МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-1-23-30

УДК 517.956

Дата: поступления статьи: 15.01.2024
после рецензирования: 19.02.2024
принятия статьи: 28.02.2024

С.Т. Гусейнов
Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджанская Республика
E-mail: sarvanhuseynov@rambler.ru. ORCID: https://orcid.org/0009-0001-7473-2269
М. Дж. Алиев
Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджанская Республика
E-mail: a.mushfiq@rambler.ru. ORCID: https://orcid.org/0009-0007-9084-6251

НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ДЛЯ НЕРАВНОМЕРНО ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

АННОТАЦИЯ

В данной статье рассмотрен класс эллиптических уравнений второго порядка дивергентной структуры с неравномерным степенным вырождением. Подход, используемый в настоящей статье, основан на том, что скорости вырождения собственных чисел матрицы $||a_{ij}(x)||$ (функции $\lambda_i(x)$) являются не функциями необычной нормы $|x|$, а некоторого анизотропного расстояния $|x|_{a^-}$. Предполагается, что задача Дирихле для таких уравнений разрешима в классическом смысле при любой непрерывной граничной функции в любой нормальной области Ω.

Для слабых решений получены оценки вблизи граничной точки решений задачи Дирихле, функции Грина для неравномерно вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка.

Ключевые слова. равномерная эллиптичность; неравномерное вырождение; фундаментальное решение.

Цитирование. Гусейнов С.Т., Алиев М.Дж. Некоторые вспомогательные оценки решений для неравномерно вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2024. Т. 30, № 1. С. 23–30. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-1-23-30.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Сарван Тахмаз оглы Гусейнов — доктор математических наук, доцент кафедры высшей математики, Бакинский государственный университет, Азербайджанская Республика, г. Баку, ул. З. Халилова, 23.
Мушфиг Джалал оглы Алиев — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Бакинский государственный университет, Азербайджанская Республика, г. Баку, ул. З. Халилова, 23.

1. Предварительные сведения

Пусть в n-мерном евклидовом пространстве E_n точек $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $n \geqslant 2$ расположена ограниченная область Ω с границей $\partial\Omega$, причем $0 \in \partial\Omega$.

Рассмотрим в Ω эллиптическое уравнение

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0 \qquad (1.1)$$

в предположении, что коэффициенты $a_{ij}(x)$ являются измеримыми функциями в $\Omega, a_{ij}(x) = a_{ji}(x),\ i,j = 1,2,...,n$ и, кроме того, для $\xi \in E_n, x \in \Omega$

$$\mu \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)\xi_i^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \mu^{-1} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)\xi_i^2, \tag{1.2}$$

здесь $\mu \in (0,1]$ — некоторая константа и

$$\lambda_i(x) = (|x|_{a^-})^{\alpha_i},\ \ |x|_{\alpha^-} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^{\frac{2}{2+\alpha_i}},\ \alpha_i \geqslant 0,\ \ i = 1,2,...,n. \tag{1.3}$$

Отметим, что для равномерно эллиптических уравнений 2-го порядка дивергентной структуры доказательство оценки убывающего решения можно найти в [1; 2]. Настоящая статья тесно связано по тематике с работами [3–12].

Для равномерно эллиптических уравнений соответствующие результаты получены в работе [13]. Что касается неравномерно вырождающихся эллиптических уравнений 2-го порядка, то отметим в этой связи работу [14].

Функция $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{2,\Lambda}(\Omega)$ называется слабым решением уравнения (1.1), если при всякой $\psi(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_{2,\Lambda}(\Omega)$ выполнено интегральное тождество

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = 0.$$

Введем некоторые обозначения:

$$S_r = \{x : |x| \leqslant r\}, C_r = S_r \cap \overline{\Omega},$$

Пусть $\Gamma(x)$ — фундаментальное решение оператора L в R^n с особенностью в точке 0, $\rho(x) = [\Gamma(x)]^{\frac{1}{2-n}}$, $T_r = \{x : \rho(x) \leqslant r\}$. Как показано в [10; 11], существует такая зависящая только от μ и n постоянная α, что в R^n

$$2\alpha\,|x| \leqslant \rho(x) \leqslant (2\alpha)^{-1}\,|x|, \tag{1.4}$$

что эквивалентно включению $S_r(2\alpha) \subset T_r \subset S_r\left(\frac{1}{2\alpha}\right)$.

Положим

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\,(2\alpha)^{\frac{1+\alpha^+}{2}} = 2\lambda_1.$$

Введем еще обозначения: $K_{r_1,r_2} = S_{r_1} \backslash S_{r_2}$, $\quad Q_{r_1,r_2} = T_{r_1} \backslash T_{r_2},\ \alpha^+ = max\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$,

$$M_r(u) = r^{-n} \int\limits_{K_{\alpha^{-1}r, ar}} u^2 dx,$$

$cap(E)$ — гармоническая емкость множества E, $\gamma(r) = r^{2-n} cap(C_r)$ — относительная емкость $\overline{\Omega}$ в шаре S_r.

2. Основные вспомогательные леммы

В этом пункте через u обозначим функцию из пространства $W_2^1(S_\delta)$ ($\delta = const > 0$), удовлетворяющую в $\Omega \cap S_\delta$ уравнению $Lu = 0$ и равную нулю на C_δ.

Лемма 1. Пусть

$$J(r) \equiv \frac{1}{2-n} \int_{\partial T_r} u^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} n_j dS_x, \tag{2.1}$$

где $r < \delta$ и $\{n_j\}$ – проекции единичной внешней нормали к ∂T_r на координатные оси. Тогда

$$2r^{1-n} \int_{T_r} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx = J'(r). \tag{2.2}$$

Доказательство. Положим $t = r^{2-n}$. Тогда

$$Lu^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \tfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\tfrac{\partial u^2}{\partial x_j}\right) = 2\sum_{i,j=1}^{n} \tfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) u \tfrac{\partial u}{\partial x_j}\right) =$$

$$= 2\sum_{i,j=1}^{n} \tfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\tfrac{\partial u}{\partial x_j}\right)u + 2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\tfrac{\partial u}{\partial x_i}\tfrac{\partial u}{\partial x_j} = 2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\tfrac{\partial u}{\partial x_i}\tfrac{\partial u}{\partial x_j}.$$

С другой стороны,

$$\int_\Omega (\Gamma - t)_+ L(u^2)dx = 2\int_\Omega (\Gamma - t)_+ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx,$$

$$\int_\Omega (\Gamma - t)_+ L(u^2)dx = \int_{T_r} (\Gamma - t)_+ L(u^2)\mathrm{dx}.$$

Пусть

$$I = \int_{T_r} (\Gamma - t)L(u^2)dx = \int_{T_r} (\Gamma - t)\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u^2}{\partial x_j}\right)dx.$$

Обозначим

$$w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u^2}{\partial x_j},\ \ i = 1, 2, ..., n.$$

Тогда

$$I = \sum_{i=1}^n \int_{T_r} (\Gamma - t)\frac{\partial}{\partial x_i}w_i dx = \sum_{i=1}^n \int_{T_r}\left[(\Gamma - t)\frac{\partial w_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}w_i\right]dx -$$

$$-\sum_{i=1}^n \int_{T_r} \frac{\partial}{\partial x_i}\left((\Gamma - t)\, w_i\right)dx.$$

Обозначим через $\overline{w} = ((\Gamma - t)w_1, (\Gamma - t)w_2, ..., (\Gamma - t)w_n)$. Тогда $i_1 = \int_{T_r} div\hat{w}dx = \int_{\partial T_r}(\hat{w}, \hat{n})ds = = 0, \hat{w}/\partial T_r = 0$ (т. к. $\Gamma - t = 0$ на ∂T_r).

Тогда

$$I = -\sum_{i=1}^n \int_{T_r} \frac{\partial}{\partial x_i}w_i dx = -\sum_{i,j=1}^n \int_{T_r} a_{ij}\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}\frac{\partial u^2}{\partial x_j}dx =$$

$$= -\sum_{j=1}^n \int_{T_r} \sum_{i=1}^n a_{ij}\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}\frac{\partial u^2}{\partial x_j}dx.$$

Обозначим $z_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}$, $j = 1, 2, ..., n$.

Тогда

$$I = -\sum_{j=1}^n \int_{T_r} z_j\frac{\partial u^2}{\partial x_j}dx = -\sum_{j=1}^n \int_{T_r}\left(\frac{\partial z_j}{\partial x_j}u^2 + z_j\frac{\partial u^2}{\partial x_j}\right)dx + \\ +\sum_{j=1}^n \int_{T_r}\frac{\partial z_j}{\partial x_j}u^2 dx = j_1 + j_2 .$$

Пусть $\hat{z} = \left(u^2 z_1, u^2 z_2, ..., u^2 z_n\right)$. Тогда

$$j_1 = -\sum_{j=1}^n \int_{T_r} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u^2 z_j\right)dx = -\int_{T_r} div\hat{z}dx = -\int_{\partial T_r}(\hat{z}, \hat{n})\,ds =$$

$$= -\sum_{j=1}^n \int_{\partial T_r} u^2 z_j n_j ds = -\sum_{j=1}^n \int_{\partial T_r} u^2 \sum_{i=1}^n a_{ij}\frac{\partial \Gamma}{\partial x_j}n_j ds = -\sum_{i,j=1}^n \int_{\partial T_r} u^2 a_{ij}\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}n_j ds, \tag{2.3}$$

$$j_2 = \sum_{j=1}^n \int_{T_r} \frac{\partial z_j}{\partial x_j}u^2 dx = \sum_{j=1}^n \int_{T_r} u^2 \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}\right)dx =$$

$$= \int_{T_r} u^2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}\right)dx = \int_{T_r} u^2 L\Gamma dx, \tag{2.4}$$

где $\Gamma(x)$ — фундаментальное решение, т. е.

$$L\Gamma(x) = -\delta(x).$$

Другими словами,

$$\int_{T_r} \varphi(x)L\Gamma(x)dx = -\varphi(0),$$

$j_2 = -u^2(0)$ на $0 \in \partial\Omega$, поэтому $j_2 = 0$ и из (2.4) заключаем

$$I = -\sum_{i,j=1}^n \int_{\partial T_r} u^2 a_{ij}\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}n_j ds,$$

$$\frac{2}{2-n}\int_{T_r}(\Gamma-t)\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx=-\frac{1}{2-n}\int_{\partial T_r}u^2\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}n_jds,$$

$$\frac{2}{2-n}\int_{T_r}(\Gamma-t)\sum_{i,j=1}^{n}a_{\mathrm{ij}}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx=J(r),$$

$$J'(r)=\frac{2}{n-2}\frac{\partial}{\partial r}\int_0^r dy\int_{\partial T_y}\left(\Gamma-r^{2-n}\right)\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}ds_y=$$

$$=2r^{1-n}\int_{T_r}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. При $\lambda_1 r<\delta$ справедливо неравенство

$$J(r)\leqslant CM_r(u). \tag{2.5}$$

Доказательство. Заметим, что на ∂T_r

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}n_j=-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}n_in_j\left|\nabla\Gamma\right|\leqslant 0,$$

$$\int_{T_r}L\Gamma dx=\int_{\partial T_r}\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}ds\ \ (\frac{\partial}{\partial\nu}\ \text{— производная по конормали}). \tag{2.6}$$

Знаем, что $L\Gamma(x)=-\delta(x)$.

По определению $\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}n_j$,

$$\int_{T_r}L\Gamma dx=-\int_{T_r}\delta(x)dx=-1.$$

$$\int_{T_r}L\Gamma dx=\int_{\partial T_r}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}n_jds=-1.$$

Тогда

$$J(r)=-\frac{1}{n-2}\int_{\partial T_r}u^2\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}n_jds.$$

Из принципа максимума следует

$$-\frac{1}{n-2}\int_{T_r}u^2\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}n_jdS\leqslant-\frac{1}{n-2}\underset{\partial T_r}{max}\,u^2\int_{\partial T_r}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}n_j\mathrm{dS}=$$

$$=\frac{1}{n-2}\underset{T_r}{max}\,u^2\leqslant\frac{1}{n-2}\underset{S_r(2\lambda_1)^{-1}}{max}u^2=\frac{1}{n-2}\underset{\partial S_r(2\lambda_1)^{-1}}{max}u^2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{n-2}\underset{\partial S_r(2\lambda_1)^{-1}\cup\partial S_r(2\lambda_1)}{max}u^2=\frac{1}{n-2}\underset{K_r\left(\frac{1}{2\lambda_1}2\lambda_1\right)}{max}u^2\leqslant\frac{C}{n-2}M_r(u).$$

В результате получим

$$\underset{K_r\left(\frac{1}{2\lambda_1},2\lambda_1\right)}{max}u^2\leqslant CM_r(u). \tag{2.7}$$

Неравенство (2.5) доказано.

Лемма 3. При $r<R<\delta$ справедливо неравенство

$$J(r)\leqslant CJ(R)\mathrm{exp}\left(-C\int_r^R\gamma(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right). \tag{2.8}$$

Доказательство. В силу леммы 1, учитывая (1.4)

$$J'(r)\geqslant 2\mu r^{1-n}\int_{T_r}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2dx\geqslant Cr^{1-n}\int_{s_r(\lambda_1)}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2dx. \tag{2.9}$$

Из леммы 2 и оценки (2.8) имеем

$$J'(r) \geqslant Cr^{1-n}\frac{C_1 cap_\lambda(C_r(\lambda_1^3))}{r^n\prod\limits_{i=1}^{n}r^{\alpha_{i/2}}}\int\limits_{K_r(\lambda_1\lambda_1^3)}u^2dx \geqslant C\frac{J(\alpha^2 r)}{r}\gamma(\alpha^3 r).$$

С другой стороны,

$$\frac{J'(r)}{J(\alpha^2 r)} \geqslant C\frac{\gamma(\alpha^3 r)}{r}.$$

Интегрируя от r до R, получаем

$$\ln\frac{J(R)}{J(r)} \geqslant C\int_r^R\frac{\gamma(\rho)}{\rho}d\rho.$$

Отсюда, используя оценку $\gamma(\rho)\leqslant 1$ и монотонность $J(r)$, получаем неравенство (2.7). Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть $R<\delta$ и $r\leqslant\alpha^2R$, где α — постоянная из (1.4). Тогда справедливо неравенство

$$\int_{S_r(\alpha)}\sum_{i=1}^n\lambda_i(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2dx \leqslant CJ(R)r^{n-2}exp\left(-C\int_r^R\gamma(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right). \tag{2.10}$$

Доказательство. В силу леммы 1 и (1.4)

$$J'(r)\geqslant Cr^{1-n}\int_{S_r(a)}\sum_{i=1}^n\lambda_i(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2dx.$$

Интегрируя от αr до r

$$\int_{a_r}^r J'(\rho)d\rho \geqslant C\int_{\alpha_r}^r\rho^{1-n}\int_{S_\rho(\alpha)}\sum_{i=1}^n\lambda_i(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2dxd\rho \geqslant$$

$$\geqslant Cr^{2-n}\int_{S_r(\alpha^2)}\sum_{i=1}^n\lambda_i(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2dx,$$

получим

$$J(r)\geqslant Cr^{2-n}\int_{S_r(a)}\sum_{i=1}^n\lambda_i(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2dx.$$

Теперь (2.10) следует из неравенства (2.8).

3. Оценки убывающего решения

Основной целью этого параграфа является доказательство следующего утверждения.

Теорема 1. Пусть функция $u(x)\in W^1_{2,\Lambda}(S_\delta(k))$ удовлетворяет уравнению $Lu=0$ в $\Omega\cap S_\delta(k)$ и равна нулю на $C_\delta(k)$. Тогда $R<\alpha\delta,\ r<\alpha^5R$ и справедлива оценка

$$\max_{S''_r(\alpha)}|u|\leqslant CM_R^{1/2}(u)\exp\left(-C\int\limits_r^R\gamma(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right). \tag{3.1}$$

Доказательство. Применяя формулу А.С. Кронрода [11; 12], получим

$$\int_\Omega F(x)\left|\nabla u\right|dx=\int_{-\infty}^{+\infty}dt\int_{u=t}F(x)dS_x,$$

где $F(x)$ — измеримая по Борелю функция, а функция $u(x)$ удовлетворяет условию Липщица, получаем

$$A=\int_{Q_r\left(\frac{1}{\alpha^2},\alpha^2\right)}u^2\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}\frac{\partial\Gamma}{\partial x_j}dx=\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_{\Gamma(x)=t}u^2\left|\nabla\Gamma\right|\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}\frac{\partial\Gamma}{\partial x_j}}{\left|\nabla\Gamma\right|\left|\nabla\Gamma\right|}dS_x=$$

$$=(2-n)\int_{a^2r}^{a^{-2}r}\tau^{1-n}d\tau\int_{\partial T_r}u^2\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}n_jdS_x,$$

$$A\equiv\int_{a^2r}^{a^{-2}r}J(\tau)\tau^{1-n}d\tau.$$

Применяя лемму 3, приходим к неравенству

$$A \leqslant \mathrm{CJ}(R) r^{2-n} \exp\left(-C\int_r^R \gamma(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right).$$

В силу леммы 4 та же оценка верна для интеграла

$$B \equiv \int_{Q_r\left(\frac{1}{\alpha^2},\alpha^2\right)} \left[\Gamma - \left(\alpha^{-2} r\right)^{2-n}\right]^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx.$$

Поэтому, полагая $v = u\left[\Gamma - \left(\alpha^{-2} r\right)^{2-n}\right]_+$ и

$$N \equiv \int_{CT_{\alpha^2}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx,$$

$$2u\Gamma_+ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \Gamma}{\partial x_j} \leqslant 2\sqrt{\Gamma_+^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}}\sqrt{u^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}\frac{\partial \Gamma}{\partial x_j}} \leqslant$$

$$\leqslant \Gamma_+^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + u^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}\frac{\partial \Gamma}{\partial x_j},$$

получим

$$N \equiv \int_{CT_{\alpha^2}} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx \leqslant 2\left(A+B\right) \leqslant Cr^{2-n}J(R)\exp\left(-C\int_r^R \gamma(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right). \tag{3.2}$$

С другой стороны, так как $v = 0$ вне $S_r\left(\frac{1}{\alpha^3}\right)$, то

$$N \geqslant C\int_{K_r\left(\frac{1}{\alpha^3},\alpha\right)} \sum_{i=1}^n \lambda_i(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 dx \geqslant Cr^{-2}\int_{K_r\left(\frac{1}{\alpha^3},\alpha\right)} v^2 dx \geqslant Cr^{2-n}M_r(u). \tag{3.3}$$

В силу принципа максимума и неравенства (2.6) из (3.1) и (3.2) следует

$$\max_{S_r(a)} u^2 \leqslant \max_{\partial T_r} u^2 \leqslant CM_r(u) \leqslant CJ(R)exp\left(-C\int_r^R \gamma(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right). \tag{3.4}$$

Заметим наконец, что в силу леммы 2 справедливо неравенство $J(R) \leqslant CM_R(u)$, которое вместе с (3.3) и доказывает теорему.

Литература

[1] Мазья В.Г. О регулярности на границе решений эллиптических уравнений и конформного отображения // Доклады Академии наук СССР. 1963. Т. 152, № 6. С. 1297–1300. URL: https://www.mathnet.ru/rus/dan28720.

[2] Мазья В.Г. О модуле непрерывности решения задачи Дирихле вблизи нерегулярной границы // Проблемы математического анализа. Ленинград, 1966. С. 45–58.

[3] De Giorgi E. Sulla differenziabilita e l'analiticita delle estremali degli intergrali multipli regolari // Mem. Acad. Sci. Torino. 1957. Vol. 3, no. 1, pp. 25–43. URL: https://zbmath.org/0084.31901.

[4] Nash J. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations // American Journal of Mathematics. 1958. Vol. 80, No. 4, Pp. 931–954. DOI: https://doi.org/10.2307/2372841.

[5] Morrey C.B. Second order elliptic equations in several variables and Holder continuity // Mathematische Zeitschrift. 1959. Vol. 72. Pp. 146–164. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01162944.

[6] Уральцев Н.Н. О регулярности решений многомерных эллиптических уравнений и вариационных задач // Доклады Академии наук СССР. 1960. Т. 130, № 6. С. 1206–1209.

[7] Stampacchia G. Problemi al contorno ellittici, con dati discontinui, dotati di soluzioni holderiane // Annali di Matematica Pura ed Applicata. 1960. Vol. 51. Pp. 1–37. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02410941.

[8] Moser J. A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1960. Vol. 13, Issue 3, Pp. 457–468. DOI: https://doi.org/10.1002/cpa.3160130308.

[9] Moser J. On Harnack's theorem for elliptic differential equations // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1961. Vol. 14. Issue 3. Pp. 577–591. DOI: https://doi.org/10.1002/cpa.3160140329.

[10] Litman W., Stampacchia G., Weinberger H.F. Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa – Classe de Scienze. 1963. Serie 3, Vol. 17, no. 1–2, pp. 43–77. DOI: http://www.numdam.org/item/ASNSP_1963_3_17_1-2_43_0.

[11] Royden H. The growth of a fundamental solution of an elliptic divergence structure equation // Studies in Mathematical Analysis and Related Topics. 1962. Pp. 333–340. URL: https://zbmath.org/0152.31101.

[12] Алхутов Ю.А. О регулярности граничных точек относительно задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка // Матем. заметки. 1981. Т. 30, Вып. 3. С. 333–342. URL: https://www.mathnet.ru/rus/mzm6197.

[13] Мазья В.Г. О поведении вблизи границы решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в дивергентной форме // Матем. заметки. 1967. Т. 2, Вып. 2. С. 209–220. URL: https://www.mathnet.ru/rus/mzm5480.

[14] Guseynov S.T. The regularity test of boundary point for non-uniformly degenerating second order elliptic equations // Proceedings of IMM of Azerbaijan AS, 1999. Vol. XI. P. 65–77. URL: https://www.imm.az/journals/RMI_eserleri/cild11_N19_1999/meqaleler/65-77.pdf.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-1-23-30

Submited: 15.01.2024
Revised: 19.02.2024
Accepted: 28.02.2024

S.T. Huseynov
Baku State University, Baku, Republic of Azerbaijan
E-mail: sarvanhuseynov@rambler.ru. ORCID: https://orcid.org/0009-0001-7473-2269
M.J. Aliyev
Baku State University, Baku, Republic of Azerbaijan
E-mail: a.mushfiq@rambler.ru. ORCID: https://orcid.org/0009-0007-9084-6251

SOME AUXILIARY ESTIMATES FOR SOLUTIONS TO NON-UNIFORMLY DEGENERATE SECOND-ORDER ELLIPTIC EQUATIONS

ABSTRACT

We consider a class of second order elliptic equations in divergence form with non-uniform exponential degeneracy. The method used is based on the fact that the degeneracy rates of the eigenvalues of the matrix $||a_{ij}(x)||$ (function $\lambda_i(x)$) are not the functions of unusual norm $|x|$, but of some anisotropic distance $|x|_{a^-}$. We assume that the Dirichlet problem for such equations is solvable in the classical sense for every continuous boundary function in any normal domain Ω.

Estimates for the weak solutions of Dirichlet problem near the boundary point are obtained, and Green's functions for second order non-uniformly degenerate elliptic equations are constructed.

Key words: uniform ellipticity; non-uniform degeneration spaces; fundamental solution.

Citation. Huseynov S.T., Aliyev M.J. Some auxiliary estimates for solutions to non-uniformly degenerate second-order elliptic equations. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2024, vol. 30, no. 1, pp. 23–30. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2024-30-1-23-30. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

Sarvan T. Huseynov — Doctor of Mathematical Sciences, associate professor at the Department of Higher Mathematics, Baku State University, 23, Khalilov Street, Baku, AZ 1148, Republic of Azerbaijan.
Mushfig J. Aliyev — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor at the Department of Higher Mathematics, Baku State University, 23, Khalilov Street, Baku, AZ 1148, Republic of Azerbaijan.

References

[1] Mazya V.G. Regularity at the boundary of solutions of elliptic equations and conformal mapping. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1963, vol. 152, number 6, pp. 1297–1300. Available at: https://www.mathnet.ru/rus/dan28720. (In Russ.)

[2] Mazya V.G. On modulus of continuity of the solution to the Dirichlet problem near regular boundary // Problems of Mathematical Analysis. Leningrad, 1966, pp. 45–58. (In Russ.)

[3] De Giorgi E. Sulla differenziabilita e l'analiticita delle estremali degli intergrali multipli regolari. *Mem. Acad. Sci. Torino*, 1957. vol. 3, no. 1, pp. 25–43. Available at: https://zbmath.org/0084.31901. (In Italian)

[4] Nash J. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. *American Journal of Mathematics*, 1958, vol. 80, no. 4, pp. 931–954. DOI: https://doi.org/10.2307/2372841.

[5] Morrey C.B. Second order elliptic equations in several variables and Holder continuity. *Mathematische Zeitschrift*, 1959, vol. 72, pp. 146–164. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01162944.

[6] Uraltseva N.N. On regularity of solutions of multidimensional elliptic equations and variational problems. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1960, vol. 130, no. 6, pp. 1206–1209. (In Russ.)

[7] Stampacchia G. Problemi al contorno ellittici, con dati discontinui, dotati di soluzioni holderiane. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 1960, vol. 51, pp. 1–37. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02410941.

[8] Moser J. A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1960, vol. 13, issue 3, pp. 457–468. DOI: https://doi.org/10.1002/cpa.3160130308.

[9] Moser J. On Harnack's theorem for elliptic differential equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1961, vol. 14, issue 3, pp. 577–591. DOI: https://doi.org/10.1002/cpa.3160140329.

[10] Litman W., Stampacchia G., Weinberger H.F. Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa — Classe de Scienze*, 1963, serie 3, vol. 17, no. 1–2, pp. 43–77. DOI: http://www.numdam.org/item/ASNSP_1963_3_17_1-2_43_0.

[11] Royden H. The growth of a fundamental solution of an elliptic divergence structure equation. *Studies in Mathematical Analysis and Related Topics*, 1962, pp. 333–340. URL: https://zbmath.org/0152.31101.

[12] Alkhutov Yu.A. Regularity of boundary points relative to the Dirichlet problem for second-order elliptic equations. *Mathematical Notes*, 1981, vol. 30, issue 3, pp. 333–342. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01141620. (In English; original in Russian)

[13] Maz'ya V.G. Behavior, near the boundary, of solutions of the Dirichlet problem for a second order elliptic equations in divergent form. *Mathematical Notes*, 1967, vol. 2, issue 2, pp. 610–617. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01094255. (In English; original in Russian)

[14] Guseynov S.T. The regularity test of boundary point for non-uniformly degenerating second order elliptic equations. *Proceedings of IMM of Azerbaijan AS*, 1999, vol. XI, pp. 65–77. Available at: https://www.imm.az/journals/RMI_eserleri/cild11_N19_1999/meqaleler/65-77.pdf.