



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-1-50-63

УДК 539.3

Дата: поступления статьи: 15.01.2024
после рецензирования: 21.02.2024
принятия статьи: 28.02.2024

К.Б. Устинов

Институт проблем механики
имени А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Российская Федерация
E-mail: ustinov@ipmnet.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5852-3355>

Д.В. Гандилян

Институт проблем механики
имени А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Российская Федерация
E-mail: david.ghandilyan@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-8469-4380>

О ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ДЛЯ ТОНКОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ, СОПРЯЖЕННОЙ С МАССИВНЫМ ТЕЛОМ

АННОТАЦИЯ

Рассматривается задача о деформировании под действием равномерного давления круговой пластины, сопряженной с массивным основанием, при этом условие сопряжения пластины с основанием моделируется использованием граничных условий типа обобщенной упругой заделки, т. е. связи изгибающего момента и усилий на краю пластины со смещениями и углом поворота посредством матрицы податливости. Основной целью работы является исследование влияния упругости заделки на упругий отклик пластины. Решение задачи получено в постановке линейной теории пластин, теории мембран в приближении однородности продольных усилий и теории Фешля — фон Кармана, также в приближении предположения однородности продольных усилий. Значения коэффициентов матрицы податливости получены с помощью метода конечных элементов для вспомогательной задачи и сравнены со значениями коэффициентов, полученных для близких задач аналитическими методами. Численные результаты получены для пластины из алюминия на кремниевом основании. Проведено сравнение полученного решения с решением, полученным для условия жесткой заделки для всех трех использованных моделей. Показано, что в случае больших прогибов (несколько толщин пластины) учет податливости заделки становится существенным.

Ключевые слова: тонкая пластина; граничные условия для пластин; упругая заделка; матрица податливости.

Цитирование. Устинов К.Б., Гандилян Д.В. О граничных условиях для тонкой круглой пластины, сопряженной с массивным телом // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 1. С. 50–63. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-1-50-63>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Устинов К.Б., Гандилян Д.В., 2024

Константин Борисович Устинов — доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории геомеханики, Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, 119526, Российская Федерация, г. Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1.

Давид Ваганович Гандилян — аспирант, младший научный сотрудник лаборатории механики технологических процессов, Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, 119526, Российская Федерация, г. Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1.

1. Предварительные сведения

При моделировании тонкостенных элементов конструкций, сопряженных с массивными телами, тонкостенные элементы удобно моделировать в рамках различных двумерных или одномерных моделей: пластин, оболочек, балок. При этом в качестве граничных условий обычно используют условие жесткого защемления, оправдывая это «массивностью» тел, с которыми рассматриваемые тонкостенные элементы сопрягаются. Однако более детальное рассмотрение показывает, что условие жесткого защемления выполняется лишь приближенно, и что более точными являются условия упругой заделки, когда кинематические параметры — компоненты смещения средней плоскости и углы поворота связываются с силовыми параметрами — продольными и поперечными усилиями и изгибающими моментами посредством матрицы податливости [1–15]. Более простые, скалярные, соотношения использовались в работах [16; 17]. На необходимость учета податливости заделки указывалось и в более ранних работах [18–23], где были предложены приближенные модели для их оценки. Условие жесткого защемления может быть получено как частный случай путем обнуления коэффициентов податливости матрицы, либо соответствующих предельных переходов. В упомянутых работах рассматривались ситуации отслоения тонкой пленки (пластины) от массива либо расслоение составных пластин, и были вычислены коэффициенты соответствующих матриц податливости (полный набор либо коэффициенты, вносящие наибольший вклад). В частности, было показано [2; 12], что даже деформирование пластины, имеющей полный контакт с абсолютно жестким основанием вне области отслоения (потери контакта с основанием), более точно описывается при использовании граничных условий типа упругой заделки. В настоящей статье рассматривается иной случай, а именно деформирование тонкого слоя, сцепленного с массивным основанием, имеющим цилиндрическое отверстие, за счет давления на слой через данное отверстие (рис. 1.1). Подобные задачи возникают при идентификации экспериментально определяемых параметров ультратонких элементов МЭМС, используемых, в частности, в проекционных литографических системах [24–28].

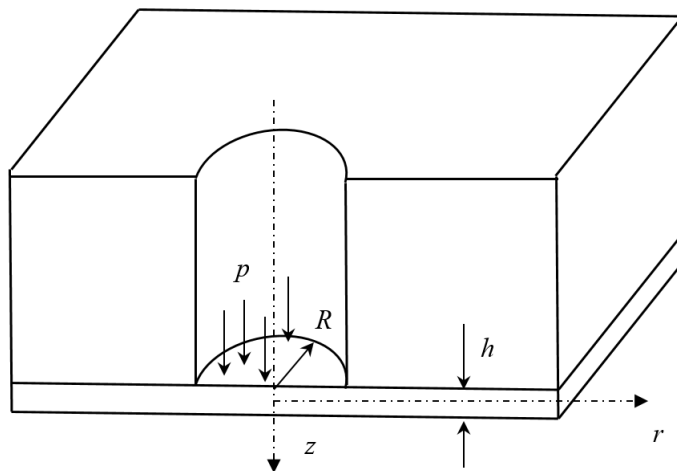


Рис. 1.1. Тонкий упругий слой, сцепленный с массивным основанием, имеющим цилиндрическое отверстие

Fig. 1.1. A thin elastic layer adhered to a massive base having a cylindrical hole

Участок тонкого слоя, находящегося над отверстием, будет рассматриваться как равномерно нагруженная пластина. При этом будут использоваться граничные условия, соответствующие упругой заделке.

2. Постановка задачи

Рассмотрим слой толщины h , сцепленный с массивным основанием, имеющим цилиндрическое отверстие радиуса R , со стороны которого на слой прикладывается давление p . Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z с осью z , расположенной по центру отверстия, и направленную в сторону, противоположную от прилегающего основания (рис. 1.1).

Деформация слоя может описываться в приближении теории пластин, где в качестве кинематических переменных используются радиальная и нормальная компоненты смещения его срединной плоскости u, w . К настоящему времени разработано много вариантов теории пластин, отличающихся как

степенью сложности, так и степенью строгости учета различных факторов. Рассмотрение вариантов теорий и областей их применения не входит в задачу настоящей работы, данный вопрос рассмотрен, например в [29], см. также цитируемую там литературу.

Рассмотрим вариант описания деформирования пластины Фешля — фон Кармана, уравнения для которого в случае осевой симметрии могут быть записаны в виде [29; 30]:

$$D\Delta^2 w - \left(T_{rr} \frac{d^2 w}{dr^2} + T_{\varphi\varphi} \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = q, \quad (2.1)$$

$$\frac{T_{rr} - T_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{dT_{rr}}{dr} = 0, \quad (2.2)$$

$$T_{rr} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 + \nu \frac{u}{r} \right], \quad (2.3)$$

$$T_{\varphi\varphi} = \left[\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} + \frac{\nu}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right]. \quad (2.4)$$

Здесь u, w — радиальная и нормальная компоненты смещения срединной плоскости слоя; q — распределенная нагрузка; Δ — оператор Лапласа; E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона слоя (пластины); $T_{rr}, T_{\varphi\varphi}$ — продольные усилия в пластине; D — изгибная жесткость

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (2.5)$$

Уравнения (2.1), (2.2) представляют собой уравнения равновесия, в первом из которых часть усилий выражена через нормальную компоненту смещения w ; уравнения (2.3), (2.4) представляют собой уравнения закона упругости, в которых деформации выражены через компоненты смещения. Область применимости системы уравнений ограничена не слишком большими прогибами w .

Для постановки задачи систему уравнений (2.1)–(2.4) необходимо дополнить граничными условиями. Традиционной является постановка, в которой смещения и углы поворота пластины в точках сопряжения с основанием полагаются равными нулю. Это условие носит название жесткой заделки и может быть представлено в виде

$$u(R) = 0, \quad (2.6)$$

$$w(R) = 0, \quad (2.7)$$

$$\left. \frac{dw(r)}{dr} \right|_{r=R} = 0. \quad (2.8)$$

Более точными являются условия упругой заделки, согласно которым кинематические величины, входящие в (2.6)–(2.8), пропорциональны некоторым статическим величинам, действующим на границе. В случае плоской границы выбор данных статических величин однозначен и определяется структурой определяющих уравнений. В общем виде это условие в используемых обозначениях можно записать в виде [14]

$$\begin{pmatrix} u(R)h^{-1} \\ -w'(R) \\ w(R)h^{-1} \end{pmatrix} = \frac{1-\nu^2}{E} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -T_{rr}h^{-1} \\ M_{rr}h^{-2} \\ Q_{rz}h^{-1} \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Здесь M_{rr}, Q_{rz} — изгибающий момент и перерезывающая сила, действующие в сечении; a_{ij} — безразмерные коэффициенты матрицы податливости, зависящие в общем случае от геометрических параметров системы (отношения толщины пластины к характерному размеру всей системы) и отношения упругих констант пластины и массивной части. Коэффициенты a_{ij} не могут быть посчитаны на основе элементарных балочных теорий. Для ряда конфигураций они были посчитаны аналитическими либо численными методами из рассмотрения более простых задач [1–14]. Условие жесткой заделки (жесткого защемления) получается из условия упругой заделки (2.9), если положить нулями все коэффициенты податливости $a_{ij} = 0$.

3. Оценки коэффициентов матрицы упругой заделки. Аналитические и численные решения

Коэффициенты матрицы упругой заделки $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ были получены многими авторами: численно [1; 3; 5; 9], полуаналитически [2; 8] и аналитически [7] для плоской задачи о слое, примыкающем к полуплоскости и имеющем участок отслоения. В работе [7] также были получены значения коэффициентов a_{13}, a_{23} (остальные коэффициенты не используются в рамках рассматриваемой модели). Для

достаточно протяженных отслоений, пользуясь результатами [6; 14; 15] можно получить следующие формулы:

$$\left(\begin{array}{l} a_{11} = \frac{2\sum}{\pi} \left(\ln \frac{\eta}{2\sum} + 1.57 \right) + d, \quad a_{12} = a_{21} = \sqrt{3}, \quad a_{22} = 12\delta, \\ a_{13} = 1 + \sqrt{3}\delta, \quad a_{23} = \frac{3}{2} + 6\delta^2, \quad \delta = 0.21 + 0.62\sum^{1/3}. \end{array} \right) \quad (3.1)$$

Здесь \sum — отношение модулей слоя и основания; η — отношение полудлины отслоившегося слоя к его толщине; d — константа, порядка единицы. Коэффициенты a_{ij} в данном приближении не зависят от длины пластины, кроме коэффициента a_{11} , зависящего логарифмически.

Рассматриваемая геометрия имеет два существенных отличия: наличие отверстия в основании на границе с пластиной и ненулевой радиус кривизны границы. Первое отличие должно приводить к уменьшению жесткости конструкции и, как следствие, к увеличению коэффициентов податливости. Действительно, для весьма жестких по отношению к основанию пластин область затухания напряжений в основании при удалении от точки защемления велика, поэтому при отсутствии материала основания в половине области (для плоского случая) можно ожидать до двукратного уменьшения сопротивления, и соответственно до двукратного увеличения коэффициентов податливости. В противоположном пределе (абсолютно) жесткого основания наличие отверстия не влияет на распределение напряжений, поэтому коэффициенты податливости не должны меняться. Наличие кривизны контура, очевидно, должно приводить к увеличению жесткости системы и уменьшению коэффициентов податливости. Это уменьшение должно сильно сказываться на коэффициентах, сильно зависящих от отношения протяженности пластины к толщине, и практически не сказываться на коэффициентах, слабо зависящих от этого отношения. Суммируя, для рассматриваемой конфигурации коэффициенты податливости должны несколько превосходить значения, даваемые формулой (3.1).

4. Оценки коэффициентов матрицы упругой заделки. МКЭ решение

Для получения значения коэффициентов упругой заделки решалась вспомогательная задача о полом цилиндре высотой H с внешним и внутренним радиусами R_1, R_2 , один из торцов которого $z = 0$, полностью сцеплен с пластиной из другого материала, имеющей круговое отверстие радиуса $R_3 < R_2$ (рис. 4.1). Противоположный торец цилиндра $z = -H$ жестко закреплялся, $u(r, -H) = w(r, -H) = 0$. На внутреннем контуре пластины ставились граничные условия одного из следующих видов: постоянное давление

$$\sigma_{rr}(R_3, z) = p, \quad 0 \leq z \leq h \quad (4.1)$$

либо постоянный изгибающий момент

$$\sigma_{rr}(R_3, z) = (z - h/2)p, \quad 0 \leq z \leq h. \quad (4.2)$$

Для пластины и основания были взяты модули Юнга и коэффициента Пуассона для алюминия ($E = 70$ ГПа, $\nu = 0.35$) и кремния ($E = 109$ ГПа, $\nu = 0.27$), соответственно [31].

Задача решалась методом конечных элементов в линейной упругой осесимметричной постановке.

В процессе решения вычислялись компоненты смещения на верхней и нижней свободной границе пластины $u(r, 0), u(r, h), w(r, 0), w(r, h)$, $R_3 + \xi \leq r \leq R_2 - \xi$, где параметр ξ принимался равным $3h$ для отсекаемых областей, в которых существенную роль могут играть краевые эффекты. Значения смещений срединной плоскости вычислялись как полусумма значений в узлах сетки, расположенных на поверхностях. Полученные функции аппроксимировались полиномиальными функциями шестого порядка методом наименьших квадратов. Данные аппроксимационные зависимости экстраполировались до границы контакта пластины с цилиндром $r = R_2$. Действующие продольные усилия и моменты в данной точке вычислялись аналогичным образом через соответствующие комбинации производных от смещений. Полученные таким образом значения $u(0), w'(0), M(0), T(0)$ использовались для нахождения коэффициентов податливости. Для расчета были выбраны следующие геометрические параметры: $h = 1$, $H = 100$, $R_1 = 100$, $R_2 = 100$, для параметра R_3 использовались два значения — 60 и 40. Разница в значениях полученных коэффициентов a_{ij} при этом не превышала 3 %, что можно отнести к погрешности метода конечных элементов. Двумерная сетка строилась четырехугольными элементами. Число элементов по толщине пластины составляло 6, по длине пластины — 100, по сторонам массивной части — 200. Отношение размера элемента вблизи точки заделки и вдали от нее составляло 1/10.

Полученные значения коэффициентов податливости составили $a_{11} = 10$, $a_{12} = a_{21} = 1.7$, $a_{22} = 12$. Данные значения, согласующиеся с теоретическими значениями для плоской границы и сплошного основания, использовались в расчетах.

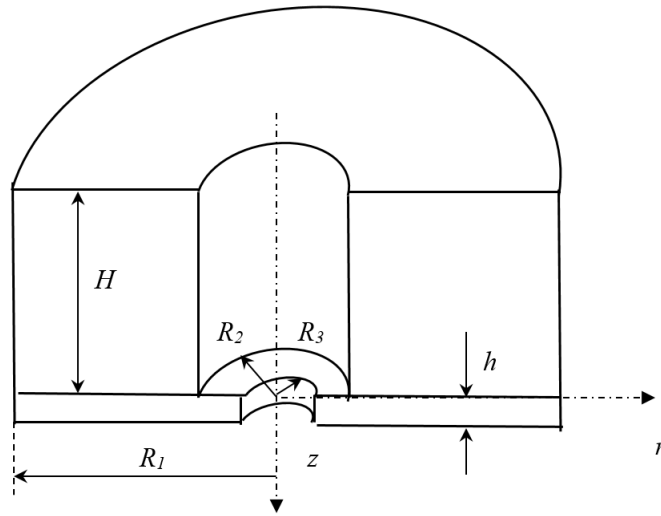


Рис. 4.1. Геометрия расчетной области
 Fig. 4.1. Geometry of the computational domain

5. Оценки влияния различных коэффициентов

Оценку удобно проводить по отдельности для отдельных коэффициентов матрицы податливости. При этом для оценки вклада того или иного коэффициента можно использовать подходящую приближенную модель, в рамках которой можно получить аналитическое либо полуаналитическое решение. Такой подход позволяет в рамках используемых приближенных теорий на основе полученных решений оценивать относительный вклад того или иного коэффициента.

5.1. Модель пластины без учета растягивающих усилий

Для оценки влияния коэффициентов, связанных с начальным поворотом, удобно использовать элементарное уравнение изгиба пластины без учета сил, возникающих в ее плоскости. Подобное уравнение обычно называют уравнением Софи Жермен. Данное уравнение может быть получено отбрасыванием в уравнении (2.1) члена, связанного с действием продольных сил

$$D\Delta^2 w = q. \quad (5.1)$$

Здесь q — распределенная нормальная нагрузка, в общем случае зависящая от координат.

В рассматриваемом случае осевой симметрии данное уравнение в полярных координатах преобразуется к виду

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right) \right] = \frac{q}{D}. \quad (5.2)$$

Общее решение данного уравнения при постоянной нагрузке q , не имеющее особенностей в центре, есть

$$w(r) = \frac{qr^4}{64D} + C_1 r^2 + C_2. \quad (5.3)$$

При моделировании условий закрепления в виде жесткой заделки граничные условия записываются в виде (2.7), (2.8), при этом условие (2.6) не используется, поскольку входящая в него функция u не входит в уравнения изгиба.

При моделировании условий закрепления в виде упругой заделки условие (2.8) заменяется на следующее (с учетом знаков), являющееся частным случаем условия (2.9)

$$-\frac{dw(r)}{dr} \Big|_{r=R} = \frac{a_{22}}{Eh^2} M_{rr}(R) + \frac{a_{23}}{Eh} Q_{rz}(R). \quad (5.4)$$

Здесь модуль Юнга, модифицированный для плоской деформации, определяется как

$$\bar{E} = \frac{E}{1 - \nu^2}. \quad (5.5)$$

В условии (5.4) ввиду характера уравнения (5.1) отсутствует зависимость от продольного усилия, действующего в пластине. Кроме того, ввиду осевой симметрии вертикальное смещение края не зависит от угла и может быть положено равным нулю.

Значение изгибающего момента может быть посчитано следующим образом [30]:

$$M_{rr}(r) = D \left(\frac{d^2 w(r)}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw(r)}{dr} \right). \quad (5.6)$$

Значение перерезывающей силы наиболее просто получить из баланса сил, действующих на пластину в пределах радиуса

$$Q_{rz}(r) = \frac{qr}{2}. \quad (5.7)$$

С учетом (5.6), (5.7) граничное условие (5.4) записывается в виде

$$\left. \frac{dw(r)}{dr} \right|_{r=R} = -\frac{h}{12} a_{22} \left(\left. \frac{d^2 w(r)}{dr^2} \right|_{r=R} + \frac{\nu}{R} \left. \frac{dw(r)}{dr} \right|_{r=R} \right) - \frac{a_{23}}{2} \frac{qR}{Eh}. \quad (5.8)$$

Подстановка общего решения (5.3) в граничное условие упругой заделки (5.8) дает уравнение для определения константы C_1

$$\frac{qR^3}{16D} + 2C_1 R = -\frac{h}{12} a_{22} \left(\frac{(3+\nu)qR^2}{16D} + 2(1+\nu)C_1 \right) - \frac{a_{23}}{2} \frac{qR}{Eh}. \quad (5.9)$$

Откуда

$$C_1 = -\frac{qR^2}{32D} \left(1 + \frac{3+\nu}{12} a_{22} \frac{h}{R} + a_{23} \frac{2}{3} \frac{h^2}{R^2} \right) \left(1 + \frac{h}{12R} a_{22} (1+\nu) \right)^{-1}. \quad (5.10)$$

После чего из (2.7) находится константа C_2

$$C_2 = -\frac{qR^4}{64D} - C_1 R^2. \quad (5.11)$$

Подстановка значений констант (5.10), (5.11) в общее решение окончательно дает выражение для смещений в случае граничных условий в виде упругой заделки

$$w(r) = \frac{qr^4}{64D} - \frac{qR^2}{32D} (r^2 - R^2) \left(1 + \frac{3+\nu}{12} a_{22} \frac{h}{R} + a_{23} \frac{2}{3} \frac{h^2}{R^2} \right) \left(1 + \frac{h}{12R} a_{22} (1+\nu) \right)^{-1} - \frac{qR^4}{64D}. \quad (5.12)$$

Выражение для смещений в случае граничных условий в виде жесткой заделки получается отсюда, если положить $a_{22} = a_{23} = 0$, либо подстановкой граничных условий (2.7), (2.8) в общее решение (5.3)

$$w(r) = \frac{q}{64D} (R^2 - r^2)^2. \quad (5.13)$$

Ввиду малости параметра h/R оценки для поправки, вносимой учетом конечности поворота в месте заделки, решение (5.12) можно разложить в ряд по данному параметру. Тогда, в частности, для смещения в центре пластины

$$w(0) = \frac{qR^4}{64D} \left(1 + \frac{1}{3} a_{22} \frac{h}{R} \right) + O\left(\frac{h}{R}\right)^2. \quad (5.14)$$

При $h/R = 1/100$ для пленки алюминия на кремнии с $a_{22} \approx 12$ погрешность, вносимая неучетом конечности поворота, составляет около 4 %, для $h/R = 1/1000$ погрешность становится пренебрежимо малой. Вклад от коэффициента a_{23} для указанных условий пренебрежим ввиду того, что параметр h/R входит во второй степени.

Аналогично для величины момента в точке заделки, согласно (5.6)

$$M_{rr}(R) = \frac{qR^2}{8D} \left(1 - \frac{1+\nu}{12} a_{22} \frac{h}{R} \right). \quad (5.15)$$

Поправка для рассматриваемых условий составляет порядка 1 %. Однако при меньших относительных радиусах рассматриваемая поправка становится существенной.

Уравнения (5.14), (5.15) показывают, что податливость заделки приводит к увеличению нормальных смещений и уменьшению изгибающего момента, соответствующие поправки имеют порядок $a_{22} \frac{h}{R}$ и обусловлены вкладом члена, соответствующего влиянию изгибающего момента на угол поворота в месте контакта.

5.2. Мембранная модель

Рассмотрим другой крайний случай преобладания продольных (мембранных) усилий. При этом обычно предполагается постоянство усилий

$$T_{rr}(r) = \text{const.} \quad (5.16)$$

Из предположения (5.16) и уравнения равновесия (2.2) также следует равенство мембранных усилий в различных направлениях $T_{rr} = T_{\varphi\varphi} = T$. Предположение постоянства мембранных усилий не позволяет удовлетворить точно уравнениям совместности, однако используется в приближенных расчетах. Уравнение для прогиба получается из общего уравнения (2.1) отбрасыванием первого члена, связанного с изгибом, что вместе с условием (5.16) дает

$$-T\Delta w(r) = q \quad (5.17)$$

или в полярных координатах:

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) = \frac{q}{T}. \quad (5.18)$$

Решение, удовлетворяющее граничному условию отсутствия вертикальных смещений на границе (2.7) и ограниченное в нуле, есть

$$w(r) = \frac{q}{4T} (R^2 - r^2). \quad (5.19)$$

Данное решение, очевидно, неадекватно описывает поведение вблизи точек заделки. В частности, решение (5.19) дает конечный (и достаточно большой) поворот в этой точке. Это связано с тем, что вблизи заделки пренебрежение изгибными напряжениями, описываемыми в уравнении (2.1) старшими производными, становится неправомерным; для адекватного описания деформирования в этой области в рамках мембранной теории необходимо рассмотрение пограничного слоя.

Радиальные T_{rr} и окружные мембранные усилия $T_{\varphi\varphi}$ находятся из закона упругости. В предположении постоянства мембранных усилий получаем

$$\varepsilon_{rr} = \frac{T_{rr}}{Eh} - \nu \frac{T_{\varphi\varphi}}{Eh} = \frac{1-\nu}{Eh} T, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{T_{\varphi\varphi}}{Eh} - \nu \frac{T_{rr}}{Eh} = \frac{1-\nu}{Eh} T. \quad (5.20)$$

Выражения для радиальных и окружных деформаций ε_{rr} , $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ через смещения u , w имеют вид

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r}. \quad (5.21)$$

Подстановка (5.21) в (5.20) дает различные выражения для смещения $u(R)$ при подсчете через радиальную и окружную деформации. В первом случае интегрирование от 0 до R дает

$$u(R) = \frac{1-\nu}{Eh} TR - \frac{1}{2} \int_0^R \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 dr, \quad (5.22)$$

во втором

$$u(R) = \frac{1-\nu}{Eh} TR. \quad (5.23)$$

Для дальнейших расчетов возьмем среднее значение

$$u(R) = \frac{1-\nu}{Eh} TR - \frac{1}{4} \int_0^R \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 dr. \quad (5.24)$$

Подстановка (5.19) в (5.24) и интегрирование от 0 до R дают

$$u(R) = \frac{1-\nu}{E} \frac{R}{h} T - \frac{q^2 R^3}{48T^2}. \quad (5.25)$$

С другой стороны смещение $u(R)$ может быть посчитано через граничное условие типа упругой заделки (получающегося как частный случай из первого из условий (2.9)):

$$u(R) = -\frac{a_{11}}{E} T. \quad (5.26)$$

Здесь отсутствуют члены, связанные с высшими производными от w (см. рассуждения после формулы (5.19)). Из сравнения (5.26) и (5.25) получаем

$$T^3 = \frac{Eq^2 R^2 h}{48(1-\nu)} \left(1 + a_{11} (1+\nu) \frac{h}{R} \right)^{-1}. \quad (5.27)$$

Откуда для малых h/R

$$T = \sqrt[3]{\frac{Eq^2R^2h}{48(1-\nu)}} \left(1 - a_{11} \frac{1+\nu}{3} \frac{h}{R} \right) + O\left(\frac{h}{R}\right)^2. \quad (5.28)$$

Подстановка выражения для T в выражение для нормального смещения w (5.19), для смещения в центре пластины дает

$$w(r) = \frac{1}{2} (R^2 - r^2) \sqrt[3]{\frac{6q(1-\nu)}{EhR^2}} \left(1 + a_{11} \frac{1+\nu}{3} \frac{h}{R} \right) + O\left(\frac{h}{R}\right)^2, \quad (5.29)$$

$$w(0) = \frac{R}{2} \sqrt[3]{\frac{6qR(1-\nu)}{Eh}} \left(1 + a_{11} \frac{1+\nu}{3} \frac{h}{R} \right) + O\left(\frac{h}{R}\right)^2. \quad (5.30)$$

Из данных уравнений видно, что относительная поправка, вносимая за счет учета податливости заделки, имеет порядок $a_{11} \frac{h}{R}$. Для рассмотренной мембранной модели она не зависит от величины действующей нагрузки q . Поправка величины смещения и натяжения для $h/R = 1/100$ составляет порядка 1.3 %. Однако при меньших относительных радиусах рассматриваемая поправка становится существенной.

5.3. Модель Фешля — фон Кармана в приближении постоянства усилий в плоскости пластины

Данная модель, не являясь точной, позволяет тем не менее получить оценки влияния всех коэффициентов матрицы податливости. Уравнение (2.1) для постоянных мембранных усилий $T_{rr} = T_{\varphi\varphi} = T$ в полярных координатах записывается как

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right) \right] - \frac{T}{D} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) = \frac{q}{D}. \quad (5.31)$$

Решение данного уравнения, не имеющее особенности в нуле и удовлетворяющее граничному условию отсутствия вертикальных смещений на контуре (2.7), записывается в виде

$$w(r) = \frac{q(R^2 - r^2)}{4T} + C \left[I_0 \left(\frac{r\sqrt{T}}{\sqrt{D}} \right) - I_0 \left(\frac{R\sqrt{T}}{\sqrt{D}} \right) \right]. \quad (5.32)$$

Первая и вторая производные от вертикального смещения есть

$$w'(r) = -\frac{qr}{2T} + C \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{D}} I_1 \left(\frac{r\sqrt{T}}{\sqrt{D}} \right), \quad (5.33)$$

$$w''(r) = -\frac{q}{2T} + C \frac{T}{2D} \left[I_0 \left(\frac{r\sqrt{T}}{\sqrt{D}} \right) + I_2 \left(\frac{r\sqrt{T}}{\sqrt{D}} \right) \right]. \quad (5.34)$$

Здесь I_k — модифицированная функция Бесселя (функция Инфельда) порядка k . Постоянная интегрирования C и величина натяжения T находятся из оставшихся граничных условий (2.9), записываемых в виде

$$u(R) = -\frac{a_{11}}{E} T + \frac{a_{12}}{Eh} M + \frac{a_{13}}{E} Q_{rz}, \quad (5.35)$$

$$-w'(R) = -\frac{a_{21}}{Eh} T + \frac{a_{22}}{Eh^2} M + \frac{a_{23}}{Eh} Q_{rz}. \quad (5.36)$$

С другой стороны, подстановка выражения для производной нормальных смещений (5.33) в выражение (5.22) и интегрирование от 0 до R дают (здесь, подобно мембранному приближению, для вычисления мембранных усилий T берется среднее значение осевых и окружных деформаций)

$$u(R) = \frac{1-\nu}{E} \frac{R}{h} T - u_w, \quad (5.37)$$

$$u_w = \frac{R^3 \left(C^2 T^4 {}_2F_3 \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 2, \frac{5}{2}, 3; \frac{R^2 T}{D} \right) + Dq \left(Dq - 2CT^2 {}_1F_2 \left(\frac{3}{2}; 2, \frac{5}{2}; \frac{R^2 T}{4D} \right) \right) \right)}{24D^2 T^2}. \quad (5.38)$$

Здесь u_w — член, возникающий за счет вклада в деформацию квадрата производной от вертикальных смещений; ${}_m F_n$ — гипергеометрическая функция.

Подстановка выражений для силовых параметров (5.6), (5.7), в выражения для смещения на краю пластины (5.25) и производной от нормальных смещений (5.33) приводят к системе двух нелинейных уравнений для определения величин C и T

$$\frac{1-\nu}{E} \frac{R}{h} T - u_w = -\frac{a_{11}}{E} T + \frac{a_{13}}{E} \frac{qR}{2} + \frac{a_{12}h^2}{12} \left\{ -\frac{q}{2T} + C \frac{T}{2D} \left[I_0 \left(\frac{R\sqrt{T}}{\sqrt{D}} \right) + I_2 \left(\frac{R\sqrt{T}}{\sqrt{D}} \right) \right] + \frac{\nu}{R} \left[-\frac{q}{2T} + C \frac{T}{2D} \left(I_0 \left(\frac{R\sqrt{T}}{\sqrt{D}} \right) + I_2 \left(\frac{R\sqrt{T}}{\sqrt{D}} \right) \right) \right] \right\}, \quad (5.39)$$

$$\frac{qR}{2T} - C \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{D}} I_1 \left(\frac{R\sqrt{T}}{\sqrt{D}} \right) = -\frac{a_{21}}{Eh} T + \frac{a_{23}}{Eh} \frac{qR}{2} + \frac{a_{22}h}{12} \left\{ -\frac{q}{2T} + C \frac{T}{2D} \left[I_0 \left(\frac{R\sqrt{T}}{\sqrt{D}} \right) + I_2 \left(\frac{R\sqrt{T}}{\sqrt{D}} \right) \right] + \frac{\nu}{R} \left[-\frac{q}{2T} + C \frac{T}{2D} \left(I_0 \left(\frac{R\sqrt{T}}{\sqrt{D}} \right) + I_2 \left(\frac{R\sqrt{T}}{\sqrt{D}} \right) \right) \right] \right\}. \quad (5.40)$$

Условие жесткого защемления получается из (5.39), (5.40) обнулением коэффициентов податливости $a_{ij} = 0$, однако даже при этом получившаяся система не позволяет получить аналитическое решение.

5.4. Некоторые численные оценки для модели Фешля — фон Кармана в приближении постоянства усилий в плоскости пластины

Расчеты проводились для пластины алюминия на кремниевом основании. Постановка данной задачи обусловлена ее интересом при идентификации экспериментально определяемых параметров ультратонких элементов МЭМС, используемых в проекционных литографических системах [24–28]. Значения модуля Юнга и коэффициенты Пуассона для пластины принимались $E = 70$ ГПа, $\nu = 0.35$ соответственно [31]. Значения коэффициентов податливости, посчитанные методом конечных элементов, принимались равными $a_{11}^0 = 10$, $a_{12}^0 = a_{21}^0 = 1.7$, $a_{22}^0 = 12$ (вклад в расчетные величины за счет коэффициентов a_{13} , a_{23} оказался порядка сотых долей процента, поэтому в окончательных расчетах их значение принималось равным нулю $a_{13} = a_{23} = 0$). Отношение толщины пластины к радиусу в расчетах составляло $h/R = 1/R$.

Значения величин прогиба в центре пластины w , момента на краю пластины M и величины растягивающего усилия T были посчитаны для указанных значений параметров и различных величин давления q согласно формулам (5.6), (5.32) и результатам численного решения системы (5.39), (5.40). Обнуление одного или нескольких оставшихся коэффициентов податливости позволило также проводить расчеты по редуцированным моделям, вплоть до модели жесткой заделки. Результаты расчетов представлены в табл. 5.1. Величины w_0 , M_0 , T_0 относятся к жесткой заделке.

Приведенные расчеты свидетельствуют о том, что влияние коэффициентов податливости разнаправлено и существенно зависит от уровня внешней нагрузки. Анализ полученных данных позволяет сделать следующие выводы о влиянии коэффициентов податливости для рассматриваемой геометрии и сочетании упругих свойств:

1. Пренебрежение влиянием коэффициента a_{11} приводит к занижению значений прогиба пластины и изгибающего момента на краю (тем большим, чем больше нагрузка) и завышению значений растягивающих усилий (тем большим, чем меньше нагрузка).
2. Пренебрежение влиянием коэффициента a_{12} приводит к незначительному (менее 1 %) завышению значений прогиба пластины, завышению значений изгибающего момента на краю при малых нагрузках и занижению при больших, и занижению значений растягивающих усилий (тем большим, чем меньше нагрузка). В целом данный коэффициент оказывает наименьшее влияние на исследуемые величины. Его вклад наиболее существенен на изгибающий момент при больших нагрузках и на величину продольной силы при малых нагрузках, однако даже в этих случаях его вклад имеет порядок 2.5 и 5 %, соответственно.
3. Пренебрежение влиянием коэффициента a_{22} приводит к занижению значений прогиба пластины (тем большим, чем больше нагрузка), к завышению значений изгибающего момента на краю (тем большим, чем больше нагрузка), а также к занижению значений растягивающих усилий (тем большим, чем меньше нагрузка). Влияние данного коэффициента становится весьма существенным при расчете величины изгибающего момента на краю пластины при действии больших нагрузок.
4. Сравнение результатов, полученных в рамках модели упругой заделки с учетом всех трех коэффициентов, с результатами для жесткой модели показывает, что пренебрежение податливостью приводит к занижению значений прогиба тем большим, чем больше нагрузка, однако не превышающим 4.2 %, завышению значения изгибающего момента на краю, доходящего до 12.6 % при нагрузках, соответствующих прогибам порядка 7.5 толщин пластины, и завышению значений растягивающих усилий (тем большим, чем больше нагрузка).

Таблица 5.1

Значения величин прогиба в центре пластины, продольного усилия и изгибающего момента на краю пластины при учете различных коэффициентов податливости

Table 5.1

Values of deflections in the plate center, longitudinal stresses and bending moments at the plate edge due to accounting for various coefficients of compliance

$\frac{p}{E}$	a_{11}	a_{12}	a_{22}	$\frac{w}{h}$	$\frac{w-w_0}{w} \cdot 100 \%$	$\frac{M}{\rho h^2 R}$	$\frac{M-M_0}{M} \cdot 100 \%$	$\frac{T}{\rho h R}$	$\frac{T-T_0}{T} \cdot 100 \%$
$5 \cdot 10^{-8}$	0	0	0	0.703		11.39		4.64	
	a_{11}^0	0	0	0.712	1.37	11.49	0.8	4.20	-10.4
	0	a_{12}^0	0	0.697	-0.82	11.37	-0.23	4.83	3.91
	0	0	a_{22}^0	0.724	2.81	11.13	-2.35	4.87	4.69
	a_{11}^0	0	a_{22}^0	0.734	4.2	11.23	-1.46	4.41	-5.09
	a_{11}^0	a_{12}^0	a_{22}^0	0.729	3.5	11.2	-1.7	4.58	-0.13
10^{-7}	0	0	0	1.138		10.10		6.08	
	a_{11}^0	0	0	1.165	2.35	10.24	1.32	5.62	-8.24
	0	a_{12}^0	0	1.127	-0.93	10.01	-0.12	6.20	2.01
	0	0	a_{22}^0	1.163	2.13	9.78	-3.29	6.29	3.37
	a_{11}^0	0	a_{22}^0	1.192	4.49	9.92	-1.84	5.82	-4.47
	a_{11}^0	a_{12}^0	a_{22}^0	1.181	3.69	9.91	-1.95	5.92	-2.56
10^{-6}	0	0	0	3.336		5.379		5.35	
	a_{11}^0	0	0	3.469	3.83	5.483	1.89	5.1	-5.10
	0	a_{12}^0	0	3.306	-0.89	5.421	0.78	5.39	0.69
	0	0	a_{22}^0	3.372	1.08	4.977	-8.07	5.44	1.43
	a_{11}^0	0	a_{22}^0	3.507	4.88	5.081	-5.84	5.17	-3.57
	a_{11}^0	a_{12}^0	a_{22}^0	3.481	4.15	5.119	-5.07	5.20	-2.96
10^{-5}	0	0	0	7.622		2.622		2.89	
	a_{11}^0	0	0	7.944	4.05	2.676	2.0	2.77	-4.55
	0	a_{12}^0	0	7.556	-0.87	2.687	-2.41	2.91	0.57
	0	0	a_{22}^0	7.685	0.82	2.223	-17.9	2.92	1.04
	a_{11}^0	0	a_{22}^0	8.01	4.85	2.276	-15.2	2.79	-3.54
	a_{11}^0	a_{12}^0	a_{22}^0	7.957	4.21	2.328	-12.6	2.81	-3.01

Полученные значения вклада податливости в величины прогиба и изгибающего момента для нагрузок, соответствующих малым прогибам, близки к значениям, полученным с использованием уравнения Софи Жермен. Для нагрузок, соответствующих прогибам, равным нескольким толщинам, различие увеличивается, особенно для изгибающих моментов. Полученные значения величин натяжения существенно отличаются от величин, посчитанных в рамках мембранной теории.

Следует отметить, что вычислительные трудности при расчетах с использованием редуцированных моделей сопоставимы со случаем использования полной модели, поэтому для практических целей можно рекомендовать использование именно полной модели во всех случаях.

Заключение

Рассмотрена задача о деформировании круговой пластины, сопряженной с массивным основанием, под действием приложенного давления. Для моделирования сопряжения пластины с основанием используются граничные условия типа обобщенной упругой заделки, т. е. линейной связи изгибающего момента и усилий на краю пластины со смещениями и углом поворота посредством матрицы податливости. Решение задачи получено для трех вариантов теории пластин:

- линейной теории, не учитывающей действия продольных усилий;
- теории мембран в приближении предположения однородности продольных усилий;
- теории Фешля — фон Кармана также в приближении предположения однородности продольных усилий.

Значения коэффициентов матрицы податливости были получены с помощью метода конечных элементов для вспомогательной задачи о сцепленной с массивным основанием пластине с цилиндрическим

отверстием, края которого нагружены продольными усилиями либо изгибающим моментом. Численные результаты получены для пластины из алюминия на кремниевом основании — задачи, возникающей при идентификации параметров ультратонких элементов МЭМС, используемых в проекционных литографических системах.

Проведено сравнение величин прогиба в центре пластины, растягивающего усилия и изгибающего момента на краю пластины, полученных из решений, учитывающих и не учитывающих упругость заделки. Исследована роль отдельных коэффициентов матрицы податливости. Показано, что для больших прогибов наиболее существенную роль играет коэффициент, связывающий угол поворота пластины в точке заделки с действующим изгибающим моментом. Показано, что для нагружения, соответствующего прогибам в несколько толщин пластины (нескольких процентов от ее радиуса), разница в значениях изгибающего момента на ее краю, посчитанная с учетом и без учета податливости заделки, превышает 10 %, что свидетельствует о необходимости учета податливости заделки.

Авторы выражают признательность С.А. Лычеву и А.В. Дигилову за ряд полезных замечаний, выраженных в процессе обсуждения работы.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФ, проект № 23 – 19 – 00866 (для КБУ).

Литература

- [1] Cotterell B., Chen Z. Buckling and cracking of thin film on compliant substrates under compression // *International Journal of Fracture*. 2000. Vol. 104, Issue 2. Pp. 169–179. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1007628800620>.
- [2] Yu H.-H., Hutchinson J.W. Influence of substrate compliance on buckling delamination of thin films // *International Journal of Fracture*. 2002. Vol. 113. Pp. 39–55. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1013790232359>.
- [3] Li S., Wang J., Thouless M.D. The effects of shear on delamination in layered materials // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2004. Vol. 52, Issue 1. Pp. 193–214. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(03\)00070-X](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(03)00070-X).
- [4] Andrews M., Massabo R., Cox B. Elastic interaction of multiple delaminations in plates subject to cylindrical bending // *International Journal of Solids and Structures*. 2006. Vol. 43, Issue 5. Pp. 855–886. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.04.025>.
- [5] Andrews M., Massabo R. The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers // *Engineering Fracture Mechanics*. 2007. Vol. 74, Issue 17. Pp. 2700–2720. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2007.01.013>.
- [6] Ustinov K.B. On shear separation of a thin strip from the half-plane // *Mechanics of Solids*. 2014. Vol. 49, Issue 6. Pp. 713–724. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654414060132>.
- [7] Ustinov K.B. On separation of a layer from the half-plane: elastic fixation conditions for a plate equivalent to the layer // *Mechanics of Solids*. 2015. Vol. 50, Issue 1. Pp. 62–80. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654415010070>.
- [8] Begley M.R., Hutchinson J.W. *The Mechanics and Reliability of Films, Multilayers and Coatings*. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. 288 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/9781316443606>.
- [9] Thouless M.D. Shear forces, root rotations, phase angles and delamination of layered materials // *Engineering Fracture Mechanics*. 2018. Vol. 191. Pp. 153–167. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2018.01.033>.
- [10] Barbieri L., Massabo R., Berggreen C. The effects of shear and near tip deformations on interface fracture of symmetric sandwich beams // *Engineering Fracture Mechanics*. 2018. Vol. 201. Pp. 298–321. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2018.06.039>.
- [11] Massabo R., Ustinov K.B., Barbieri L., Berggreen C. Fracture mechanics solutions for interfacial cracks between compressible thin layers and substrates // *Coatings*. 2019. Vol. 9, Issue 3. P. 152. DOI: <https://doi.org/10.3390/coatings9030152>.
- [12] Ustinov K.B. On semi-infinite interface crack in bi-material elastic layer // *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2019. Vol. 75. Pp. 56–69. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.01.013>.
- [13] Monetto I., Massabo R. An analytical beam model for the evaluation of crack tip root rotations and displacements in orthotropic specimens // *Frattura ed Integrità Strutturale*. 2020. Vol. 14, No. 53. Pp. 372–393. DOI: <https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.53.29>.
- [14] Ustinov K., Massabo R. On elastic clamping boundary conditions in plate models describing detaching bilayers // *International Journal of Solids and Structures*. 2022. Vol. 248. P. 111600. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.111600>.
- [15] Ustinov K.B. On influence of substrate compliance on delamination and buckling of coatings // *Engineering Failure Analysis*. 2015. Vol. 47. Pp. 338–344. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2013.09.022>
- [16] Вольмир А.С. *Устойчивость деформируемых систем*. Москва: Наука, 1967. 984 с. URL: <https://dwg.ru/dnl/4808?ysclid=lsmpvbywto225676829>.

- [17] Бауэр С.М., Воронкова Е.Б. Влияние условий закрепления на появление несимметричных форм равновесия у круглых пластин под действием нормального давления // Журнал Белорусского государственного университета. Сер.: Математика. Информатика. 2020. № 1. С. 38–46. DOI: <http://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-1-38-46>.
- [18] Vogt F. *Über die Berechnung der Fundamentdeformation* Avhandlingar utgitt av det Norske Videnskaps. Akademi i Oslo: Matematisk-naturvidenskapelig klasse. 1925. 35 p.
- [19] Weber C. *The Deformation of Loaded Gears and the Effect on Their Load Carrying Capacity* // Department of Scientific and Industrial Research, Sponsored Research, Germany. Report 3, Part I, England. 1949.
- [20] O'Donnell W.J. *The additional deflection of a cantilever due to the elasticity of the support* // Journal of the Applied Mechanics. 1960. Vol. 27, Issue 3. Pp. 461–464. DOI: <http://doi.org/10.1115/1.3644025>.
- [21] O'Donnell W.J. *Stresses and Deflection in Built-Up Beams*. // Journal of Engineering for Industry. 1963. Vol. 85, № 3. Pp. 265–273. DOI: <http://doi.org/10.1115/1.3669856>.
- [22] Brown J.M., Hall A.S. *Bending Deflection of a Circular Shaft Terminating in a Semi-Infinite Body*. // Journal of Applied Mechanics. 1962. Vol. 29, Issue 1. Pp. 86–90. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3636503>.
- [23] Small N.C. *Bending of a Cantilever Plate Supported From an Elastic Half Space* // Journal of Applied Mechanics. 1961. Vol. 28. Pp. 387–394.
- [24] *Nanofabrication: Nanolithography techniques and their applications*. Editor Jose Maria De Teresa. Bristol, England: IOP Publishing Ltd. 2020. 450 p. DOI: <http://doi.org/10.1088/978-0-7503-2608-7>.
- [25] Салашенко Н.Н., Чхало Н.И., Дюжев Н.А. Безмасочная рентгеновская литография на основе МОЭМС и микрофокусных рентгеновских трубок // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2018. № 10. С. 10–20. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0207352818100165>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ytmftet>.
- [26] Silverman J.P. *Challenges and progress in X-ray lithography* // Journal of Vacuum Science & Technology B. 1998. Vol. 16, Issue 6. Pp. 31–37. DOI: <https://doi.org/10.1116/1.590452>.
- [27] Vladimirsky Y., Bourdillon A., et al. *Demagnification in proximity X-ray lithography and extensibility to 25 nm by optimizing Fresnel diffraction* // Journal of Physics D: Applied Physics. 1999. Vol. 32, Issue 22. Pp. 114–118. DOI: <http://doi.org/10.1088/0022-3727/32/22/102>.
- [28] Cheng Y.L., Li M.L., Lin J.H., Lai J.H., Ke C.T., and Huang Y.C. *Development of dynamic mask photolithography system* // Proceedings of the IEEE International Conference on Mechatronics (ICM'05). 2005. Pp. 467–471. DOI: <http://doi.org/10.1109/ICMECH.2005.1529302>.
- [29] Лычев С.А., Дигилов А.В., Пивоваров Н.А. Изгиб кругового диска. От цилиндра к ультратонкой мембране // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2023. Т. 29, № 4. С. 77–105. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-4-77-105>. EDN: <https://www.elibrary.ru/blerei>.
- [30] Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. *Пластинки и оболочки*. Москва: Государственное издательство физико-математической литературы. 1963. 635 с. URL: [https://dl.booksee.org/genesis/794000/f679d6f7228f673194bd1e69961a5405/_as/\[S._P._TIMOSHENKO_i_S._VOINOVSKY-KRIGER\]_Voinovsky\(BookSee.org\).pdf](https://dl.booksee.org/genesis/794000/f679d6f7228f673194bd1e69961a5405/_as/[S._P._TIMOSHENKO_i_S._VOINOVSKY-KRIGER]_Voinovsky(BookSee.org).pdf).
- [31] Анурьев В.И. *Справочник конструктора-машиностроителя: в 3 т. Т. 1* / В.И. Анурьев; 8-е изд., перераб и доп.; под ред. И.Н. Жестковой. Москва: Машиностроение. 2001. 34 с. URL: <https://www.servotechnica.spb.ru/library/BOOKS/Anurev?ysclid=lsmzst00yj406639767>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-1-50-63

Submitted: 15.01.2024

Revised: 21.02.2024

Accepted: 28.02.2024

K.B. Ustinov

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russian Federation
E-mail: ustinov@ipmnet.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5852-3355>

D.V. Gandilyan

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russian Federation
E-mail: david.ghandilyan@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-8469-4380>

**ON THE BOUNDARY CONDITIONS FOR A THIN CIRCULAR PLATE
CONJUGATED TO A MASSIVE BODY**

ABSTRACT

The problem of deformation under the action of uniform pressure of a circular plate coupled with a massive base is considered, while the condition for the coupling of the plate with the base is modeled using boundary conditions of the generalized elastic embedding type, i.e. the relationship between the bending moment and forces at the edge of the plate with displacements and rotation angles through the compliance matrix. The main goal of the work is to study the influence of the elasticity of the embedding on the elastic response of the plate. The solution to the problem was obtained in the formulation of the linear theory of plates, the theory of membranes in the approximation of homogeneity of longitudinal forces, and the Foppl — von Karman theory, also in the approximation of the assumption of homogeneity of longitudinal forces. The values of the coefficients of the compliance matrix were obtained using the finite element method for the auxiliary problem and compared with the values of the coefficients obtained for related problems by analytical methods. Numerical results were obtained for an aluminum wafer on a silicon base. The obtained solution was compared with the solution obtained for the rigid embedment condition for all three models used. It is shown that in the case of large deflections (several plate thicknesses), taking into account the compliance of the embedment becomes essential.

Key words: thin plate; boundary conditions for plates; elastic embedding; compliance matrix.

Citation. Ustinov K.B., Gandilyan D.V. On the boundary conditions for a thin circular plate conjugated to a massive body. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 1, pp. 50–63. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-1-50-63>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Ustinov K.B., Gandilyan D.V., 2024

Konstantin B. Ustinov — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, leading researcher, Laboratory of Geomechanics, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101-1, Prospect Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

David V. Gandilyan — postgraduate student, junior researcher, Laboratory of Mechanics of Technological Processes, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, 101-1, Prospect Vernadskogo, Moscow, 119526, Russian Federation.

References

- [1] Cotterell B., Chen Z. Buckling and cracking of thin film on compliant substrates under compression. *International Journal of Fracture*, 2000, vol. 104, issue 2, pp. 169–179. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1007628800620>.
- [2] Yu H.-H., Hutchinson J.W. Influence of substrate compliance on buckling delamination of thin films. *International Journal of Fracture*, 2002, vol. 113, pp. 39–55. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1013790232359>.
- [3] Li S., Wang J., Thouless M.D. The effects of shear on delamination in layered materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2004, vol. 52, issue 1, pp. 193–214. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(03\)00070-X](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(03)00070-X).
- [4] Andrews M., Massabo R., Cox B. Elastic interaction of multiple delaminations in plates subject to cylindrical bending. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, vol. 43, issue 5, pp. 855–886. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.04.025>.
- [5] Andrews M., Massabo R. The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers. *Engineering Fracture Mechanics*, 2007, vol. 74, issue 17, pp. 2700–2720. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2007.01.013>.
- [6] Ustinov K.B. On shear separation of a thin strip from the half-plane. *Mechanics of Solids*, 2014, vol. 49, issue 6, pp. 713–724. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654414060132>.
- [7] Ustinov K.B. On separation of a layer from the half-plane: elastic fixation conditions for a plate equivalent to the layer. *Mechanics of Solids*, 2015, vol. 50, issue 1, pp. 62–80. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654415010070>.
- [8] Begley M.R., Hutchinson J.W. *The Mechanics and Reliability of Films, Multilayers and Coatings*. Cambridge: Cambridge University Press, 2017, 288 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/9781316443606>.
- [9] Thouless M.D. Shear forces, root rotations, phase angles and delamination of layered materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 2018, vol. 191, pp. 153–167. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2018.01.033>.
- [10] Barbieri L., Massabo R., Berggreen C. The effects of shear and near tip deformations on interface fracture of symmetric sandwich beams. *Engineering Fracture Mechanics*, 2018, vol. 201, pp. 298–321. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2018.06.039>.

- [11] Massabo R., Ustinov K.B., Barbieri L., Berggreen C. Fracture mechanics solutions for interfacial cracks between compressible thin layers and substrates. *Coatings*, 2019, vol. 9, issue 3, p. 152. DOI: <https://doi.org/10.3390/coatings9030152>.
- [12] Ustinov K.B. On semi-infinite interface crack in bi-material elastic layer. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 2019, vol. 75, pp. 56–69. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.01.013>.
- [13] Monetto I., Massabo R. An analytical beam model for the evaluation of crack tip root rotations and displacements in orthotropic specimens. *Frattura ed Integrità Strutturale*, 2020, vol. 14, no. 53, pp. 372–393. DOI: <https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.53.29>.
- [14] Ustinov K., Massabo R. On elastic clamping boundary conditions in plate models describing detaching bilayers. *International Journal of Solids and Structures*, 2022, vol. 248, p. 111600. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.111600>.
- [15] Ustinov K.B. On influence of substrate compliance on delamination and buckling of coatings. *Engineering Failure Analysis*, 2015, vol. 47, pp. 338–344. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2013.09.022>.
- [16] Volmir A.S. Stability of deformable systems. Moscow: Nauka, 1967, 984 p. Available at: <https://dwg.ru/dnl/4808?ysclid=ismvpywto225676829>. (In Russ.)
- [17] Bauer S.M., Voronkova E.B. Influence of boundary constraints on the appearance of asymmetrical equilibrium states in circular plates under normal pressure. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2020, no. 1, pp. 38–46. DOI: <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-1-38-46>. (In Russ.)
- [18] Vogt F. Über die Berechnung der Fundamentdeformation Avhandling utgitt av det Norske Videnskaps. Akademi i Oslo: Matematisk-naturvidenskapelig klasse, 1925, 35 p.
- [19] Weber C. The Deformation of Loaded Gears and the Effect on Their Load Carrying Capacity // Department of Scientific and Industrial Research, Sponsored Research, Germany. Report 3, Part I, England. 1949.
- [20] O'Donnell W.J. The additional deflection of a cantilever due to the elasticity of the support. *Journal of the Applied Mechanics*, 1960, vol. 27, issue 3, pp. 461–464. DOI: <http://doi.org/10.1115/1.3644025>.
- [21] O'Donnell W.J. Stresses and deflection in built-up beams. *Journal of Engineering for Industry*, 1963, vol. 85, no. 3, pp. 265–273. DOI: <http://doi.org/10.1115/1.3669856>.
- [22] Brown J.M., Hall A.S. Bending deflection of a circular shaft terminating in a semi-infinite body. *Journal of Applied Mechanics*, 1962, vol. 29, issue 1, pp. 86–90. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3636503>.
- [23] Small N.C. Bending of a Cantilever Plate Supported From an Elastic Half Space. *Journal of Applied Mechanics*, 1961, vol. 28, pp. 387–394.
- [24] Jose Maria De Teresa (Ed.) Nanofabrication: Nanolithography techniques and their applications. Bristol, England: IOP Publishing Ltd. 2020. 450 p. DOI: <http://doi.org/10.1088/978-0-7503-2608-7>.
- [25] Salashchenko N.N., Chkhalo N.I., Dyuzhev N.A. Maskless X-Ray Lithography Based on Moems and Microfocus X-Ray Tubes. *Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*, 2018, no. 10, pp. 10–20. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0207352818100165>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ymtfet>. (In Russ.)
- [26] Silverman J.P. Challenges and progress in X-ray lithography. *Journal of Vacuum Science & Technology B*, 1998, vol. 16, issue 6, pp. 31–37. DOI: <https://doi.org/10.1116/1.590452>.
- [27] Vladimírsky Y., Bourdillon A., et al. Demagnification in proximity X-ray lithography and extensibility to 25 nm by optimizing Fresnel diffraction. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 1999, vol. 32, issue 22, pp. 114–118. DOI: <http://doi.org/10.1088/0022-3727/32/22/102>.
- [28] Cheng Y.L., Li M.L., Lin J.H., Lai J.H., Ke C.T., Huang Y.C. Development of dynamic mask photolithography system. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Mechatronics (ICM'05)*, 2005, pp. 467–471. DOI: <http://doi.org/10.1109/ICMECH.2005.1529302>.
- [29] Lychev S.A., Digilov A.V., Pivovarov N.A. Bending of a circular disk: from cylinder to ultrathin membrane. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, №. 4, pp. 77–105. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-4-77-105>. EDN: <https://www.elibrary.ru/blerei>. (In Russ.)
- [30] Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S. Theory of plates and shells. Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoi literatury, 1963, 635 p. Available at: [https://dl.booksee.org/genesis/794000/f679d6f7228f673194bd1e69961a5405/_as/\[S._P._TIMOSHENKO_i_S._VOINOVSKY-KRIGER\]_Voinovsky\(BookSee.org\).pdf](https://dl.booksee.org/genesis/794000/f679d6f7228f673194bd1e69961a5405/_as/[S._P._TIMOSHENKO_i_S._VOINOVSKY-KRIGER]_Voinovsky(BookSee.org).pdf). (in Russian)
- [31] Anuriev V.I. Handbook of mechanical engineering designer in 3 vols. Vol. 1. 8th edition, revised and enlarged. Zhestkova I.N. (Ed.). Moscow: Mashinostroenie, 2001, 34 p. Available at: <https://www.servotechnica.spb.ru/library/BOOKS/Anurev?ysclid=ismzst00yj406639767>. (In Russ.)