle,\ |-,-,-\rangle$$

матрица плотности кубитов для начального состояния вида (2) есть

$$M_{Q_1Q_2Q_3}(0) = |\Psi(0)\rangle_{Q_1Q_2Q_3} \quad {}_{Q_1Q_2Q_3}\langle\Psi(0)| = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 & \cdots & 0 & M_{18} \\ 0 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 0 \\ M_{81} & 0 & \cdots & 0 & M_{88} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где элементы матрицы плотности задаются формулами:

$$M_{11} = \langle +,+,+|M_{Q_1Q_2Q_3}(0)|+,+,+\rangle = cos^2\theta,\ \ M_{88} = \langle -,-,-|M_{Q_1Q_2Q_3}(0)|-,-,-\rangle = sin^2\theta,$$
$$M_{18} = \langle +,+,+|M_{Q_1Q_2Q_3}(0)|-,-,-\rangle = cos\theta sin\theta,\ \ M_{81} = \langle -,-,-|M_{Q_1Q_2Q_3}(0)|+,+,+\rangle = cos\theta sin\theta.$$

Запишем матрицу конечного смешанного состояния $\rho^{'} = \rho_{Q_1Q_2Q_3}(t)$ в произвольный момент времени t для состояния (3):

$$\rho_{Q_1Q_2Q_3}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n|\Psi(t) >_{n\ n}< \Psi(t)| = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{18} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{55} & \rho_{56} & \rho_{57} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{65} & \rho_{66} & \rho_{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{75} & \rho_{76} & \rho_{77} & 0 \\ \rho_{81} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{88} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Тогда, подставляя матрицы (15) и (16) в формулу (14), получаем для степени совпадения следующее выражение:

$$F = cos^2\theta\rho_{11} + cos\theta sin\theta\,(\rho_{18} + \rho_{81}) + sin^2\theta\rho_{88}, \tag{17}$$

где

$$\rho_{11} = \langle +,+,+|\rho_{Q_1Q_2Q_3}(t)|+,+,+\rangle = \sum_{n=3}^{\infty} p_n\left[cos^2\theta|S_{11}(n,t)|^2 + sin^2\theta|S_{18}(n-3,t)|^2\right] +$$
$$+p_2cos^2\theta|S_{11}(2,t)|^2 + p_1cos^2\theta|S_{11}(1,t)|^2 + p_0cos^2\theta|S_{11}(0,t)|^2,$$
$$\rho_{88} = \langle -,-,-|\rho_{Q_1Q_2Q_3}(t)|-,-,-\rangle = \sum_{n=3}^{\infty} p_n\left[cos^2\theta|S_{81}(n,t)|^2 + sin^2\theta|S_{88}(n-3,t)|^2\right] +$$
$$+p_2\left(cos^2\theta|S_{81}(2,t)|^2 + |x_7(t)|^2\right) + p_1(cos^2\theta|S_{81}(1,t)|^2 + |y_4(t)|^2) + p_0\left(cos^2\theta|S_{81}(0,t)|^2 + sin^2\theta\right),$$
$$\rho_{18} = \langle +,+,+|\rho_{Q_1Q_2Q_3}(t)|-,-,-\rangle = \sum_{n=3}^{\infty} p_n\left[cos\theta sin\theta S_{11}(n,t)S^*_{88}(n-3,t)\right] +$$
$$+p_2cos\theta S_{11}(2,t)x^*_7(t) + p_1cos\theta S_{11}(1,t)y^*_4(t) + p_0cos\theta sin\theta S_{11}(0,t),\ \ \rho_{81} = \rho^*_{18}.$$

Трехкубитная матрица плотности в начальный момент времени для начального состояния (3) выражается формулой:

$$M_{Q_1Q_2Q_3}(0) = |\Psi(0)\rangle_{Q_1Q_2Q_3} \quad {}_{Q_1Q_2Q_3}\langle\Psi(0)| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{44} & M_{45} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{54} & M_{55} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

где элементы матрицы плотности задаются формулами:

$$M_{44} = \langle -,+,+|M_{Q_1Q_2Q_3}(0)|-,+,+\rangle = \sin^2\varphi,\ \ M_{55} = \langle +,-,-|M_{Q_1Q_2Q_3}(0)|+,-,-\rangle = \cos^2\varphi,$$
$$M_{54} = \langle +,-,-|M_{Q_1Q_2Q_3}(0)|-,+,+\rangle = \cos\varphi\sin\varphi,\ \ M_{45} = \langle -,+,+|M_{Q_1Q_2Q_3}(0)|+,-,-\rangle = \sin\varphi\cos\varphi.$$

Запишем матрицу конечного смешанного состояния $\rho_{Q_1Q_2Q_3}(t)$ в произвольный момент времени t для начального состояния (3):

$$\rho_{Q_1Q_2Q_3}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n|\Psi(t)>_{n\ n}<\Psi(t)|=\begin{pmatrix}\rho_{11}&\rho_{12}&\rho_{13}&\rho_{14}&0&0&0&0\\ \rho_{21}&\rho_{22}&\rho_{23}&\rho_{24}&\rho_{25}&\rho_{26}&\rho_{27}&0\\ \rho_{31}&\rho_{32}&\rho_{33}&\rho_{34}&\rho_{35}&\rho_{36}&\rho_{37}&0\\ \rho_{41}&\rho_{42}&\rho_{43}&\rho_{44}&\rho_{45}&\rho_{46}&\rho_{47}&0\\ 0&\rho_{52}&\rho_{53}&\rho_{54}&\rho_{55}&\rho_{56}&\rho_{57}&\rho_{58}\\ 0&\rho_{62}&\rho_{63}&\rho_{64}&\rho_{65}&\rho_{66}&\rho_{67}&\rho_{68}\\ 0&\rho_{72}&\rho_{73}&\rho_{74}&\rho_{75}&\rho_{76}&\rho_{77}&\rho_{78}\\ 0&0&0&0&\rho_{85}&\rho_{86}&\rho_{87}&\rho_{88}\end{pmatrix}. \quad (19)$$

Теперь, подставляя матрицы (18) и (19) в формулу (14), получаем для степени совпадения:

$$F=\sin^2\varphi\rho_{44}+\cos\varphi\sin\varphi\cdot(\rho_{45}+\rho_{54})+\cos^2\varphi\rho_{55}, \quad (20)$$

где элементы матрицы плотности задаются выражениями:

$$\rho_{44}=\langle -,+,+|\rho_{Q_1Q_2Q_3}(t)|-,+,+\rangle=\sum_{n=2}^{\infty}p_n\left[\cos^2\varphi|S_{45}(n-2,t)|^2+\sin^2\varphi|S_{44}(n-1,t)|^2\right]+$$
$$+p_1\cdot\left[|Z_3(t)|^2+\sin^2\varphi|S_{44}(0,t)|^2\right]+p_0|x_3(t)|^2,$$
$$\rho_{55}=\langle +,-,-|\rho_{Q_1Q_2Q_3}(t)|+,-,-\rangle=\sum_{n=2}^{\infty}p_n\left[\cos^2\varphi|S_{55}(n-2,t)|^2+\sin^2\varphi|S_{54}(n-1,t)|^2\right]+$$
$$+p_1\cdot\left[|Z_4(t)|^2+\sin^2\varphi|S_{54}(0,t)|^2\right]+p_0\left[|x_4(t)|^2+|y_1(t)|^2\right],$$
$$\rho_{45}=\langle -,+,+|\rho_{Q_1Q_2Q_{3(t)}}|+,-,-\rangle=\sum_{n=2}^{\infty}p_n\left[\sin\varphi\cos\varphi S_{44}(n-1,t)S^*_{55}(n-2,t)\right]+$$
$$+p_1\sin\varphi S_{44}(0,t)Z_4^*(t)+p_0x_3(t)y_1^*(t),\quad \rho_{54}=\rho^*_{45}.$$

Сравним поведение степени совпадения для трехкубитных *GHZ* и *GHZ*-подобных состояний с поведением аналогичной величины для двухкубитного состояния вида

$$|\Psi(0)\rangle_{Q_1Q_2}=\cos\phi|+,+\rangle+\sin\phi|-,-\rangle. \quad (21)$$

Двукубитная система с начальным состоянием кубитов (21) и полем в фоковском состоянии (5) эволюцинирует следующим образом:

а) для случая начального числа фотонов в моде $n=0$:

$$|\psi_{n=0}(t)\rangle=x_1(t)|+,+,0\rangle+x_2(t)|+,-,1\rangle+x_3(t)|-,+,1\rangle+x_4(t)|-,-,2\rangle+sin\phi|-,-,0\rangle,$$

б) для случая начального числа фотонов в моде $n=1$:

$$|\psi_{n=1}(t)\rangle=y_1(t)|+,+,1\rangle+y_2(t)|+,-,2\rangle+y_3|-,+,2\rangle+y_4(t)|-,-,3\rangle+Z_1(t)|+,-,0\rangle+Z_2(t)|-,+,0\rangle+$$
$$+Z_3(t)|-,-,1\rangle,$$

в) для случая начального числа фотонов в моде $n\geqslant 2$:

$$|\psi_{n\geqslant 2}(t)\rangle=c_1(t)|+,+,n\rangle+c_2(t)|+,-,n+1\rangle+c_3(t)|-,+,n+1\rangle+c_4(t)|-,-,n+2\rangle+k_1(t)|+,+,n-2\rangle+$$
$$+k_2(t)|+,-,n-1\rangle+k_3(t)|-,+,n-1\rangle+k_4(t)|-,-,n\rangle.$$

Временные коэффициенты находятся из следующих систем дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} i\dot Z_1(t)=gZ_3(t)\\ i\dot Z_2(t)=gZ_3(t)\\ i\dot Z_3(t)=g\left(Z_1(t)+Z_2(t)\right)\end{cases},\quad \begin{cases} i\dot k_1(t)=g\sqrt{n-1}(k_2(t)+k_3(t))\\ i\dot k_2(t)=g\left(\sqrt{n-1}k_1(t)+\sqrt{n}k_4(t)\right)\\ i\dot k_3(t)=g\left(\sqrt{n-1}k_1(t)+\sqrt{n}k_4(t)\right)\\ i\dot k_4(t)=g\sqrt{n}\left(k_2(t)+k_3(t)\right)\end{cases}, \quad (22)$$

$$\begin{cases} i\dot c_1(t)=g\sqrt{n+1}(c_2(t)+c_3(t))\\ i\dot c_2(t)=g\left(\sqrt{n+1}c_1(t)+\sqrt{n+2}c_4(t)\right)\\ i\dot c_3(t)=g\left(\sqrt{n+1}c_1(t)+\sqrt{n+2}c_4(t)\right)\\ i\dot c_4(t)=g\sqrt{n+2}\left(c_2(t)+c_3(t)\right)\end{cases}. \quad (23)$$

Решая системы дифференциальных уравнений (21) со следующими начальными условиями: $k_1(0)=$ $=k_2(0)=k_3(0)=0, k_4(0)=\sin\phi$ и $Z_1(0)=Z_2(0)=0, Z_3(0)=\sin\phi$, находим аналитические выражения для временных коэффициентов $k_i(t)$, $Z_i(t)$:

$$Z_1(t) = -\frac{i\cdot\sin(\sqrt{2}\gamma t)\cdot\sin\phi}{\sqrt{2}},\ \ Z_2(t) = -\frac{i\cdot sin(\sqrt{2}\gamma t)\cdot\sin\phi}{\sqrt{2}},\ \ Z_3(t) = \cos(\sqrt{2}\gamma t)\cdot\sin\phi,$$

$$k_1(t) = -\frac{2\cdot\sqrt{n-1}\cdot\sqrt{n}\cdot sin^2\left(\sqrt{n-\frac{1}{2}}\cdot\gamma t\right)\cdot\sin\phi}{2n-1},\ \ k_2(t) = -\frac{i\cdot\sqrt{n}\cdot\sin(\sqrt{4n-2}\cdot\gamma t)\cdot\sin\phi}{\sqrt{4n-2}},$$

$$k_3(t) = -\frac{i\cdot\sqrt{n}\cdot\sin(\sqrt{4n-2}\cdot\gamma t)\cdot\sin\phi}{\sqrt{4n-2}},\ \ k_4(t) = \frac{\left(n-1+n\cdot cos(\sqrt{4n-2}\cdot\gamma t)\right)\sin\phi}{2n-1}.$$

Для того чтобы найти временные коэффициенты $y_i(t), x_i(t)$, нужно учесть следующее: $c_i(t)\to y_i(t)$ при числе фотонов в моде $n=1$ и $c_i(t)\to x_i(t)$ при числе фотонов в моде $n=0$.

Для системы дифференциальных уравнений (23) используем следующие начальные условия: $c_1(0) = \cos\phi, c_2(0) = c_3(0) = c_4(0)$. В итоге получаем следующие аналитические формулы для $c_i(t)$:

$$c_1(t) = \frac{\left(n+2+(n+1)\cdot\cos(\sqrt{4n+6}\cdot\gamma t)\cdot\right)\cos\phi}{2n+3},\ \ c_2(t) = -\frac{i\cdot\sqrt{n+1}\cdot\cos\phi\cdot\sin(\sqrt{4n+6}\cdot\gamma t)}{\sqrt{4n+6}},$$

$$c_3(t) = -\frac{i\cdot\sqrt{n+1}\cdot\cos\phi\cdot\sin(\sqrt{4n+6}\cdot\gamma t)}{\sqrt{4n+6}},\ \ c_4(t) = -\frac{2\cdot\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+2}\cdot\cos\phi\cdot\sin^2\left(\sqrt{n+\frac{3}{2}}\cdot\gamma t\right)}{2n+3}.$$

Двухкубитная матрица плотности в начальный момент времени для начального состояния (21) выражается формулой:

$$M_{Q_1Q_2}(0) = |\Psi(0)\rangle_{Q_1Q_2}\quad {}_{Q_1Q_2}\langle\Psi(0)| = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 & 0 & M_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{41} & 0 & 0 & M_{44} \end{pmatrix}, \tag{24}$$

где элементы матрицы плотности задаются формулами

$$M_{11} = \langle +,+|M_{Q_1Q_2}(0)|+,+\rangle = cos^2\phi,\ \ M_{44} = \langle -,-|M_{Q_1Q_2}(0)|-,-\rangle = sin^2\phi,$$
$$M_{14} = \langle +,+|M_{Q_1Q_2}(0)|-,-\rangle = cos\phi sin\phi,\ \ M_{41} = \langle -,-|M_{Q_1Q_2}(0)|+,+\rangle = sin\phi cos\phi.$$

Запишем матрицу конечного смешанного состояния $\rho_{Q_1Q_2}(t)$ в произвольный момент времени t для начального состояния (21):

$$\rho_{Q_1Q_2}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n|\psi_n(t)\rangle\langle\psi_n(t)| = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{41} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Теперь подставим матрицы (24) и (25) в формулу (14) и получим для степени совпадения следующую формулу:

$$F = \rho_{11}cos^2\phi + (\rho_{14}+\rho_{41})cos\phi sin\phi + \rho_{44}sin^2\phi, \tag{26}$$

где элементы матрицы плотности имеют следующий вид:

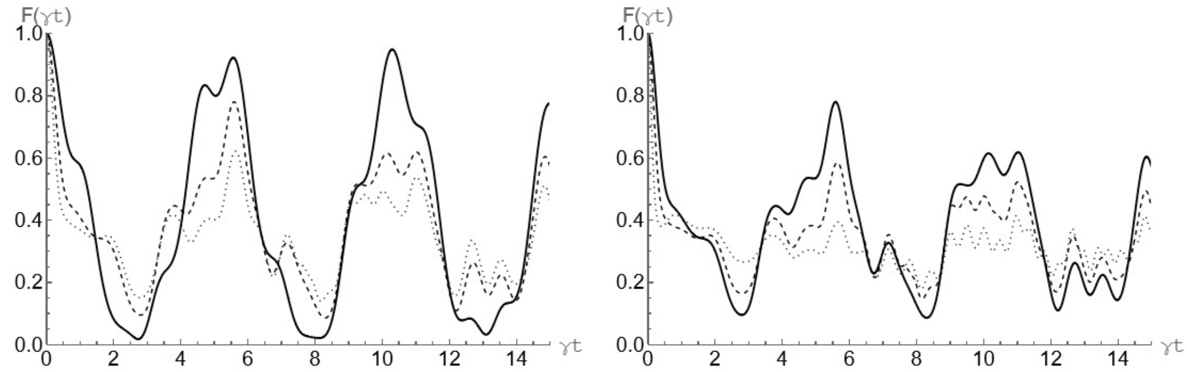
$$\rho_{11} = \langle +,+|\rho_{Q_1Q_2}(t)|+,+\rangle = \sum_{n=2}^{\infty} p_n\left[|c_1(t)|^2 + |k_1(t)|^2\right] + p_1|y_1(t)|^2 + p_0|x_1(t)|^2,$$

$$\rho_{44} = \langle -,-|\rho_{Q_1Q_2(t)}|-,-\rangle = \sum_{n=2}^{\infty} p_n\left[|c_4(t)|^2 + |k_4(t)|^2\right] + p_1\left[|y_4(t)|^2 + |Z_3(t)|^2\right] + p_0\left[|x_4(t)|^2 + sin^2\phi\right],$$

$$\rho_{14} = \langle +,+|\rho_{Q_1Q_2}(t)|-,-\rangle = \sum_{n=2}^{\infty} p_n c_1(t)k_4^*(t) + p_1y_1(t)Z_3^*(t) + p_0x_1(t)sin\phi,\qquad \rho_{41} = \rho_{14}^*.$$

3. Результаты и их обсуждение

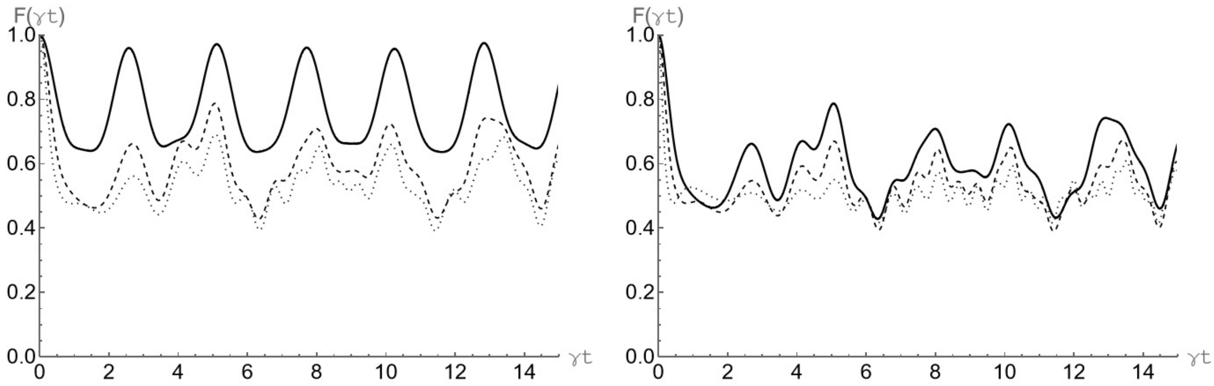
Результаты компьютерного моделирования временной зависимости степени совпадения $F(t)$ от приведенного времени γt для начального истинно перепутанного GHZ-состояния (2) в случае $\theta = \pi/4$ и различных значений среднего числа фотонов представлены на рис. 1. Из рисунка хорошо видно, что взаимодействие кубитов с тепловым полем резонатора приводит к осцилляциям Раби параметра перепутывания кубитов. При этом увеличение среднего числа фотонов в моде приводит к уменьшению максимальной степени перепутывания. Это означает, что при увеличении интенсивности шума состояние трех



a *b*

Рис. 1. График зависимости параметра степени совпадения $F(\gamma t)$ от приведенного времени γt для начального *GHZ*-состояния вида (2) с $\theta = \pi/4$ для различных средних чисел тепловых фотонов $\bar{n}$: $\bar{n} = 0.05$ (сплошная линия), $\bar{n} = 1$ (пунктирная линия), $\bar{n} = 2.5$ (точечная линия) (*a*); $\bar{n} = 1$ (сплошная линия), $\bar{n} = 3$ (пунктирная линия), $\bar{n} = 10$ (точечная линия) (*b*)

Fig. 1. Graph of the dependence of the fidelity $F(\gamma t)$ on the reduced time γt for the initial *GHZ* state of the form (2) with $\theta = \pi/4$ for various average numbers of thermal photons $\bar{n}$: $\bar{n} = 0.05$ (solid line), $\bar{n} = 1$ (dashed line), $\bar{n} = 2.5$ (dotted line) (*a*); $\bar{n} = 1$ (solid line), $\bar{n} = 3$ (dashed line), $\bar{n} = 10$ (dotted line) (*b*)



a *b*

Рис. 2. График зависимости параметра степени совпадения $F(\gamma t)$ от приведенного времени γt для начального двухкубитного состояния вида (21) с $\phi = \pi/4$ для различных средних чисел тепловых фотонов $\bar{n}$: $\bar{n} = 0.05$ (сплошная линия), $\bar{n} = 1$ (пунктирная линия), $\bar{n} = 2.5$ (точечная линия) (*a*); $\bar{n} = 1$ (сплошная линия), $\bar{n} = 3$ (пунктирная линия), $\bar{n} = 10$ (точечная линия) (*b*)

Fig. 2. Graph of the dependence of the fidelity $F(\gamma t)$ on the reduced time γt for the initial two-qubit state of the form (21) with $\phi = \pi/4$ for various average numbers of thermal photons $\bar{n}$: $\bar{n} = 0.05$ (solid line), $\bar{n} = 1$ (dotted line), $\bar{n} = 2.5$ (dotted line) (*a*); $\bar{n} = 1$ (solid line), $\bar{n} = 3$ (dotted line), $\bar{n} = 10$ (dotted line) (*b*)

кубитов все менее походит на начальное перепутанное *GHZ*-состояние и все ближе к сепарабельному состоянию. Для сравнения на рис. 2 показаны аналогичные зависимости степени совпадения $F(t)$ для двухкубитной модели с начальным состоянием (20) в случае $\phi = \pi/4$. Сравнение графиков показывает, что в случае двухкубитной системы тепловой шум приводит к существенно меньшему разрушению начального максимально перепутанного состояния, нежели в случае трехкубитной системы. Это говорит нам о том, что истинно перепутанное *GHZ*-состояние менее устойчиво по отношению к внешнему шуму, чем двухкубитное состояние вида (21). Временная зависимость степени совпадения $F(t)$ от приведенного времени γt для начального GHZ-подобного перепутанного состояния (3) в случае $\varphi = \pi/4$ и различных значений среднего числа фотонов представлена на рис. 3. Из рисунка видно, что, как и для двух предыдущих состояний, взаимодействие кубитов с тепловым полем резонатора приводит к осцилляциям Раби параметра перепутывания кубитов. Однако в отличие от начального истинно перепутанного *GHZ*-состояния в рассматриваемом случае увеличение среднего числа тепловых фотонов в моде приводит к более существенному уменьшению максимальной степени перепутывания кубитов. Таким образом, GHZ-подобное перепутанное состояние значительно менее устойчиво по отношению к разрушающему действию теплового шума.

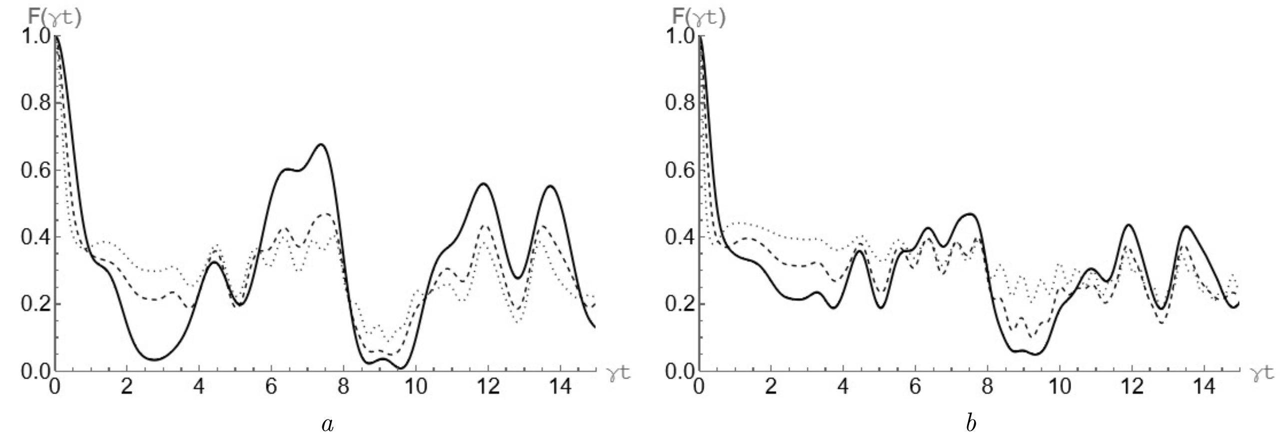


Рис. 3. График зависимости параметра степени совпадения $F(\gamma t)$ от приведенного времени γt для начального GHZ подобного состояния (3) с $\varphi = \pi/4$ для различных средних чисел тепловых фотонов $\bar{n}$: $\bar{n} = 0.05$ (сплошная линия), $\bar{n} = 1$ (пунктирная линия), $\bar{n} = 2.5$ (точечная линия) (a); $\bar{n} = 1$ (сплошная линия), $\bar{n} = 3$ (пунктирная линия), $\bar{n} = 10$ (точечная линия) (b)

Fig. 3. Graph of the dependence of the fidelity $F(\gamma t)$ on the reduced time γt for the initial GHZ like state (3) with $\varphi = \pi/4$ for various average numbers of thermal photons $\bar{n}$: $\bar{n} = 0.05$ (solid line), $\bar{n} = 1$ (dotted line), $\bar{n} = 2.5$ (dotted line) (a); $\bar{n} = 1$ (solid line), $\bar{n} = 3$ (dotted line), $\bar{n} = 10$ (dotted line) (b)

Выводы

Таким образом, в данной статье нами исследована динамика перепутывания в системе, состоящей из трех идентичных кубитов, резонансно взаимодействующих с общей модой теплового поля идеального резонатора. В работе рассмотрены два типа начальных состояний кубитов: истинно перепутанноее состояние GHZ-типа (2) и GHZ-подобное перепутанное состояние (3). Нами найдено точное решение квантового уравнения Лиувилля для начальных состояний кубитов и теплового состояния поля резонатора. На основе точного решения нами рассчитана временная зависимость параметра перепутывания кубитов. В качестве критерия перепутывания кубитов выбран параметр, называемый степенью совпадения. В нашем случае данный параметр определяет степень совпадения трехкубитной матрицы плотности в произвольный момент времени t и начальной трехкубитной матрицы плотности чистых состояний (2) и (3). Для сравнения результатов нами проведен также аналогичный расчет степени совпадения в случае двухкубитной системы с начальным состоянием вида (21) и теплового поля резонатора. Результаты численного моделирования степени совпадения показали, что для всех выбранных начальных состояний кубитов их взаимодействие с тепловым полем резонатора приводит к осцилляциям Раби параметра перепутывания кубитов с уменьшением амплитуд осцилляций в процессе эволюции. При этом увеличение интенсивности поля резонатора приводит к уменьшению максимальной степени перепутывания кубитов. Показано также, что наименее устойчивым по отношению к внешнему шуму является GHZ-подобное трехкубитное состояние (3), а наиболее устойчивым — двухкубитное перепутанное состояние (21).

Литература

[1] Gu X., Kockum A.F., Miranowicz A., Liu Y.X., Nori F. Microwave photonics with superconducting quantum circuits // Physics Reports. 2017. Vols. 718–719. Pp. 1–102. DOI: http://doi.org/10.1016/j.physrep.2017.10.002.

[2] Wendin G. Quantum information processing with super-conducting circuits: a review // Reports on Progress in Physics. 2017. Vol. 80. Number 10. Article Number 106001. DOI: http://doi.org/10.1088/1361-6633/aa7e1a.

[3] Kjaergaard M., Schwartz M.E., Braumüller J., Krantz P., Wang J.-I., Gustavsson S., Oliver W.D. Superconducting Qubits: Current State of Play // Annual Reviews of Condensed Matter Physics. 2020. Vol. 11. Pp. 369–395. DOI: http://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031119-050605.

[4] Huang H.-L., Wu D., Fan D., Zhu X. Superconducting quantum computing: a review // Science China Information Sciences. 2020. Vol. 63. Article number 180501. DOI: http://doi.org/10.1007/S11432-020-2881-9.

[5] Terhal B.M. Quantum error correction for quantum memories // Reviews of Modern Physics. 2015. Vol. 87, Issue 2. Pp. 307–346. DOI: https://doi.org/10.1103/RevModPhys.87.307.

[6] Kimble H.J. The quantum internet // Nature. 2008. Vol. 453. Pp. 1023–1030. DOI: https://doi.org/10.1038/nature07127.

[7] Pezzé L., Smerzi A., Oberthaler M.K., Schmied R., Treutlein P. Quantum metrology with nonclassical states of atomic ensembles // Reviews of Modern Physics. 2018. Vol. 90. Article number 035005. DOI: https://doi.org/10.1103/RevModPhys.90.035005.

[8] Zou Y.-Q. [et al.] Beating the classical precision limit with spin-1 dicke states of more than 10,000 atoms // Proceedings of the National Academy of Sciences. 2018. Vol. 115. Pp. 6381–6385. DOI: http://doi.org/10.1073/pnas.1715105115.

[9] Wang X.-L. [et al.] 18-qubit entanglement with six photons' three degrees of freedom // Physical Review Letters. 2018. Vol. 120, Issue 26. Article number 260502. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.260502.

[10] Zhong H.-S. [et al.] 12-photon entanglement and scalable scattershot boson sampling with optimal entangled-photon pairs from parametric downconversion // Physical Review Letters. 2018. Vol. 121, Issue 25. Article number 250505. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.250505.

[11] Seevinck M., Gühne O. Separability criteria for genuine multiparticle entanglement // New Journal of Physics. 2010. Vol. 12. Article number 053002. DOI: https://doi.org/10.1088/1367-2630/12/5/053002.

[12] Pereira L., Zambrano L., Delgado A. Scalable estimation of pure multi-qubit states // Npj Quantum Information. 2022. Vol. 8. Number 57. Pp. 1–12. DOI: https://doi.org/10.1038/s41534-022-00565-9.

[13] Zhahir A.A., Mohd S.M., Shuhud M.I.M., Idrus B., Zainuddin H., Jan N.M., Wahiddin M. Entanglement Quantification and Classification: A Systematic Literature Review // International Journal of Advanced Computer Science and Applications. 2022. Vol. 13, Issue 5. Pp. 218–225. DOI: https://doi.org/10.14569/ijacsa.2022.0130527.

[14] Dur W., Cirac J.I. Classification of multiqubit mixed states: Separability and distillability properties // Physical Review A: Atomic, molecular, and optical physics. 2000. Vol. 61, Issue 4. Article number 042314. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.61.042314.

[15] Dur W., Cirac J.I., Vidal G. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways // Physical Review A: Atomic, molecular, and optical physics. 2000. Vol. 62, Issue 6. Article number 062314. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.62.062314.

[16] Acin A., Bruβ D., Lewenstein M., Sanpera A. Classification of Mixed Three-Qubit States // Physical Review Letters. 2000. Vol. 87, Issue 4. Article number 040401. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.040401.

[17] Garcia-Alcaine G., Sabin C. A classification of entanglement in three-qubit systems // The European Physical Journal D. 2008. Vol. 48. Article number 040401. Pp. 435–442. DOI: https://doi.org/10.1140/epjd/e2008-00112-5.

[18] Siti Munirah Mohd S.M., Idrus B., Zainuddin H., Mukhtar M. Entanglement Classification for a Three-qubit System using Special Unitary Groups // International Journal of Advanced Computer Science and Applications. 2019. Vol. 10, Issue 7. Pp. 374–379. DOI: https://doi.org/10.14569/IJACSA.2019.0100751.

[19] Akbari-Kourbolagh Y. Entanglement criteria for the three-qubit states // International Journal of Quantum Information. 2017. Vol. 15, No. 7. Article number 1750049. DOI: https://doi.org/10.1142/S0219749917500496.

[20] Gong M. [et al.] Genuine 12-qubit entanglement on a superconducting quantum processor // Physical Review Letters. 2019. Vol. 122, Issue 11. Article number 110501. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.110501.

[21] Song C. [et al.] 10-qubit entanglement and parallel logic operations with a superconducting circuit // Physical Review Letters. 2017. Vol. 119, Issue 18. Article number 180511. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.180511.

[22] Wei K.X. [et al.] Verifying multipartite entangled *GHZ* states via multiple quantum coherences // Physical Review A. 2020. Vol. 101, Issue 3. Article number 032343. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.101.032343.

[23] Song C. [et al.] Generation of multicomponent atomic Schrödinger cat states of up to 20 qubits // Science. 2019. Vol. 365, Issue 6453. Pp. 574–577. DOI: https://doi.org/10.1126/science.aay0600.

[24] Leibfried D. [et al.] Toward heisenberg-limited spectroscopy with multiparticle entangled states // Science. 2004. Vol. 304, Issue 5676. Pp. 1476–1478. DOI: https://doi.org/10.1126/science.10975.

[25] Roos C.F. [et al.] Control and measurement of three-qubit entangled states // Science. 2004. Vol. 304, Issue 5676. Pp. 1478–1480. DOI: https://doi.org/10.1126/science.1097522.

[26] Monz T. [et al.] 14-qubit entanglement: creation and coherence // Physical Review Letters. 2011. Vol. 106, Issue 13. Article number 130506. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.130506.

[27] Omran A. [et al.] Generation and manipulation of Schrödinger cat states in Rydberg atom arrays // Science. 2019. Vol. 365, Issue 6453. Pp. 570–574. DOI: https://doi.org/10.1126/science.aax9743.

[28] Lu C.-Y. [et al.] Experimental entanglement of six photons in graph states // Nature Physics. 2007. Vol. 3. Pp. 91–95. DOI: https://doi.org/10.1038/nphys507.

[29] Wang X.-L. [et al.] 18-qubit entanglement with six photons' three degrees of freedom // Physical Review Letters. 2018. Vol. 120, Issue 26. Article number 260502. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.260502.

[30] Zhong H.-S. [et al.] 12-photon entanglement and scalable scattershot boson sampling with optimal entangled-photon pairs from parametric downconversion // Physical Review Letters. 2018. Vol. 121, Issue 25. Article number 250505. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.250505.

[31] Neeley M. Generation of three-qubit entangled states using superconducting phase qubits // Nature. 2010. Vol. 467. Pp. 570–573. DOI: https://doi.org/10.1038/nature09418.

[32] Gong M. [et al.] Genuine 12-qubit entanglement on a superconducting quantum processor // Physical Review Letters. 2019. Vol. 122, Issue 11. Article number 110501. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.110501.

[33] Song C. [et al.] 10-qubit entanglement and parallel logic operations with a superconducting circuit // Physical Review Letters. 2017. Vol. 119, Issue 18. Article number 180511. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.180511.

[34] Li D., Cheng M., Li X., Li S. A relation among tangle, 3-tangle, and von Neumann entropy of entanglement for three qubits // Quantum Information Processing. 2023. Vol. 22. Article number 14. DOI: https://doi.org/10.1007/s11128-022-03759-4.

[35] Yu T., Eberly J. H. Sudden death of entanglement // Science. 2009. Vol. 323, Issue 5914. Pp. 598–601. DOI: https://doi.org/10.1007/s11128-022-03759-410.1126/science.1167343.

[36] Wang F. [et al.] Observation of entanglement sudden death and rebirth by controlling a solid-state spin bath // Physical Review B. 2018. Vol. 98, Issue 6, Article number 064306. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevB.98.064306.

[37] Sun G., Zhou Z., Mao B., Wen X., Wu P., Han S. Entanglement dynamics of a superconducting phase qubit coupled to a two-level system // Physical Review B. 2012. Vol. 86, Issue 6. Article number 064502. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevB.86.064502

[38] Salles A., de Melo F., Almeida M. P., Hor-Meyll M., Walborn S.P., Souto Ribeiro P. H., Davidovich L. Experimental investigation of the dynamics of entanglement: Sudden death, complementarity, and continuous monitoring of the environment // Physical Review A. 2008. Vol. 78, Issue 2. Article number 022322. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.78.022322.

[39] Bagrov A.R., Bashkirov E.K. Sudden death of entanglement in a thermal three-qubut Tavis-Cummings model // Proceedings of the 9th IEEE International Conference on Information Technology and Nanotechnology. 2023. Article number 23240901. DOI: https://doi.org/10.1109/ITNT57377.2023.10139206.

[40] Jozsa R. Fidelity for Mixed Quantum States // Journal of Modern Optics. 1994. Vol. 41, Issue 12. Pp. 2315–2323. DOI: https://doi.org/10.1080/09500349414552171.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-1-82-95

Submited: 25.12.2023
Revised: 01.02.2024
Accepted: 28.02.2024

A.R. Bagrov
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: alexander.bagrov00@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1098-0300
E.K. Bashkirov
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: bashkirov.ek@ssau.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8682-4956

DYNAMICS OF ENTANGLED GREENBERGER — HORNE — ZEILINGER STATES IN THREE QUBITS THERMAL TAVIS — CUMMINGS MODEL

ABSTRACT

In this paper, we investigated the dynamics of systems of two and three identical qubits interacting resonantly with a selected mode of a thermal field of a lossless resonator. We found solutions of the quantum time-dependent Liouville equation for various three- and two-qubit entangled states of qubits. Based on these solutions, we calculated the criterion of the qubit entanglement — fidelity. The results of numerical calculations of the fidelity showed that increasing the average number of photons in a mode leads to a decrease in the maximum degree of entanglement. It is shown that the two-qubit entangled state is more stable with respect to external noise than the three-qubit entangled Greenberger — Horne — Zeilinger states (GHZ). Moreover, a genuine entangled GHZ-state is more stable to noise than a GHZ-like entangled state.

Key words: qubits; three qubits; Greenberger — Horne — Zeilinger states; resonance interaction; cavity; thermal field; entanglement; fidelity.

Citation. Bagrov A.R., Bashkirov E.K. Dynamics of entangled Greenberger — Horne — Zeilinger states in three qubits thermal Tavis — Cummings model. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya* *seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 1, pp. 82–95. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-1-82-95. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

Alexander R. Bagrov — Master's Degree Student of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.
Eugene K. Bashkirov — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

[1] X. Gu X., Kockum A.F., Miranowicz A., Liu Y.X., Nori F. Microwave photonics with superconducting quantum circuits. *Physics Reports*, 2017, vol. 718–719, pp. 1–102. DOI: http://doi.org/10.1016/j.physrep.2017.10.002.

[2] Wendin G. Quantum information processing with super-conducting circuits: a review. *Reports on Progress in Physics*, 2017, vol. 80, number 10, article number 106001. DOI: http://doi.org/10.1088/1361-6633/aa7e1a.

[3] Kjaergaard M., Schwartz M.E., Braumüller J., Krantz P., Wang J.-I., Gustavsson S., Oliver W.D. Superconducting Qubits: Current State of Play. *Annual Reviews of Condensed Matter Physics*, 2020, vol. 11, pp. 369–395. DOI: http://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031119-050605.

[4] Huang H.-L., Wu D., Fan D., Zhu X. Superconducting quantum computing: a review. *Science China Information Sciences*, 2020, vol. 63, article number 180501. DOI: http://doi.org/10.1007/S11432-020-2881-9.

[5] Terhal B.M. Quantum error correction for quantum memories. *Reviews of Modern Physics*, 2015, vol. 87, issue 2, pp. 307–346. DOI: https://doi.org/10.1103/RevModPhys.87.307.

[6] Kimble H.J. The quantum internet. *Nature*, 2008, vol. 453, pp. 1023–1030. DOI: https://doi.org/10.1038/nature07127.

[7] Pezzé L., Smerzi A., Oberthaler M.K., Schmied R., Treutlein P. Quantum metrology with nonclassical states of atomic ensembles. *Reviews of Modern Physics*, 2018, vol. 90, article number 035005. DOI: https://doi.org/10.1103/RevModPhys.90.035005.

[8] Zou Y.-Q. [et al.] Beating the classical precision limit with spin-1 dicke states of more than 10,000 atoms. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2018, vol. 115, pp. 6381–6385. DOI: http:///doi.org/10.1073/pnas.1715105115.

[9] Wang X.-L. [et al.] 18-qubit entanglement with six photons' three degrees of freedom. *Physical Review Letters*, 2018, vol. 120, issue 26, article number 260502. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.260502.

[10] Zhong H.-S. [et al.] 12-photon entanglement and scalable scattershot boson sampling with optimal entangled-photon pairs from parametric downconversion. *Physical Review Letters*, 2018, vol. 121, issue 25, number 250505. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.250505.

[11] Seevinck M., Gühne O. Separability criteria for genuine multiparticle entanglement. *New Journal of Physics*, 2010, vol. 12, article number 053002. DOI: https://doi.org/10.1088/1367-2630/12/5/053002.

[12] Pereira L., Zambrano L., Delgado A. Scalable estimation of pure multi-qubit states. *Npj Quantum Information*, 2022, vol. 8, number 57. pp. 1–12. DOI: https://doi.org/10.1038/s41534-022-00565-9.

[13] Zhahir A.A., Mohd S.M., Shuhud M.I.M., Idrus B., Zainuddin H., Jan N.M., Wahiddin M. Entanglement Quantification and Classification: A Systematic Literature Review. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, 2022, vol. 13, issue 5, pp. 218–225. DOI: https://doi.org/10.14569/ijacsa.2022.0130527.

[14] Dur W., Cirac J.I. Classification of multiqubit mixed states: Separability and distillability properties. *Physical Review A: Atomic, molecular, and optical physics*, 2000, vol. 61, issue 4, article number 042314. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.61.042314.

[15] Dur W., Cirac J.I., Vidal G. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways. *Physical Review A: Atomic, molecular, and optical physics*, 2000, vol. 62, issue 6, Article number 062314. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.62.062314.

[16] Acin A., Bruβ D., Lewenstein M., Sanpera A. Classification of Mixed Three-Qubit States. *Physical Review Letters*, 2000, vol. 87, issue 4, Article number 040401. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.040401.

[17] Garcia-Alcaine G., Sabin C. A classification of entanglement in three-qubit systems. *The European Physical Journal D*, 2008, vol. 48, Article number 040401, pp. 435–442. DOI: https://doi.org/10.1140/epjd/e2008-00112-5.

[18] Siti Munirah Mohd S.M., Idrus B., Zainuddin H., Mukhtar M. Entanglement Classification for a Three-qubit System using Special Unitary Groups. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, 2019, vol. 10, issue 7, pp. 374–379. DOI: https://doi.org/10.14569/IJACSA.2019.0100751.

[19] Akbari-Kourbolagh Y. Entanglement criteria for the three-qubit states. *International Journal of Quantum Information*, 2017, vol. 15, no. 7, article number 1750049. DOI: https://doi.org/10.1142/S0219749917500496.

[20] Gong M. [et al.] Genuine 12-qubit entanglement on a superconducting quantum processor. *Physical Review Letters*, 2019, vol. 122, article number 110501. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.110501.

[21] Song C. [et al.] 10-qubit entanglement and parallel logic operations with a superconducting circuit. *Physical Review Letters*, 2017, vol. 119, issue 18, Article number 180511. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.180511.

[22] Wei K.X. [et al.] Verifying multipartite entangled *GHZ* states via multiple quantum coherences. *Physical Review A*, 2020. vol. 101, issue 3, article number 032343. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.101.032343.

[23] Song C. [et al.] Generation of multicomponent atomic Schrödinger cat states of up to 20 qubits. *Science*, 2019, vol. 365, no. 6453, pp. 574–577. DOI: https://doi.org/10.1126/science.aay0600.

[24] Leibfried D. [et al.] Toward heisenberg-limited spectroscopy with multiparticle entangled states. *Science*, 2004, vol. 304, issue 5676, pp. 1476–1478. DOI: https://doi.org/10.1126/science.10975.

[25] Roos C.F. [et al.] Control and measurement of three-qubit entangled states. *Science*, 2004, vol. 304, issue 5676, pp. 1478–1480. DOI: https://doi.org/10.1126/science.1097522.

[26] Monz T. [et al.] 14-qubit entanglement: creation and coherence. *Physical Review Letters*, 2011, vol. 106, issue 13, Article number 130506. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.130506.

[27] Omran A. [et al.] Generation and manipulation of Schrödinger cat states in Rydberg atom arrays. *Science*, 2019, vol. 365, issue 6453, pp. 570–574. DOI: https://doi.org/10.1126/science.aax9743.

[28] Lu C.-Y. [et al.] Experimental entanglement of six photons in graph states. *Nature Physics*, 2007, vol. 3, pp. 91–95. DOI: https://doi.org/10.1038/nphys507.

[29] Wang X.-L. [et al.] 18-qubit entanglement with six photons' three degrees of freedom. *Physical Review Letters*, 2018, vol. 120, issue 26, Article number 260502. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.260502.

[30] Zhong H.-S. [et al.] 12-photon entanglement and scalable scattershot boson sampling with optimal entangled-photon pairs from parametric downconversion. *Physical Review Letters*, 2018, vol. 121, issue 25, Article number 250505. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.250505.

[31] Neeley M. Generation of three-qubit entangled states using superconducting phase qubits. *Nature*, 2010, vol. 467, pp. 570–573. DOI: https://doi.org/10.1038/nature09418.

[32] Gong M. [et al.] Genuine 12-qubit entanglement on a superconducting quantum processor. *Physical Review Letters*, 2019, vol. 122, issue 11, Article number 110501. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.110501.

[33] Song C. [et al.] 10-qubit entanglement and parallel logic operations with a superconducting circuit. *Physical Review Letters*, 2017, vol. 119, issue 18, Article number 180511. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.119.180511.

[34] Li D., Cheng M., Li X., Li S. A relation among tangle, 3-tangle, and von Neumann entropy of entanglement for three qubits. *Quantum Information Processing*, 2023, vol. 22, Article number 14. DOI: https://doi.org/10.1007/s11128-022-03759-4.

[35] Yu T., Eberly J.H. Sudden death of entanglement. *Science*, 2009, vol. 323, issue 5914, pp. 598–601. DOI: https://doi.org/10.1126/science.1167343.

[36] Wang F. [et al.] Observation of entanglement sudden death and rebirth by controlling a solid-state spin bath. *Physical Review B*, 2018, vol. 98, issue 6, Article number 064306. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevB.98.064306.

[37] Sun G., Zhou Z., Mao B., Wen X., Wu P., Han S. Entanglement dynamics of a superonducting phase qubit coupled to a two-level system. *Physical Review B*, 2012, vol. 86, Issue 6, Article number 064502. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevB.86.064502.

[38] Salles A., de Melo F., Almeida M. P., Hor-Meyll M., Walborn S.P., Souto Ribeiro P. H., Davidovich L. Experimental investigation of the dynamics of entanglement: Sudden death, complementarity, and continuous monitoring of the environment. Physical Review, 2008. vol. A78, number 022322. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevA.78.022322.

[39] Bagrov A.R., Bashkirov E.K. Sudden death of entanglement in a thermal three-qubut Tavis-Cummings model. *Proceedings of the 9th IEEE International Conference on Information Technology and Nanotechnology*, 2023, Article number 23240901. DOI: https://doi.org/10.1109/ITNT57377.2023.10139206.

[40] Jozsa R. Fidelity for mixed quantum states. *Journal of Modern Optics*, 1994, vol. 41, issue 12, pp. 2315–2323. DOI: https://doi.org/10.1080/09500349414552171.