DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-4-125-132

УДК 629.78:531

Дата: поступления статьи: 10.08.2023
после рецензирования: 25.09.2023
принятия статьи: 05.12.2023

Ю.Н. Горелов
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: yungor07@mail.ru. ORCID: https://orcid/0009-0003-2183-6261
Л.В. Курганская
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: limbo83@mail.ru. ORCID: https://orcid/0000-0003-1513-3802

МОДЕЛИРОВАНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОДВИЖНОЙ АНТЕННЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В ДВУХСТЕПЕННОМ ОПОРНО-ПОВОРОТНОМ УСТРОЙСТВЕ

АННОТАЦИЯ

Рассматривается задача расчета кинематических характеристик подвижного антенного устройства (АУ) по заданным значениям кинематических характеристик линии визирования (ЛВ) "космический аппарат — пункт приема информации" в связанной системе координат космического аппарата. Кинематические характеристики АУ в виде текущих значений углов его поворота и угловых скоростей и ускорений (по соответствующим каналам управления) определяются из условий совмещения ЛВ с осью диаграммы направленности АУ для случая двухстепенного опорно-поворотного устройства со взаимно ортогональными осями поворота АУ.

Ключевые слова: космический аппарат; антенное устройство; опорно-поворотное устройство; кинематические характеристики; линия визирования; каналы управления.

Цитирование. Горелов Ю.Н., Курганская Л.В. Моделирование кинематических характеристик подвижной антенны космического аппарата в двухстепенном опорно-поворотном устройстве // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2023. Т. 29, № 4. С. 125–132. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-4-125-132.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Юрий Николаевич Горелов — доктор технических наук, профессор, директор НИИ проблем моделирования и управления Самарского университета, профессор кафедры дифференциальных уравнений и теории управления. Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.
Любовь Викторовна Курганская — кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник НИИ проблем моделирования и управления Самарского университета, доцент кафедры дифференциальных уравнений и теории управления. Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

В рамках общей задачи расчета кинематических характеристик управляемой подвижной антенны КА в [1] была рассмотрена и решена задача кинематики сложного движения ЛВ «КА — ППИ» («космический аппарат — пункт приема информации»). Еще одной тематически связанной с этой задачей является задача определения кинематических характеристик подвижного АУ КА. Как уже отмечалось в [1], предварительные результаты решения рассматриваемой здесь задачи ранее были кратко представлены в [2].

Итак, далее при рассмотрении задачи расчета кинематических характеристик управляемого подвижного АУ будем предполагать, что в пределах некоторого заданного интервала в каждый момент времени известны кинематические характеристики ЛВ «КА — ППИ», которые заданы в связанной системе координат (ССК) КА в виде векторов $\mathbf{e}_{\text{лв}}^{\text{ССК}}$, $\boldsymbol{\omega}_{\text{лв}}^{\text{ССК}}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}^{\text{ССК}}$. Также пусть с АУ будет связана система координат $\bar{\mathrm{O}}x_{\text{А}}y_{\text{А}}z_{\text{А}}$, которую далее будем называть антенной системой координат (АСК). Соответственно, пусть движение АУ относительно корпуса КА реализуется с помощью некоторого двухстепенного опорно-поворотного устройства (ОПУ) со взаимно ортогональными осями вращения. Одна из осей АСК, например, $\bar{\mathrm{O}}x_{\text{А}}$ пусть будет параллельна оси диаграммы направленности АУ, которая задается ортом $\tilde{\mathbf{s}}_{\text{АУ}} = \tilde{\mathbf{s}}_{\text{АУ}}^{\text{АСК}}$. В исходном положении АУ оси системы координат $\bar{\mathrm{O}}x_{\text{А}}y_{\text{А}}z_{\text{А}}$ будут совпадать с одноименными осями некоторой системы координат $\bar{\mathrm{O}}x_{\text{Р}}y_{\text{Р}}z_{\text{Р}}$, которую далее будем называть реперной системой координат (РСК). В общем случае РСК не совпадает с ССК, а ее ориентация относительно ССК определяется постоянной матрицей перехода $\mathbf{P}_{\text{ССК}}^{\text{РСК}}$ (здесь и далее матрицы перехода для векторов [3]). Поэтому заданные в ССК кинематические характеристики ЛВ далее следует представить в РСК, а именно: $\mathbf{e}_{\text{лв}}^{\text{РСК}} = \mathbf{P}_{\text{ССК}}^{\text{РСК}}\mathbf{e}_{\text{лв}}^{\text{ССК}}$, $\boldsymbol{\omega}_{\text{лв}}^{\text{РСК}} = \mathbf{P}_{\text{ССК}}^{\text{РСК}}\boldsymbol{\omega}_{\text{лв}}^{\text{ССК}}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}^{\text{РСК}} = \mathbf{P}_{\text{ССК}}^{\text{РСК}}\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}^{\text{ССК}}$. Принимая РСК в качестве условно неподвижной системы координат и исходя из известного решения задачи кинематики сложного движения ЛВ [1], можно найти кинематические характеристики ЛВ в подвижной (относительно РСК) системе координат — АСК, если ее движение относительно РСК определено, то есть известны: $\mathbf{P}_{\text{АСК}}^{\text{РСК}} = (\mathbf{P}_{\text{РСК}}^{\text{АСК}})^{\mathrm{T}}$ — матрица перехода от АСК к РСК; $\boldsymbol{\omega}_{\text{АУ}}$ — вектор угловой скорости и $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{АУ}}$ — вектор углового ускорения АУ. Действительно, исходя из заданных в РСК $\mathbf{e}_{\text{лв}}$, $\boldsymbol{\omega}_{\text{лв}}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}$, в соответствии с теоремами о сложении скоростей и ускорений ЛВ в сложном движении [1] можно найти ее кинематические характеристики в относительном движении ЛВ, то есть в АСК, а именно: $\tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}}$, $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{лв}}$ и $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{лв}}$ (здесь, как и в [1], тильдами отмечены векторы, которые определены в подвижной системе координат, то есть здесь в АСК). Для определения кинематических характеристик АУ необходимо воспользоваться условиями наведения его на ППИ на некотором заданном интервале $[t_0, t_f]$, которые имеют следующий вид:

$$\tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}}(t) = \tilde{\mathbf{s}}_{\text{АУ}}(t);\;\; \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{лв}}(t) = 0;\;\; \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{лв}}(t) = 0,\;\; \forall t \in [t_0, t_f]. \tag{1}$$

1. Кинематическая схема ОПУ и определение углов поворота АУ при наведении на ППИ

Пусть требуемая ориентация АУ относительно РСК при совмещении орта $\tilde{\mathbf{s}}_{\text{АУ}}^{\text{АСК}}$ с ортом $\tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}}^{\text{АСК}}$ в режиме наведения АУ на ППИ осуществляется парой последовательных поворотов с помощью двухстепенного ОПУ, а именно: первый поворот АУ на угол ϑ совершается вокруг фиксированной в РСК оси, задаваемой ортом $\mathbf{c}_{\vartheta}^{\text{РСК}}$ (канал управления АУ по углу ϑ); второй поворот АУ на угол φ совершается вокруг фиксированной в АСК оси, задаваемой ортом $\tilde{\mathbf{c}}_{\varphi}^{\text{АСК}}$(канал управления АУ по углу φ). В общем случае необходимо, чтобы попарно орты $\mathbf{c}_{\vartheta}^{\text{РСК}}$ и $\tilde{\mathbf{c}}_{\varphi}^{\text{АСК}}$, $\tilde{\mathbf{c}}_{\varphi}^{\text{АСК}}$ и $\tilde{\mathbf{s}}_{\text{АУ}}^{\text{АСК}}$ не являлись коллинеарными. В практике обычно используются ОПУ, для которых пары ортов $\mathbf{c}_{\vartheta}^{\text{РСК}}$ и $\tilde{\mathbf{c}}_{\varphi}^{\text{АСК}}$, $\tilde{\mathbf{c}}_{\varphi}^{\text{АСК}}$ и $\tilde{\mathbf{s}}_{\text{АУ}}^{\text{АСК}}$ являются взаимно ортогональными. Соответственно, имеет место $\tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}}^{\text{АСК}} = \mathbf{P}(\mathbf{c}_{\varphi})\mathbf{P}(\mathbf{c}_{\vartheta})\,\mathbf{e}_{\text{лв}}^{\text{РСК}}$, где $\mathbf{P}(\mathbf{c}_{\vartheta})$ и $\mathbf{P}(\mathbf{c}_{\varphi})$ — матрицы перехода, которые вычисляются так [3]:

$$\mathbf{P}(\mathbf{c}_{\delta}) = \mathbf{E}_3\cos\delta + (1-\cos\delta)\mathbf{c}_{\delta}\mathbf{c}_{\delta}^{\mathrm{T}} - \mathbf{C}(\mathbf{c}_{\delta})\,\sin\delta,$$

$$\mathbf{c}_{\delta} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, \mathbf{C}(\mathbf{c}_{\delta}) = \begin{bmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{bmatrix}, \delta = \vartheta,\, \varphi.$$

Здесь $\mathbf{E}_3$ — единичная матрица третьего порядка, а $\mathbf{P}_{\text{РСК}}^{\text{АСК}} = \mathbf{P}(\mathbf{c}_{\varphi})\mathbf{P}(\mathbf{c}_{\vartheta})$ — матрица перехода от РСК к АСК.

Выбранная здесь кинематическая схема ОПУ аналогична схеме подвижных АУ для КА типа «Янтарь-4КС1» [4]. При этом следует отметить, что такая схема ОПУ не является единственно возможной. Например, иной может быть и последовательность поворотов АУ.

Так как орт $\tilde{\mathbf{s}}_{\text{АУ}}^{\text{АСК}}$ параллелен оси $\bar{\mathrm{O}}x_{\text{А}}$ (при этом $\tilde{\mathbf{s}}_{\text{АУ}}^{\text{АСК}} = \mathrm{col}\,(1,\ 0,\ 0)$), то каналам управления по углам поворота ϑ и φ будут соответствовать орты $\mathbf{c}_{\vartheta}^{\text{РКС}} = \mathrm{col}\,(0,\ 0,\ 1)$ и $\tilde{\mathbf{c}}_{\varphi}^{\text{АСК}} = \mathrm{col}\,(0,\ -1,\ 0)$. Матрицы $\mathbf{P}(\mathbf{c}_{\vartheta})$ и $\mathbf{P}(\mathbf{c}_{\varphi})$ тогда будут иметь следующий вид:

$$\mathbf{P}(\mathbf{c}_{\vartheta}) = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\;\; \mathbf{P}(\mathbf{c}_{\varphi}) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix},$$

а матрица перехода от РСК к АСК в этом случае будет такой:

$$\mathbf{P}_{\text{РСК}}^{\text{АСК}} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta & \cos\varphi\sin\vartheta & \sin\varphi \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ -\sin\varphi\cos\vartheta & -\sin\varphi\sin\vartheta & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

В силу принятой кинематической схемы ОПУ и из условий наведения АУ на ППИ (1) требуемые углы поворотов $\vartheta(t)$, $\varphi(t)$, а также их первые и вторые производные по времени: $\dot\vartheta(t)$, $\dot\varphi(t)$, $\ddot\vartheta(t)$ и $\ddot\varphi(t)$, то есть угловые скорости и угловые ускорения АУ по соответствующим каналам управления, суть искомые кинематические характеристики АУ. Поэтому рассматриваемая далее задача состоит в том, чтобы исходя из заданных в РСК кинематических характеристик ЛВ определить соответствующие кинематические характеристики АУ.

Режим наведения АУ на ППИ характеризуется условием совмещения орта $\tilde{\mathbf{s}}_{\text{АУ}}^{\text{АСК}}$ с ортом $\tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}}^{\text{АСК}}$ (1), когда выполняется условие: $\tilde{\mathbf{s}}_{\text{АУ}}^{\text{АСК}} = \tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}}^{\text{АСК}}$, где $\tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}}^{\text{АСК}} = \mathbf{P}_{\text{РСК}}^{\text{АСК}}\mathbf{e}_{\text{ЛВ}}^{\text{РСК}}$. Отсюда с учетом вида матрицы $\mathbf{P}_{\text{РСК}}^{\text{АСК}}$, а также векторов $\tilde{\mathbf{s}}_{\text{АУ}}^{\text{АСК}} = \mathrm{col}\,(1,\ 0,\ 0)$ и $\mathbf{e}_{\text{ЛВ}}^{\text{РСК}} = \mathrm{col}\,(e_x, e_y, e_z)$ получим следующую систему уравнений, которой должны удовлетворять любые допустимые комбинации углов поворота АУ, обеспечивающие выполнение условий (1):

$$e_x\cos\varphi\cos\vartheta + e_y\cos\varphi\sin\vartheta + e_z\sin\varphi = 1; \tag{2}$$

$$-e_x\sin\vartheta + e_y\cos\vartheta = 0; \tag{3}$$

$$-e_x\sin\varphi\cos\vartheta - e_y\sin\varphi\sin\vartheta + e_z\cos\varphi = 0. \tag{4}$$

Поскольку $\mathbf{e}_{\text{ЛВ}}^{\text{РСК}} = \left(\mathbf{P}_{\text{РСК}}^{\text{АСК}}\right)^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}}^{\text{АСК}} = \mathbf{P}_{\text{АСК}}^{\text{РСК}}\tilde{\mathbf{e}}_{\text{ЛВ}}^{\text{АСК}}$, то отсюда также следуют соотношения

$$e_x = \cos\varphi\cos\vartheta; e_y = \cos\varphi\sin\vartheta; e_z = \sin\varphi, -\pi \leqslant \tilde\vartheta \leqslant \pi, -\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2, \tag{5}$$

с учетом которых система (2)–(4) выполняется тождественно. Кроме того, в дополнение к (5) отметим также еще одно вспомогательное соотношение: $\sqrt{e_x^2 + e_y^2} = \sqrt{1 - e_z^2} = \cos\varphi$.

Решение системы (2)–(4) с целью определения углов поворота АУ ϑ и φ может быть связано со следующими затруднениями: во-первых, с неединственностью получаемых решений и, во-вторых, с определенными ограничениями на допустимые значения углов поворота АУ, которые могут быть представлены в виде соответствующей области:

$$F(\vartheta,\varphi) \geqslant 0. \tag{6}$$

К ограничениям, формирующих эту область, относятся ограничения на величину углов прокачки по каналам управления АУ, реализуемых с помощью выбранного ОПУ, а также наличие зон затенения диаграммы направленности АУ, которые связаны с попаданием в нее элементов конструкции КА. Конфигурация области (6) в основном определяется местом установки ОПУ на корпусе КА и, соответственно, недопустимыми попаданиями в диаграмму направленности АУ элементов его конструкции. При этом следует отметить, что текущая ориентация орта $\mathbf{e}_{\text{ЛВ}}^{\text{РСК}}$ относительно РСК, определяемая углами поворота АУ ϑ и φ, также зависит и от ориентации ССК в пространстве относительно инерциальной, гринвичской или орбитальной систем координат. В связи с этим отметим, что в общем случае при планировании сеанса связи «КА – ППИ» на каком-либо интервале $[t_0, t_f]$ могут быть получены значения углов поворота АУ, которые нарушают условие $F(\vartheta,\varphi) \geqslant 0$. В общем случае последнее можно ликвидировать с помощью соответствующего выбора текущей ориентации КА в пространстве, так как $\mathbf{e}_{\text{ЛВ}}^{\text{РСК}} = \mathbf{P}_{\text{ССК}}^{\text{РСК}}\mathbf{e}_{\text{ЛВ}}^{\text{ССК}}$.

Рассматривая далее ОПУ для одного из указанных выше КА [4], определим вспомогательные углы поворота АУ — $\tilde\vartheta$ и $\tilde\varphi$, которые задаются соотношениями:

$$\sin\tilde\vartheta = \frac{e_y}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}}; \cos\tilde\vartheta = \frac{e_x}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2}}, -\pi \leqslant \tilde\vartheta \leqslant \pi; \tag{7}$$

$$\sin\tilde\varphi = e_z; -\pi/2 \leqslant \tilde\varphi \leqslant \pi/2, \tag{8}$$

которые определяют прямоугольную область $\tilde F(\vartheta,\varphi) \geqslant 0$ для допустимых значений $\tilde\vartheta$ и $\tilde\varphi$ для (7), (8). В зависимости от положения реперной системы координат $\bar{O}x_{\text{р}}y_{\text{р}}z_{\text{р}}$ относительно корпуса КА вместо (8) также может быть введено и другое условие:

$$\sin\tilde\varphi = e_z; \cos\tilde\varphi = \sqrt{1 - e_z^2}\,\mathrm{sign}\,(e_x) = \sqrt{e_x^2 + e_y^2}\,\mathrm{sign}\,(e_x), 0 \leqslant \tilde\varphi \leqslant \pi.$$

Нетрудно установить, что вычисляемые согласно (7), (8) значения $\sin\tilde\vartheta$, $\cos\tilde\vartheta$, $\sin\tilde\varphi$ и $\cos\tilde\varphi$ удовлетворяют системе уравнений (2)–(4). Соответственно, в случае $e_z = \pm 1$, то есть когда ЛВ совмещается с ортом $\mathbf{c}_{\vartheta}^{\text{РСК}}$ (при этом $\mathbf{c}_{\vartheta}^{\text{РСК}}\cdot\mathbf{e}_{\text{ЛВ}}^{\text{РСК}} = \pm 1$), тогда $\tilde\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ и $\cos\tilde\varphi = 0$, а угол $\tilde\vartheta$ не определен.

В общем случае разность множеств в виде областей $F(\vartheta,\varphi) \geqslant 0$ и $\tilde{F}(\vartheta,\varphi) \geqslant 0$ может быть непустым множеством, например, за счет более широкого диапазона углов прокачки ОПУ. Помимо опорных значений углов поворота АУ (7), (8) также возможны допустимые значения, например, для ϑ и φ, для которых выполняются условия: $\vartheta = \tilde{\vartheta} + k\pi,\ k = 0, \pm1, \pm2, ...;\ \varphi = \tilde{\varphi} + l\pi,\ l = 0, \pm1, \pm2, ...$ При этом выбор текущей пары углов поворота АУ из их допустимой совокупности, определяемой этими соотношениями, должен производиться с учетом имеющихся конструктивных ограничений для ОПУ. Соответственно, внутри интервала наведения АУ – $[t_0, t_f]$ выбор текущей пары его углов поворота должен предопределяться значениями углов поворота АУ, вычисленных в предыдущие моменты времени, и, быть может, с учетом значений производных $\dot{\vartheta}(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$, для того чтобы исключить разрывы в программах наведения $\vartheta(t)$ и $\varphi(t)$ $\forall t \in [t_0, t_f]$.

2. К определению угловых скоростей и ускорений АУ относительно РСК

Пусть заданы: $\mathbf{e}_{\text{лв}} = \mathbf{e}_{\text{лв}}^{\text{РСК}}$, $\boldsymbol{\omega}_{\text{лв}} = \boldsymbol{\omega}_{\text{лв}}^{\text{РСК}}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}^{\text{РСК}}$, а также матрица $\mathbf{P}_{\text{РСК}}^{\text{АСК}}$ (или, что то же самое, углы поворота АУ ϑ и φ) для каждого момента сеанса связи. Будем далее рассматривать РСК как условно неподвижную систему координат, а АСК как систему координат, вращающуюся относительно РСК с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_{\text{АУ}}$ и, соответственно, с угловым ускорением $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{АУ}}$. Обозначая через $\tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}}$, $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{лв}}$ и $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{лв}}$ кинематические характеристики ЛВ в АСК и учитывая, что $\tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}} = \mathbf{e}_{\text{лв}}$ (но $\tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}}^{\text{АСК}} = \mathbf{P}_{\text{РСК}}^{\text{АСК}} \mathbf{e}_{\text{лв}}^{\text{РСК}}$), то исходя из теорем о сложении угловых скоростей и угловых ускорений ЛВ [1], получим:

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{лв}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{лв}} + \mathbf{e}_{\text{лв}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{АУ}} \times \mathbf{e}_{\text{лв}}), \tag{9}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{лв}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}^{Trans} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}^{Rotor}, \tag{10}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}^{Trans}$ — переносное угловое ускорение ЛВ, вычисляемое по формуле [1]:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}^{Trans} = \mathbf{e}_{\text{лв}} \times (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{АУ}} \times \mathbf{e}_{\text{лв}}) + \mathbf{e}_{\text{лв}} \times [\boldsymbol{\omega}_{\text{АУ}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{АУ}} \times \mathbf{e}_{\text{лв}})];$$

$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}^{Rotor}$ — поворотное угловое ускорение ЛВ, вычисляемое по формуле [1]:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}^{Rotor} = -\frac{2(\tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{АУ}})}{r_{\text{лв}}} \tilde{\mathbf{v}}_{\text{лв}}^*, \tilde{\mathbf{v}}_{\text{лв}}^* = \tilde{\mathbf{v}}_{\text{лв}} - (\tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_{\text{лв}})\,\tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}} = \tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}} \times (\tilde{\mathbf{v}}_{\text{лв}} \times \tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}}).$$

В режиме наведения АУ на ППИ (1) требуется, чтобы в каждый момент времени $t \in [t_0, t_f]$ сеанса связи выполнялось условие $\mathbf{s}_{\text{АУ}}^{\text{АСК}} = \tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}}^{\text{АСК}}$, а также условия $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{лв}}(t) \equiv 0$, $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{лв}}(t) \equiv 0$, $\forall t \in [t_0, t_f]$. С учетом $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}^{Rotor} = 0$ (так как при указанных условиях $\tilde{\mathbf{v}}_{\text{лв}}^* = 0$) из выражений (9), (10) тогда получим следующие соотношения:

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{лв}} = \mathbf{e}_{\text{лв}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{АУ}} \times \mathbf{e}_{\text{лв}}), \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}} = \mathbf{e}_{\text{лв}} \times (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{АУ}} \times \mathbf{e}_{\text{лв}}) + \mathbf{e}_{\text{лв}} \times [\boldsymbol{\omega}_{\text{АУ}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{АУ}} \times \mathbf{e}_{\text{лв}})]. \tag{12}$$

В соотношениях (11) и (12) фигурируют определяемые величины – угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_{\text{АУ}}$ и угловое ускорение $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{АУ}}$ АУ, которые непосредственно связаны с его кинематическими характеристиками по соответствующим каналам управления (в виде первых и вторых производных от углов поворота АУ — ϑ и φ).

3. Определение угловых скоростей вращения АУ по каналам управления — $\dot{\vartheta}$ и $\dot{\varphi}$

Так как угловая скорость АУ относительно РСК равна векторной сумме угловых скоростей вращения по каналам управления ОПУ, то имеет место

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{АУ}} = \dot{\vartheta}\,\mathbf{c}_{\vartheta} + \dot{\varphi}\,\mathbf{c}_{\varphi}, \tag{13}$$

где $\mathbf{c}_{\varphi} = (\mathbf{c}_{\varphi})^{\text{РСК}} = \mathbf{P}_{\text{АСК}}^{\text{РСК}} \tilde{\mathbf{c}}_{\varphi}^{\text{АСК}} = \text{col}\,(\sin\vartheta,\ -\cos\vartheta,\ 0)$. Подставляя (13) в (11) и раскрывая двойные векторные произведения с учетом $\mathbf{c}_{\varphi} \cdot \mathbf{e}_{\text{лв}} \equiv 0$, а также учитывая (5), получим

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{лв}} = \dot{\vartheta}\,\mathbf{c}_{\vartheta} + \dot{\varphi}\,\mathbf{c}_{\varphi} - \dot{\vartheta}\mathbf{e}_{\text{лв}} \sin\varphi = \boldsymbol{\omega}_{\text{АУ}} - \dot{\gamma}\mathbf{e}_{\text{лв}}, \tag{14}$$

где $\dot{\gamma} = \dot{\vartheta}\,(\mathbf{c}_{\vartheta} \cdot \mathbf{e}_{\text{лв}}) = \dot{\vartheta}\,e_z = \dot{\vartheta} \sin\varphi$ — компонента угловой скорости АУ, направленная вдоль ЛВ. Проектируя (14) на оси РСК, получим с учетом $\mathbf{e}_{\text{лв}}^{\text{РКС}} = \text{col}\,(e_x, e_y, e_z)$ и $\boldsymbol{\omega}_{\text{лв}}^{\text{РКС}} = \text{col}\,(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ следующую систему уравнений относительно $\dot{\vartheta}$, $\dot{\varphi}$ 8 $\dot{\gamma}$:

$$\omega_x = \dot{\varphi}\,\sin\vartheta - \dot{\gamma}\,e_x; \omega_y = -\dot{\varphi}\,\cos\vartheta - \dot{\gamma}\,e_y; \omega_z = \dot{\vartheta} - \dot{\gamma}\,e_z. \tag{15}$$

С учетом (8) и $\dot\gamma = \dot\vartheta\, e_z$ из третьего уравнения (15) получим

$$\dot\vartheta = \frac{\omega_z}{1 - e_z^2} = \frac{\omega_z}{\cos^2\varphi}, \tag{16}$$

а также

$$\dot\gamma = \frac{\omega_z \sin\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

Если $e_z \to \pm\, 1$, то в выражении для $\dot\vartheta$ (16) (и, соответственно, для $\dot\gamma$) имеет место неопределенность вида 0/0, так как при этом $\varphi \to \pm\,\pi/2$, а $\omega_z \to 0$ в силу $\mathbf{e}_{\text{лв}} \cdot \omega_{\text{лв}} \equiv 0$. Из первого и второго уравнений системы (15) с учетом (7), (8) также получим

$$\dot\varphi = \omega_x \sin\vartheta - \omega_y \cos\vartheta. \tag{17}$$

Учитывая $\mathbf{c}_\varphi = \mathrm{col}\,(\sin\vartheta,\ -\cos\vartheta,\ 0)$, выражение (17) можно переписать в виде

$$\dot\varphi = \boldsymbol\omega_{\text{лв}} \cdot \mathbf{c}_\varphi. \tag{18}$$

Следует отметить, что формулы для расчета производных $\dot\vartheta$ (16) и $\dot\varphi$ (17) можно получить и непосредственно при дифференцировании соответствующих выражений для углов поворота АУ (7), (8) с учетом соотношения $\dfrac{d\mathbf{e}_{\text{лв}}}{dt} = \boldsymbol\omega_{\text{лв}} \times \mathbf{e}_{\text{лв}}$.

4. Определение угловых ускорений вращения АУ по каналам управления — $\ddot\vartheta$ и $\ddot\varphi$

Получим в настоящем разделе соотношения для расчета значений производных $\ddot\vartheta$, $\ddot\varphi$. Так как по определению $\boldsymbol\varepsilon_{\text{АУ}} = \dfrac{d\,\boldsymbol\omega_{\text{АУ}}}{d\,t}$, то, дифференцируя выражение для $\boldsymbol\omega_{\text{АУ}}$ (13) и учитывая, что $\dfrac{d\,\mathbf{c}_\varphi}{d\,t} = \dot\vartheta\,\mathbf{c}_\vartheta \times \mathbf{c}_\varphi$, получим следующее выражение для $\boldsymbol\varepsilon_{\text{АУ}}$ (в РСК):

$$\boldsymbol\varepsilon_{\text{АУ}} = \ddot\vartheta\,\mathbf{c}_\vartheta + \ddot\varphi\,\mathbf{c}_\varphi + \dot\vartheta\,\dot\varphi\,\mathbf{c}_\vartheta \times \mathbf{c}_\varphi, \tag{19}$$

которое с учетом $\mathbf{c}_\vartheta = \mathrm{col}\,(0,\ 0,\ 1)$, $\mathbf{c}_\varphi = \mathbf{c}_\varphi^{\text{РСК}} = \mathbf{P}_{\text{АСК}}^{\text{РСК}}\mathbf{c}_\varphi^{\text{АСК}} = \mathbf{P}_{\text{АСК}}^{\text{РСК}}\mathrm{col}\,(0, -1, 0) = \mathrm{col}\,(\sin\vartheta,\ -\cos\vartheta,\ 0)$ и $\mathbf{c}_\vartheta \times \mathbf{c}_\varphi = \mathrm{col}\,(\cos\vartheta,\ \sin\vartheta,\ 0)$ в координатной форме имеет вид

$$\boldsymbol\varepsilon_{\text{АУ}} = \ddot\vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \ddot\varphi \begin{bmatrix} \sin\vartheta \\ -\cos\vartheta \\ 0 \end{bmatrix} + \dot\vartheta\,\dot\varphi \begin{bmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot\varphi\sin\vartheta + \dot\vartheta\,\dot\varphi\cos\vartheta \\ -\ddot\varphi\cos\vartheta + \dot\vartheta\,\dot\varphi\sin\vartheta \\ \ddot\vartheta \end{bmatrix}.$$

Подставив выражения для $\boldsymbol\omega_{\text{АУ}}$ (13) и $\boldsymbol\varepsilon_{\text{АУ}}$ (19) в уравнение (12), получим соотношения, которые в этом случае будут содержать искомые $\ddot\vartheta$, $\ddot\varphi$. При этом, естественно, предполагается, что $\dot\vartheta$ (16) и $\dot\varphi$ (17) известны. С этой целью вначале необходимо раскрыть с учетом (13) и (19) в правой части (12) векторные произведения, а именно: во-первых, первое слагаемое $\mathbf{e}_{\text{лв}} \times (\boldsymbol\varepsilon_{\text{АУ}} \times \mathbf{e}_{\text{лв}})$ в правой части (12); во-вторых, там же второе слагаемое $\mathbf{e}_{\text{лв}} \times [\boldsymbol\omega_{\text{АУ}} \times (\boldsymbol\omega_{\text{АУ}} \times \mathbf{e}_{\text{лв}})]$.

4.1. Вначале преобразуем выражение $\mathbf{e}_{\text{лв}} \times (\boldsymbol\varepsilon_{\text{АУ}} \times \mathbf{e}_{\text{лв}})$, которое после раскрытия двойного векторного произведения будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{e}_{\text{лв}} \times (\boldsymbol\varepsilon_{\text{АУ}} \times \mathbf{e}_{\text{лв}}) = \boldsymbol\varepsilon_{\text{АУ}} - (\boldsymbol\varepsilon_{\text{АУ}} \cdot \mathbf{e}_{\text{лв}})\ \mathbf{e}_{\text{лв}},$$

и, соответственно, в координатной форме с учетом (19) получим:

$$\mathbf{e}_{\text{лв}} \times (\boldsymbol\varepsilon_{\text{АУ}} \times \mathbf{e}_{\text{лв}}) = \begin{bmatrix} \ddot\varphi\sin\vartheta + \dot\vartheta\,\dot\varphi\cos\vartheta \\ -\ddot\varphi\cos\vartheta + \dot\vartheta\,\dot\varphi\sin\vartheta \\ \ddot\vartheta \end{bmatrix} - (\boldsymbol\varepsilon_{\text{АУ}} \cdot \mathbf{e}_{\text{лв}}) \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix},$$

где с учетом (19) и (5), (7), (8)

$$\boldsymbol\varepsilon_{\text{АУ}} \cdot \mathbf{e}_{\text{лв}} = \ddot\vartheta\,\mathbf{c}_\vartheta \cdot \mathbf{e}_{\text{лв}} + \ddot\varphi\,\mathbf{c}_\varphi \cdot \mathbf{e}_{\text{лв}} + \dot\vartheta\,\dot\varphi\,(\mathbf{c}_\vartheta \times \mathbf{c}_\varphi) \cdot \mathbf{e}_{\text{лв}} =$$
$$= \ddot\vartheta e_z + \ddot\varphi(e_x\sin\vartheta - e_y\cos\vartheta) + \dot\vartheta\,\dot\varphi(e_x\cos\vartheta + e_y\sin\vartheta) = \ddot\vartheta\sin\varphi + \dot\vartheta\,\dot\varphi\cos\varphi.$$

Поэтому в конечном счете тогда получим

$$\mathbf{e}_{\text{лв}} \times (\boldsymbol\varepsilon_{\text{АУ}} \times \mathbf{e}_{\text{лв}}) = \begin{bmatrix} \ddot\varphi\sin\vartheta + \dot\vartheta\,\dot\varphi\cos\vartheta \\ -\ddot\varphi\cos\vartheta + \dot\vartheta\,\dot\varphi\sin\vartheta \\ \ddot\vartheta \end{bmatrix} - (\ddot\vartheta\sin\varphi + \dot\vartheta\,\dot\varphi\cos\varphi) \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta \\ \cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\ddot\vartheta\sin\varphi\cos\varphi\cos\vartheta + \ddot\varphi\sin\vartheta + \dot\vartheta\,\dot\varphi\cos\vartheta\sin^2\varphi \\ -\ddot\vartheta\sin\varphi\cos\varphi\sin\vartheta - \ddot\varphi\cos\vartheta + \dot\vartheta\dot\varphi\sin\vartheta\sin^2\varphi \\ \ddot\vartheta\cos^2\varphi - \dot\vartheta\,\dot\varphi\sin\varphi\cos\varphi \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Соответственно, в векторной записи вместо (20) будет иметь место:

$$\mathbf{e}_{\text{лв}} \times (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{АУ}} \times \mathbf{e}_{\text{лв}}) = \ddot\vartheta\,\mathbf{c}_\vartheta + \ddot\varphi\,\mathbf{c}_\varphi + \dot\vartheta\,\dot\varphi\,\mathbf{c}_\vartheta \times \mathbf{c}_\varphi - \Big[(\ddot\vartheta\,\mathbf{c}_\vartheta + \ddot\varphi\,\mathbf{c}_\varphi + \dot\vartheta\,\dot\varphi\,\mathbf{c}_\vartheta \times \mathbf{c}_\varphi)\cdot\mathbf{e}_{\text{лв}}\Big]\,\mathbf{e}_{\text{лв}} =$$

$$= \ddot\vartheta\,(\mathbf{c}_\vartheta - \mathbf{e}_{\text{лв}}\sin\varphi) + \ddot\varphi\,\mathbf{c}_\varphi + \dot\vartheta\,\dot\varphi\,(\mathbf{c}_\vartheta \times \mathbf{c}_\varphi - \mathbf{e}_{\text{лв}}\cos\varphi). \tag{21}$$

Очевидно, проектируя выражение (21) на оси РСК, получим координатное представление для $\mathbf{e}_{\text{лв}} \times$ $\times\,(\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{АУ}} \times \mathbf{e}_{\text{лв}})$ в виде (20).

4.2. Рассмотрим теперь и раскроем второе слагаемое в правой части (12). Вначале с учетом (13) найдем $\boldsymbol{\omega}_{\text{АУ}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{АУ}} \times \mathbf{e}_{\text{лв}})$, а затем получим и выражение для $\mathbf{e}_{\text{лв}} \times [\boldsymbol{\omega}_{\text{АУ}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{АУ}} \times \mathbf{e}_{\text{лв}})]$.

Итак, с учетом (13) получим

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{АУ}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{АУ}} \times \mathbf{e}_{\text{лв}}) = (\dot\vartheta\,\mathbf{c}_\vartheta + \dot\varphi\,\mathbf{c}_\varphi) \times \Big[(\dot\vartheta\,\mathbf{c}_\vartheta + \dot\varphi\,\mathbf{c}_\varphi) \times \mathbf{e}_{\text{лв}}\Big] =$$

$$= (\dot\vartheta\,\mathbf{c}_\vartheta + \dot\varphi\,\mathbf{c}_\varphi) \times (\dot\vartheta\,\mathbf{c}_\vartheta \times \mathbf{e}_{\text{лв}} + \dot\varphi\,\mathbf{c}_\varphi \times \mathbf{e}_{\text{лв}}) =$$

$$= \dot\vartheta^2\,\mathbf{c}_\vartheta \times (\mathbf{c}_\vartheta \times \mathbf{e}_{\text{лв}}) + \dot\varphi^2\,\mathbf{c}_\varphi \times (\mathbf{c}_\varphi \times \mathbf{e}_{\text{лв}}) + \dot\vartheta\dot\varphi\,[\mathbf{c}_\varphi \times (\mathbf{c}_\vartheta \times \mathbf{e}_{\text{лв}}) + \mathbf{c}_\vartheta \times (\mathbf{c}_\varphi \times \mathbf{e}_{\text{лв}})]$$

или, раскрывая соответствующие двойные векторные произведения: $\mathbf{c}_\vartheta \times (\mathbf{c}_\vartheta \times \mathbf{e}_{\text{лв}}) = \mathbf{c}_\vartheta\sin\varphi - \mathbf{e}_{\text{лв}}$, $\mathbf{c}_\varphi \times (\mathbf{c}_\varphi \times \mathbf{e}_{\text{лв}}) = -\mathbf{e}_{\text{лв}}$, $\mathbf{c}_\varphi \times (\mathbf{c}_\vartheta \times \mathbf{e}_{\text{лв}}) = 0$, $\mathbf{c}_\vartheta \times (\mathbf{c}_\varphi \times \mathbf{e}_{\text{лв}}) = \mathbf{c}_\varphi\sin\varphi$, полученное выражение можно переписать в следующем виде:

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{АУ}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{АУ}} \times \mathbf{e}_{\text{лв}}) = \dot\vartheta^2\,(\mathbf{c}_\vartheta\sin\varphi - \mathbf{e}_{\text{лв}}) - \dot\varphi^2\,\mathbf{e}_{\text{лв}} + \dot\vartheta\dot\varphi\mathbf{c}_\varphi\sin\varphi. \tag{22}$$

Умножая соотношение (22) слева векторно на $\mathbf{e}_{\text{лв}}$, с учетом $\mathbf{e}_{\text{лв}} \times \mathbf{c}_\vartheta = \operatorname{col}(\cos\varphi\sin\vartheta, -\cos\varphi\cos\vartheta, 0)$ и $\mathbf{e}_{\text{лв}} \times \mathbf{c}_\varphi = \operatorname{col}(\sin\varphi\cos\vartheta, -\sin\varphi\sin\vartheta, -\cos\varphi)$ получим

$$\mathbf{e}_{\text{лв}} \times [\boldsymbol{\omega}_{\text{АУ}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{АУ}} \times \mathbf{e}_{\text{лв}})] = \dot\vartheta^2\,(\mathbf{e}_{\text{лв}} \times \mathbf{c}_\vartheta)\sin\varphi + \dot\vartheta\dot\varphi(\mathbf{e}_{\text{лв}} \times \mathbf{c}_\varphi)\sin\varphi. \tag{23}$$

Проектируя выражение (23) на оси РСК, перепишем $\mathbf{e}_{\text{лв}} \times [\boldsymbol{\omega}_{\text{АУ}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{АУ}} \times \mathbf{e}_{\text{лв}})]$ в координатной форме так:

$$\mathbf{e}_{\text{лв}} \times [\boldsymbol{\omega}_{\text{АУ}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{АУ}} \times \mathbf{e}_{\text{лв}})] = \begin{bmatrix} \dot\vartheta^2\,\sin\varphi\cos\varphi\sin\vartheta + \dot\vartheta\,\dot\varphi\,\sin^2\varphi\cos\vartheta \\ -\dot\vartheta^2\,\sin\varphi\cos\varphi\cos\vartheta + \dot\vartheta\,\dot\varphi\,\sin^2\varphi\sin\vartheta \\ -\dot\vartheta\,\dot\varphi\sin\varphi\cos\varphi \end{bmatrix}. \tag{24}$$

4.3. Итак, с учетом (21) и (23) из (10) получим

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}} = \mathbf{e}_{\text{лв}} \times (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{АУ}} \times \mathbf{e}_{\text{лв}}) + \mathbf{e}_{\text{лв}} \times [\boldsymbol{\omega}_{\text{АУ}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{АУ}} \times \mathbf{e}_{\text{лв}})] =$$

$$= \ddot\vartheta\,(\mathbf{c}_\vartheta - \mathbf{e}_{\text{лв}}\sin\varphi) + \ddot\varphi\,\mathbf{c}_\varphi + \dot\vartheta^2\,(\mathbf{e}_{\text{лв}} \times \mathbf{c}_\vartheta)\sin\varphi + \dot\vartheta\dot\varphi[\mathbf{c}_\vartheta \times \mathbf{c}_\varphi - \mathbf{e}_{\text{лв}}\cos\varphi + (\mathbf{e}_{\text{лв}} \times \mathbf{c}_\varphi)\sin\varphi]. \tag{25}$$

В координатной форме выражение (25) (как и (20), (24), записанное в проекциях на оси РСК), с учетом вышеприведенных соотношений для $\mathbf{e}_{\text{лв}} \times \mathbf{c}_\vartheta$ и $\mathbf{e}_{\text{лв}} \times \mathbf{c}_\varphi$ будет иметь вид

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ddot\vartheta\sin\varphi\cos\varphi\cos\vartheta + \ddot\varphi\sin\vartheta + \dot\vartheta^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\vartheta + 2\dot\vartheta\,\dot\varphi\cos\vartheta\sin^2\varphi \\ -\ddot\vartheta\sin\varphi\cos\varphi\sin\vartheta - \ddot\varphi\cos\vartheta - \dot\vartheta^2\sin\varphi\cos\varphi\cos\vartheta + 2\dot\vartheta\dot\varphi\sin\vartheta\sin^2\varphi \\ \ddot\vartheta\cos^2\varphi - 2\dot\vartheta\,\dot\varphi\sin\varphi\cos\varphi \end{bmatrix},$$

а отсюда следует такая система уравнений относительно искомых $\ddot\vartheta$, $\ddot\varphi$:

$$\varepsilon_x = -\ddot\vartheta\sin\varphi\cos\varphi\cos\vartheta + \ddot\varphi\sin\vartheta + \dot\vartheta^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\vartheta + 2\dot\vartheta\,\dot\varphi\cos\vartheta\sin^2\varphi; \tag{26}$$

$$\varepsilon_y = -\ddot\vartheta\sin\varphi\cos\varphi\sin\vartheta - \ddot\varphi\cos\vartheta - \dot\vartheta^2\sin\varphi\cos\varphi\cos\vartheta + 2\dot\vartheta\dot\varphi\sin\vartheta\sin^2\varphi; \tag{27}$$

$$\varepsilon_z = \ddot\vartheta\cos^2\varphi - 2\dot\vartheta\,\dot\varphi\sin\varphi\cos\varphi. \tag{28}$$

Из уравнения (28) непосредственно следует

$$\ddot\vartheta = \frac{\varepsilon_z + 2\dot\vartheta\,\dot\varphi\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^2\varphi}, \tag{29}$$

а отсюда с учетом выражений для $\dot\vartheta$ (16) и $\dot\varphi$ (17) также получим

$$\ddot\vartheta = \frac{\varepsilon_z\cos\varphi + 2\omega_z(\omega_x\sin\vartheta - \omega_y\cos\vartheta)\sin\varphi}{\cos^3\varphi}. \tag{30}$$

Соответственно, с помощью уравнений (26) и (27) найдем выражение для $\ddot{\varphi}$ таким образом: умножим уравнение (26) на $\sin\vartheta$, а уравнение (27) — на $\cos\vartheta$ и затем, вычитая из первого второе уравнение, получим

$$\ddot{\varphi} = \varepsilon_x \sin\vartheta - \varepsilon_y \cos\vartheta + \dot{\vartheta}^2 \sin\varphi\cos\varphi. \tag{31}$$

Подставив в (31) выражение (16), также получим

$$\ddot{\varphi} = \varepsilon_x \sin\vartheta - \varepsilon_y \cos\vartheta + \frac{\omega_z^2 \mathrm{tg}\,\varphi}{\cos^2\varphi}. \tag{32}$$

Приведенные выше формулы для расчета производной $\ddot{\vartheta}$ — (29) и (30) — непосредственно можно получить и при дифференцировании выражения для $\dot{\vartheta}$ с учетом (16) и (17). Соответственно, дифференцируя $\dot{\varphi} = \omega_x\,\sin\vartheta - \omega_y\,\cos\vartheta$ (17), с учетом $\dot{\omega}_x = \varepsilon_x$ и $\dot{\omega}_y = \varepsilon_y$ получим

$$\ddot{\varphi} = \varepsilon_x\,\sin\vartheta - \varepsilon_y\,\cos\vartheta + \dot{\vartheta}\,(\omega_x\,\cos\vartheta + \omega_y \sin\vartheta). \tag{33}$$

Очевидно, что, продифференцировав соотношение (18), а именно:

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\boldsymbol{\omega}_{\text{лв}}}{dt}\cdot\mathbf{c}_\varphi + \boldsymbol{\omega}_{\text{лв}}\cdot\frac{d\mathbf{c}_\varphi}{dt} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}\cdot\mathbf{c}_\varphi + \dot{\vartheta}\boldsymbol{\omega}_{\text{лв}}\cdot(\mathbf{c}_\vartheta\times\mathbf{c}_\varphi) =$$
$$= \varepsilon_x \sin\vartheta - \varepsilon_y\cos\vartheta + \dot{\vartheta}(\omega_x\cos\vartheta + \omega_y\sin\vartheta),$$

получим соотношение (33). Если сравнить правые части (31) и (33), то получим следующее соотношение: $\dot{\vartheta}\sin\varphi\cos\varphi = \omega_x\cos\vartheta + \omega_y\sin\vartheta$.

Выводы

Рассмотрена и решена задача расчета кинематических характеристик подвижного АУ КА в виде его углов поворота, реализуемых с помощью двухстепенного опорно-поворотного устройства при наведении АУ на соответствующий пункт приема информации [1], а также в виде первых и вторых производных от текущих углов поворота АУ. При решении этой задачи были применены результаты решения задачи кинематики сложного движения ЛВ для подвижной АУ в виде соответствующих теорем о сложении угловых скоростей и угловых ускорений [1]. Полученные соотношения для расчета значений производных $\dot{\vartheta}$ — (16) и $\dot{\varphi}$ — (17), а также для расчета $\ddot{\vartheta}$ — (29) и $\ddot{\varphi}$ — (32), исходя из заданных в связанной системе координат КА кинематических характеристик ЛВ, необходимы для высокоточного моделирования процессов наведения подвижных АУ.

Литература

[1] Горелов Ю.Н., Курганская Л.В. Моделирование кинематических характеристик линии визирования подвижной антенны космического аппарата при ее наведении на пункт приема информации // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2023. Т. 29, № 4. С. 77–84.

[2] Горелов Ю.Н., Горелова О.И., Мантуров А.И. Моделирование кинематических характеристик управляемой подвижной антенны космического аппарата // Управление движением и навигация летательных аппаратов: сб. тр. XI Всероссийского научно-технического семинара по управлению движением и навигации летательных аппаратов. Самара, 2003. С. 68–73.

[3] Стражева И.В., Мелкумов В.С. Векторно-матричные методы в механике полета. Москва: Машиностроение, 1973. 260 с. URL: https://libarch.nmu.org.ua/bitstream/handle/GenofondUA/66671/eab332aa52099a8798176d8d05a37a16.djvu?sequence=1&isAllowed=y.

[4] Космическое аппаратостроение. Научно-технические исследования и практические разработки ГНПРКЦ "ЦСКБ-Прогресс". 2-е изд., испр. и доп. / А.Н. Кирилин, Г.П. Аншаков, Р.Н. Ахметов, А.Д. Сторож. Самара, 2017. 376 с.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-4-125-132

Submited: 10.08.2023
Revised: 25.09.2023
Accepted: 05.12.2023

Yu.N. Gorelov
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: yungor07@mail.ru. ORCID: https://orcid/0009-0003-2183-6261
L.V. Kurganskaya
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: limbo83@mail.ru. ORCID: https://orcid/0000-0003-1513-3802

MODELING OF KINEMATIC CHARACTERISTICS OF A MOBILE ANTENNA OF A SPACECRAFT IN A TWO-STAGE PIVOTING DEVICE

ABSTRACT

The problem of calculating the kinematic characteristics of a mobile antenna device (AD) based on the specified values of kinematic characteristics of the line of sight (LS) "spacecraft — information reception point" in the associated coordinate system of the spacecraft is considered. The kinematic characteristics of the AD in the form of the current values of its rotation angles and angular velocities and accelerations (according to the corresponding control channels) are determined from the conditions for combining the LS with the axis of the directional diagram of the AD for the case of a two-stage pivoting device with mutually orthogonal axes of rotation of the AD.

Key words: spacecraft; mobile antenna; pivot device; kinematic characteristics; line of sight; control channels.

Citation. Gorelov Yu.N., Kurganskaya L.V. Modeling of kinematic characteristics of a mobile antenna of a spacecraft in a two-stage pivoting device. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 125–132. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-4-125-132. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

Yury N. Gorelov — Doctor of Technical Sciences, professor, head of the Research Institute of Modelling and Control Science, Samara National Research University; professor of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Lubov V. Kurganskaya — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, leading researcher of the Research Institute of Modeling and Control Science; associate professor of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

[1] Gorelov Yu.N., Kurgankaya L.V. Modeling of kinematic characteristics of the line of sight of a mobile antenna of a spacecraft when it is pointed at an information reception point. *Vestnik Samarskogo Universiteta. Estestvennonauchnaya Seriya Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 77–84. (In Russ.)

[2] Gorelov Yu.N., Gorelova O.I., Manturov A.I. Modeling of kinematic characteristics of a controlled mobile antenna of a spacecraft. In: *Motion control and navigation of aircraft: proceedings of the XI All-Russian research and technical seminar on motion control and navigation of aircraft (June, 23–25, 2003, Samara, Russian Federation)*. Samara, 2003, pp. 68–73. (In Russ.)

[3] Strazheva I.V., Melkumov V.S. Vector-matrix methods in flight mechanics. Moscow: Mashinostroenie, 1973, 260 p. Available at: https://libarch.nmu.org.ua/bitstream/handle/GenofondUA/66671/eab332aa52099a8798176d8d05a37a16.djvu?sequence=1&isAllowed=y. (In Russ.)

[4] Kirilin A.N., Anshakov G.P., Akhmetov R.N., Storozh A.D. Spacecraft engineering. Scientific and technical research and practical developments of the State Research and Production Space-Rocket Center "TsSKB-Progress". Samara, 2017, 376 p.; illustrated. (In Russ.)