МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУКАХ

MATHEMATICAL METHODS IN NATURAL SCIENCES

Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-4-117-124

УДК 629.78:531

Дата: поступления статьи: 15.08.2023
после рецензирования: 23.09.2023
принятия статьи: 05.12.2023

Ю.Н. Горелов
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: yungor07@mail.ru. ORCID: https://0009-0003-2183-6261
Л.В. Курганская
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: limbo83@mail.ru. ORCID: https://orcid/0000-0003-1513-3802

МОДЕЛИРОВАНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛИНИИ ВИЗИРОВАНИЯ ПОДВИЖНОЙ АНТЕННЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПРИ ЕЕ НАВЕДЕНИИ НА ПУНКТ ПРИЕМА ИНФОРМАЦИИ

АННОТАЦИЯ

В рамках общей задачи расчета кинематических характеристик подвижной антенны космического аппарата рассматривается задача кинематики сложного движения линии визирования «КА – ППИ» («космический аппарат — пункт приема информации»). Приведено решение этой задачи, с помощью которого устанавливается взаимосвязь кинематических характеристик в абсолютном и относительном движениях линии визирования «КА – ППИ» в виде теорем о сложении ее угловых скоростей и ускорений.

Ключевые слова: космический аппарат; пункт приема информации; линия визирования; кинематические характеристики; угловые скорости и ускорения; абсолютное и относительное движения.

Цитирование. Горелов Ю.Н., Курганская Л.В. Моделирование кинематических характеристик линии визирования подвижной антенны космического аппарата при ее наведении на пункт приема информации // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2023. Т. 29, № 4. С. 117–124. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-4-117-124.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Юрий Николаевич Горелов — доктор технических наук, профессор, директор НИИ проблем моделирования и управления Самарского университета, профессор кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.
Любовь Викторовна Курганская — кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник НИИ проблем моделирования и управления Самарского университета, доцент кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

К одной из основных задач, решаемых КА зондирования [1; 2], относится не только получение информации, но и ее оперативная доставка потребителям на Земле. Во многих случаях эта информация должна доставляться в реальном (или близком к реальному) масштабе времени с использованием радиолинии «КА – ППИ» (ППИ — пункт приема информации). В качестве ППИ могут быть наземные и воздушные пункты, а также другие КА, например, спутники-ретрансляторы на соответствующих орбитах. Большие объемы передаваемой информации требуют высокой пропускной способности радиолинии «КА — ППИ» [2], что в силу ограничений по энергетике на борту КА достигается за счет использования управляемых подвижных антенных устройств (АУ) с достаточно «узкими» диаграммами направленности. В свою очередь это предъявляет повышенные требования к точности ориентации АУ, обусловленные необходимостью гарантированного наведения АУ на ППИ в течение всего сеанса связи. Для функционирования информационного канала «КА — ППИ» необходимо также соответствующее обеспечение системы программного наведения АУ данными о текущей ориентации линии визирования (ЛВ) «КА — ППИ», представленные ее кинематическими характеристиками как в абсолютном, так и в относительном движениях, то есть как в пространстве, так и относительно КА. Возможность прогнозирования текущей ориентации ЛВ в пространстве и ее других кинематических характеристик на любом планируемом сеансе связи также способствует решению задачи программного наведения АУ с требуемой точностью, которая заключается в совмещении оси диаграммы направленности АУ с ЛВ. Кроме того, система программного наведения — в силу ограничений по времени на вхождение КА в связь с ППИ — должна обеспечивать также высокоточное программное наведение АУ и на начало каждого сеанса связи (на интервалах взаимной видимости КА и выбранного ППИ). Таким образом, для решения задачи программного наведения АУ на борту КА требуются, во-первых, наличие на интервале сеанса связи текущей информации о кинематических характеристиках движения КА и ППИ (например, в гринвичской системе координат); во-вторых, решение задач кинематики сложного движения ЛВ и расчета кинематических характеристик АУ при его наведении на ППИ. В настоящей статье рассматривается решение только первой из этих задач, а предварительные результаты ее решения впервые были представлены в докладе [3].

1. Постановка задачи определения кинематических характеристик ЛВ «КА — ППИ» в случае ее сложного движения

Предполагается, что в качестве исходных данных для решения задачи наведения АУ — в рамках более общей задачи обеспечения оперативной доставки информации на Землю — можно использовать только данные, получаемые непосредственно на борту КА. Это могут быть, во-первых, прогнозируемые значения параметров движения его центра масс (например, в гринвичской или геоцентрической инерциальной системах координат [4; 5]) на интервале $[t_0, t_f]$ планируемого сеанса связи — $\mathbf{r}_{\text{КА}}(t)$ и $\mathbf{v}_{\text{КА}}(t)$ или, по крайней мере, в некоторые моменты времени $t_k \in [t_0, t_f]$, $k = 0,\ 1,\ 2,\ ...$; во-вторых, кинематические характеристики движения ППИ в пространстве — $\mathbf{r}_{\text{ппи}}(t)$ и $\mathbf{v}_{\text{ппи}}(t)$ в той же системе координат, и в те же моменты времени, что указаны выше; последнее относится и к случаю, когда ППИ подвижный наземный или воздушный пункт, а также спутник-ретранслятор на геостационарной или высокоэллиптической орбите. Далее для определенности будет предполагаться, что $\mathbf{r}_{\text{КА}}$, $\mathbf{v}_{\text{КА}}$, $\mathbf{r}_{\text{ппи}}$ и $\mathbf{v}_{\text{ппи}}$ всегда заданы в одной и той же системе координат. В общем случае для решения задачи наведения АУ, помимо $\mathbf{r}_{\text{КА}}$, $\mathbf{v}_{\text{КА}}$, $\mathbf{r}_{\text{ппи}}$ и $\mathbf{v}_{\text{ппи}}$, могут также потребоваться $\mathbf{w}_{\text{КА}}$ — вектор ускорения центра масс КА и $\mathbf{w}_{\text{ппи}}$ — вектор ускорения ППИ, заданные в соответствующей системе координат.

Итак, если движение КА и ППИ задано с помощью кинематических уравнений

$$\mathbf{r}_{\text{КА}} = \mathbf{r}_{\text{КА}}(t);\ \ \mathbf{r}_{\text{ппи}} = \mathbf{r}_{\text{ппи}}(t),\ \ \forall t \in [t_0; t_f], \tag{1.1}$$

то положение линии визирования «КА — ППИ» в пространстве в каждый момент времени в течение сеанса связи будет задаваться вектором

$$\mathbf{r}_{\text{лв}}(t) = \mathbf{r}_{\text{ппи}}(t) - \mathbf{r}_{\text{КА}}(t)$$

и, соответственно, положение ЛВ в пространстве можно задавать также ортом

$$\mathbf{e}_{\text{лв}} = \mathbf{r}_{\text{лв}}/r_{\text{лв}},\ \ r_{\text{лв}} = |\mathbf{r}_{\text{лв}}|\,. \tag{1.2}$$

Компоненты $\mathbf{e}_{\text{лв}}$ суть направляющие косинусы ЛВ — первая группа кинематических характеристик ЛВ.

Остальные кинематические характеристики ЛВ связаны, во-первых, с быстротой изменения — по величине и направлению – ориентации орта $\mathbf{e}_{\text{лв}}(t)$ в пространстве, которая определяется вектором мгновенной угловой скорости ЛВ $\boldsymbol{\omega}_{\text{лв}}$; во-вторых, с быстротой изменения $\boldsymbol{\omega}_{\text{лв}}(t)$ или, что то же самое, с угловым ускорением ЛВ, вектор которого определяется производной по t от $\boldsymbol{\omega}_{\text{лв}}(t)$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}(t) = \frac{d\boldsymbol{\omega}_{\text{лв}}(t)}{dt}. \tag{1.3}$$

Для нахождения указанных кинематических характеристик ЛВ дополнительно необходимо также знание производных от $\mathbf{r}_{\text{КА}}(t)$ и $\mathbf{r}_{\text{ппи}}(t)$, а именно: $\mathbf{v}_{\text{КА}}(t) = d\mathbf{r}_{\text{КА}}(t)/dt$; $\mathbf{w}_{\text{КА}}(t) = d\mathbf{v}_{\text{КА}}(t)/dt$; $\mathbf{v}_{\text{ппи}}(t) = d\mathbf{r}_{\text{ппи}}(t)/dt$; $\mathbf{w}_{\text{ппи}}(t) = d\mathbf{v}_{\text{ппи}}(t)/dt$.

Перечисленные выше кинематические характеристики ЛВ полностью определяют ее движение в пространстве в какой-либо выбранной базовой системе координат (БСК), в которой задаются уравнения движения КА и ППИ (1.1). Однако для решения задачи наведения АУ, вообще говоря, требуется знание текущей ориентации ЛВ в связанной системе координат (далее — ССК) КА. Если принять, что базовая система координат является условно неподвижной (и, соответственно, рассматривать $\mathbf{e}_{\text{лв}}(t)$, $\boldsymbol{\omega}_{\text{лв}}(t)$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}(t)$ как кинематические характеристики ЛВ в абсолютном движении), то и в подвижной ССК можно ввести соответствующие кинематические характеристики ЛВ (в относительном движении), а именно: $\tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}}(t)$, $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{лв}}(t)$ и $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{лв}}(t)$. В общем случае $\boldsymbol{\omega}_{\text{лв}}(t) \neq \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{лв}}(t)$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}(t) \neq \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{лв}}(t)$, а $\mathbf{e}_{\text{лв}}(t) = \tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}}(t)$, если только эти орты заданы в одной и той же системе координат. Иными словами, кинематические характеристики ЛВ в ее абсолютном и относительном движениях суть различные кинематические характеристики, что обусловлено подвижностью ССК относительно выбранной БСК. Наконец, отметим, что для решения задачи наведения АУ на ППИ в конечном счете также необходимы $\forall t \in [t_0,\, t_f]$ кинематические характеристики подвижного (относительно корпуса КА) АУ в виде его текущих углов поворота, реализуемых с помощью опорно-поворотного устройства (ОПУ), и, быть может, соответствующих производных от этих углов по времени суть угловых скоростей и ускорений по определенным каналам управления подвижного АУ. Данная группа кинематических характеристик определяется конструктивными особенностями ОПУ и здесь не рассматривается.

Настоящая статья посвящена решению задачи кинематики сложного движения ЛВ «КА — ППИ» с целью получения общих соотношений для расчета кинематических характеристик ЛВ и управляемого подвижного АУ, необходимых для моделирования процессов наведения АУ на ППИ для КА. В связи с этим одна из основных задач — установление взаимосвязи между кинематическими характеристиками ЛВ в ее абсолютном и относительном движениях, что необходимо в дальнейшем для расчета в ССК КА кинематических характеристик управляемого подвижного АУ в режиме наведения на ППИ.

2. Кинематические характеристики ЛВ «КА — ППИ» в абсолютном движении

Рассмотрим вначале следующую вспомогательную задачу. Пусть движение некоторой пары точек N и P задано в соответствии с (1.1) кинематическими уравнениями

$$\mathbf{r}_N = \mathbf{r}_N(t); \;\; \mathbf{r}_P = \mathbf{r}_P(t), \tag{2.1}$$

где $\mathbf{r}_N$ и $\mathbf{r}_P$ — радиус-векторы указанных точек в некоторой условно неподвижной системе координат (НСК). Соответственно, отрезок $\overline{NP} = \mathbf{r}_{\text{лв}}$ определяет положение ЛВ в пространстве (в НСК), а вектор $\mathbf{r}_{\text{лв}}$ вычисляется так:

$$\mathbf{r}_{\text{лв}} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_N. \tag{2.2}$$

Для решения рассматриваемой задачи требуется указать, исходя из (2.1), (2.2), точные соотношения для определения кинематических характеристик ЛВ в НСК или, что то же самое, в ее абсолютном движении.

Вначале отметим, что положение ЛВ в НСК с учетом (1.2), (2.2) задается ортом

$$\mathbf{e}_{\text{лв}} = \mathbf{r}_{\text{лв}}/r_{\text{лв}}, \tag{2.3}$$

компоненты которого суть направляющие косинусы ЛВ в НСК — это первая группа кинематических характеристик ЛВ в абсолютном движении. Очевидно, что остальные кинематические характеристики ЛВ связаны с быстротой изменения ориентации орта $\mathbf{e}_{\text{лв}}$ в НСК, а именно с угловой скоростью и угловым ускорением ЛВ в НСК. Чтобы их найти, вначале необходимо определить с учетом (2.2) производные от $\mathbf{r}_N(t)$ и $\mathbf{r}_P(t)$:

$$\mathbf{v}_N(t) = \frac{d\mathbf{r}_N(t)}{dt}; \;\; \mathbf{w}_N(t) = \frac{d\mathbf{v}_N(t)}{dt}; \;\; \mathbf{v}_P(t) = \frac{d\mathbf{r}_P(t)}{dt}; \;\; \mathbf{w}_P(t) = \frac{d\mathbf{v}_P(t)}{dt}, \tag{2.4}$$

где $\mathbf{v}_N$ и $\mathbf{v}_P$ — векторы скоростей, а $\mathbf{w}_N$ и $\mathbf{w}_P$ — векторы ускорений точек N и P.

Для определения векторной величины, характеризующей как быстроту, так и мгновенное направление изменения ориентации ЛВ в пространстве (в НСК) или, что то же самое, ее мгновенную угловую скорость, вначале следует вычислить с учетом (2.1), (2.4) скорость точки P относительно точки N (или скорость конца ЛВ относительно ее начала в точке N):

$$\mathbf{v}_{\text{лв}} = \frac{d\mathbf{r}_{\text{лв}}}{dt} = \mathbf{v}_P - \mathbf{v}_N. \tag{2.5}$$

Очевидно, что искомая величина будет пропорциональна секторной скорости вектора $\mathbf{e}_{\text{лв}}$ и, стало быть, векторному произведению этого орта на относительную скорость $\mathbf{v}_{\text{лв}}$ (2.5). Отсюда следует соответствующая кинематическая характеристика – вектор мгновенной угловой скорости ЛВ в НСК, который определяется так:

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{лв}} = \frac{1}{r_{\text{лв}}}\mathbf{e}_{\text{лв}} \times \mathbf{v}_{\text{лв}}. \tag{2.6}$$

Учитывая (2.6) и свойства смешанного векторного произведения, нетрудно установить, что $\mathbf{e}_{\text{лв}} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{лв}} \equiv 0$, то есть в каждый момент времени вектор $\boldsymbol{\omega}_{\text{лв}}$ ортогонален к ЛВ, и аналогично имеет также место: $\mathbf{v}_{\text{лв}} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{лв}} \equiv 0$.

Далее, вычислим производную от $\boldsymbol{\omega}_{\text{лв}}$, характеризующую быстроту и величину изменения угловой скорости ЛВ в НСК, или, согласно определению (1.3), мгновенное угловое ускорение ЛВ: $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}} = d\boldsymbol{\omega}_{\text{лв}}/dt$. Найдем $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}$, дифференцируя выражение (2.6):

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}_{\text{лв}}}{dt} = -\frac{1}{r_{\text{лв}}^2}\frac{dr_{\text{лв}}}{dt}\mathbf{e}_{\text{лв}} \times \mathbf{v}_{\text{лв}} + \frac{1}{r_{\text{лв}}}\frac{d\mathbf{e}_{\text{лв}}}{dt} \times \mathbf{v}_{\text{лв}} + \frac{1}{r_{\text{лв}}}\mathbf{e}_{\text{лв}} \times \frac{d\mathbf{v}_{\text{лв}}}{dt}. \tag{2.7}$$

Здесь $dr_{\text{лв}}/dt = \mathbf{e}_{\text{лв}} \cdot \mathbf{v}_{\text{лв}}$ — радиальная составляющая относительной скорости ЛВ, $d\mathbf{e}_{\text{лв}}/dt = \boldsymbol{\omega}_{\text{лв}} \times \times \mathbf{e}_{\text{лв}}$ — производная, вычисляемая по формуле Эйлера [4]. Наконец, дифференцируя (2.5), с учетом (2.4) получим

$$\frac{d\mathbf{v}_{\text{лв}}}{dt} = \mathbf{w}_P - \mathbf{w}_N = \mathbf{w}_{\text{лв}}, \tag{2.8}$$

т. е. ускорение точки P относительно точки N в НСК (или ускорение конца ЛВ относительно ее начала). Подставив перечисленные выше производные в (2.7), после соответствующей группировки членов получим следующую формулу для вычисления $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}} = \frac{1}{r_{\text{лв}}}\mathbf{e}_{\text{лв}} \times \left[\mathbf{w}_{\text{лв}} - \frac{2(\mathbf{e}_{\text{лв}} \cdot \mathbf{v}_{\text{лв}})}{r_{\text{лв}}}\mathbf{v}_{\text{лв}}\right]. \tag{2.9}$$

Если учесть выражение для $\boldsymbol{\omega}_{\text{лв}}$ (2.6), то (2.9) можно переписать и в таком виде:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}} = -\frac{2(\mathbf{e}_{\text{лв}} \cdot \mathbf{v}_{\text{лв}})}{r_{\text{лв}}}\boldsymbol{\omega}_{\text{лв}} + \frac{1}{r_{\text{лв}}}\mathbf{e}_{\text{лв}} \times \mathbf{w}_{\text{лв}}. \tag{2.10}$$

Исходя из (2.9) или (2.10), нетрудно установить, что $\mathbf{e}_{\text{лв}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}} \equiv 0$, то есть вектор углового ускорения ЛВ, как и вектор ее угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_{\text{лв}}$, в любой момент времени будет ортогонален ЛВ.

Предваряя определение кинематических характеристик ЛВ в относительном движении, отметим, что всюду выше пока рассматривались только векторы, определяемые в НСК и задаваемые своими компонентами в этой же системе координат, то есть $\mathbf{e}_{\text{лв}} = \mathbf{e}_{\text{лв}}^{\text{нск}}$, $\mathbf{v}_{\text{лв}} = \mathbf{v}_{\text{лв}}^{\text{нск}}$, $\mathbf{w}_{\text{лв}} = \mathbf{w}_{\text{лв}}^{\text{нск}}$, $\boldsymbol{\omega}_{\text{лв}} = \boldsymbol{\omega}_{\text{лв}}^{\text{нск}}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}^{\text{нск}}$. Соответственно, решение рассматриваемой задачи в виде приведенных выше соотношений (2.2), (2.3), (2.5), (2.6) и (2.8)–(2.10) для определения кинематических характеристик ЛВ в НСК (то есть в ее абсолютном движении) следует переписать в таком виде:

$$\mathbf{e}_{\text{лв}}^{\text{нск}} = \frac{1}{r_{\text{лв}}}\mathbf{r}_{\text{лв}}^{\text{нск}}; \;\; \boldsymbol{\omega}_{\text{лв}}^{\text{нск}} = \frac{1}{r_{\text{лв}}}\mathbf{e}_{\text{лв}}^{\text{нск}} \times \mathbf{v}_{\text{лв}}^{\text{нск}};$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}^{\text{нск}} = -\frac{2(\mathbf{e}_{\text{лв}}^{\text{нск}} \cdot \mathbf{v}_{\text{лв}}^{\text{нск}})}{r_{\text{лв}}}\boldsymbol{\omega}_{\text{лв}}^{\text{нск}} + \frac{1}{r_{\text{лв}}}\mathbf{e}_{\text{лв}}^{\text{нск}} \times \mathbf{w}_{\text{лв}}^{\text{нск}}.$$

где $\mathbf{r}_{\text{лв}}^{\text{нск}} = \mathbf{r}_P^{\text{нск}} - \mathbf{r}_N^{\text{нск}}$, $\mathbf{v}_{\text{лв}}^{\text{нск}} = \mathbf{v}_P^{\text{нск}} - \mathbf{v}_N^{\text{нск}}$, $\mathbf{w}_{\text{лв}}^{\text{нск}} = \mathbf{w}_P^{\text{нск}} - \mathbf{w}_N^{\text{нск}}$.

3. Кинематические характеристики ЛВ «КА — ППИ» в относительном движении. Взаимосвязь кинематических характеристик ЛВ в абсолютном и относительном движениях

Рассмотрим теперь задачу на определение кинематических характеристик ЛВ в относительном движении, то есть в том случае, когда движение пары точек N и P будет задано кинематическими уравнениями

$$\tilde{\mathbf{r}}_N = \tilde{\mathbf{r}}_N(t); \;\; \tilde{\mathbf{r}}_P = \tilde{\mathbf{r}}_P(t), \tag{3.1}$$

где $\tilde{\mathbf{r}}_N$ и $\tilde{\mathbf{r}}_P$ — радиус-векторы указанных точек в некоторой вспомогательной системе координат (ВСК), движение которой относительно НСК будет описано ниже. В этой задаче требуется, во-первых, найти кинематические характеристики ЛВ в ее относительном движении, и, во-вторых, установить их взаимосвязь с кинематическими характеристиками ЛВ в абсолютном движении (в НСК).

Очевидно, что решение первой части этой задачи при задании уравнений (3.1) аналогично решению задачи предыдущего раздела, то есть здесь по аналогии с (2.2), (2.3) сразу же можно записать

$$\tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}} = \frac{1}{r_{\text{лв}}}\tilde{\mathbf{r}}_{\text{лв}}, \tag{3.2}$$

где

$$\tilde{\mathbf{r}}_{\text{лв}} = \tilde{\mathbf{r}}_P - \tilde{\mathbf{r}}_N. \tag{3.3}$$

Соответственно, угловая скорость ЛВ в относительном движении будет вычисляться по формуле, аналогичной (2.6):

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{лв}} = \frac{1}{r_{\text{лв}}}\tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}} \times \tilde{\mathbf{v}}_{\text{лв}}, \tag{3.4}$$

где $\tilde{\mathbf{v}}_{\text{лв}} = \delta\tilde{\mathbf{r}}_{\text{лв}}/dt = \tilde{\mathbf{v}}_P - \tilde{\mathbf{v}}_N$, $\tilde{\mathbf{v}}_N = \delta\tilde{\mathbf{r}}_N/dt$, $\tilde{\mathbf{v}}_P = \delta\tilde{\mathbf{r}}_P/dt$, а $\frac{\delta}{dt}$ — локальная производная (в подвижной ВСК) [4]. Очевидно, что здесь $\tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{лв}} \equiv 0$. Далее в соответствии с определением углового ускорения ЛВ (1.3) следует принять

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{лв}} = \frac{\delta}{dt}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{лв}}.$$

Вычисляя локальную производную от $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{лв}}$ (3.4), получим аналогичное формуле (2.10) выражение для углового ускорения ЛВ в относительном движении:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{лв}} = -\frac{2(\tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_{\text{лв}})}{r_{\text{лв}}}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{лв}} + \frac{1}{r_{\text{лв}}}\tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}} \times \tilde{\mathbf{w}}_{\text{лв}}, \tag{3.5}$$

где $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{лв}} = \delta\tilde{\mathbf{v}}_{\text{лв}}/dt = \tilde{\mathbf{w}}_P - \tilde{\mathbf{w}}_N$, а $\tilde{\mathbf{w}}_N = \delta\tilde{\mathbf{v}}_N/dt$, $\tilde{\mathbf{w}}_P = \delta\tilde{\mathbf{v}}_P/dt$. Исходя из (3.5), нетрудно установить, что $\tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{лв}} \equiv 0$, то есть вектор углового ускорения ЛВ $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{лв}}$, как и вектор ее угловой скорости $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{лв}}$, в ВСК также будет ортогонален ЛВ в любой момент времени.

Рассмотрим далее вторую часть задачи, решение которой должно установить взаимосвязь кинематических характеристик ЛВ в ее относительном и абсолютном движениях. Для этого определим движение ВСК относительно НСК, а именно: пусть положение ее начала в НСК задается радиус-вектором $\mathbf{r}_{\text{O}}(t)$, а движение – векторами скорости $\mathbf{v}_{\text{O}} = d\mathbf{r}_{\text{O}}/dt$ и ускорения $\mathbf{w}_{\text{O}} = d\mathbf{v}_{\text{O}}/dt$ (здесь производные от $\mathbf{r}_{\text{O}}(t)$ и $\mathbf{v}_{\text{O}}(t)$ являются абсолютными, то есть вычисляются в НСК); текущую ориентацию ВСК в НСК определим матрицей (перехода для векторов от ВСК к НСК) — $\mathbf{P}^{\text{нск}}_{\text{вск}}$ или матрицей $\mathbf{P}^{\text{вск}}_{\text{нск}} = (\mathbf{P}^{\text{нск}}_{\text{вск}})^{\text{T}}$ [5], а ее вращательное движение – векторами угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_{\text{вск}}(t)$ и углового ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{вск}}(t)$.

Так как $\mathbf{r}_N = \mathbf{r}_{\text{O}} + \tilde{\mathbf{r}}_N$, $\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_{\text{O}} + \tilde{\mathbf{r}}_P$, то с учетом (2.2) и (3.2), (3.3) получим $\mathbf{r}_{\text{лв}} = \tilde{\mathbf{r}}_{\text{лв}}$ и, стало быть, тогда имеет место: $\mathbf{e}_{\text{лв}} = \tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}}$. Последнее означает тождественность этих ортов, когда они задаются в одной и той же системе координат: здесь — либо в НСК, либо в ВСК. Если же $\mathbf{e}_{\text{лв}} = \mathbf{e}^{\text{нск}}_{\text{лв}}$, а $\tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}} = \tilde{\mathbf{e}}^{\text{вск}}_{\text{лв}}$, то связь между ними должна конкретизироваться так [4; 5]:

$$\mathbf{P}^{\text{вск}}_{\text{нск}}\mathbf{e}^{\text{нск}}_{\text{лв}} = \tilde{\mathbf{e}}^{\text{вск}}_{\text{лв}}; \;\; \mathbf{e}^{\text{нск}}_{\text{лв}} = \mathbf{P}^{\text{нск}}_{\text{вск}}\tilde{\mathbf{e}}^{\text{вск}}_{\text{лв}},$$

где $\mathbf{e}^{\text{нск}}_{\text{лв}}$ задается своими компонентами в НСК, а орт $\tilde{\mathbf{e}}^{\text{вск}}_{\text{лв}}$, соответственно, в ВСК. Очевидно, что это справедливо и для угловых скоростей и угловых ускорений ВСК, для которых имеет место: $\boldsymbol{\omega}_{\text{вск}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{вск}}$; $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{вск}} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{вск}}$.

Далее для того, чтобы установить связь между угловыми скоростями ЛВ, с одной стороны, и угловыми ускорениями ЛВ, с другой стороны, соответственно, в относительном и абсолютном движениях, в первую очередь следует выяснить, как связаны между собой векторы:

$$\mathbf{v}_{\text{лв}} = d\mathbf{r}_{\text{лв}}/dt \;\text{ и }\; \tilde{\mathbf{v}}_{\text{лв}} = \delta\tilde{\mathbf{r}}_{\text{лв}}/dt; \;\; \mathbf{w}_{\text{лв}} = d\mathbf{v}_{\text{лв}}/dt \;\text{ и }\; \tilde{\mathbf{w}}_{\text{лв}} = \delta\tilde{\mathbf{v}}_{\text{лв}}/dt.$$

Итак, учитывая, что $d\mathbf{r}_{\text{лв}}/dt = \delta\tilde{\mathbf{r}}_{\text{лв}}/dt + \boldsymbol{\omega}_{\text{вск}} \times \tilde{\mathbf{r}}_{\text{лв}}$ [4], получим

$$\mathbf{v}_{\text{лв}} = \tilde{\mathbf{v}}_{\text{лв}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{вск}} \times \tilde{\mathbf{r}}_{\text{лв}}. \tag{3.6}$$

Дифференцируя (3.6) с учетом связи между абсолютной и локальной производными, получим тогда следующее соотношение:

$$\mathbf{w}_{\text{лв}} = \tilde{\mathbf{w}}_{\text{лв}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{вск}} \times \tilde{\mathbf{r}}_{\text{лв}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{вск}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{вск}} \times \tilde{\mathbf{r}}_{\text{лв}}) + 2\boldsymbol{\omega}_{\text{вск}} \times \tilde{\mathbf{v}}_{\text{лв}}, \tag{3.7}$$

в котором учтено, что $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{вск}} = d\boldsymbol{\omega}_{\text{вск}}/dt = \delta\boldsymbol{\omega}_{\text{вск}}/dt$ [4].

Подставив (3.6) непосредственно в (2.6), с учетом $\mathbf{e}_{\text{лв}} = \tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}}$ и (3.4) получим

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{лв}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{лв}} + \tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{вск}} \times \tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}}), \tag{3.8}$$

где слагаемое $\boldsymbol{\omega}_{\text{лв}}^{Trans} = \tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{ВСК}} \times \tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}})$ представляет собой составляющую вектора $\boldsymbol{\omega}_{\text{лв}}$, которая ортогональна ЛВ. Поэтому вектор $\boldsymbol{\omega}_{\text{лв}}^{Trans}$ можно рассматривать как переносную угловую скорость ЛВ. Действительно, если в (3.8) $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{лв}} = 0$, то $\boldsymbol{\omega}_{\text{лв}} = \boldsymbol{\omega}_{\text{лв}}^{Trans}$, то есть в этом случае угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_{\text{лв}}$ будет обусловлена только вращением ВСК. Таким образом, соотношение (3.8) будет выражать собой ***теорему о сложении угловых скоростей ЛВ*** в ее сложном движении в следующем виде:

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{лв}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{лв}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{лв}}^{Trans}. \tag{3.9}$$

Отметим, что в (3.8) и (3.9) все векторы задаются своими компонентами в одной и той же системе координат, то есть либо в НСК, либо в ВСК. В том случае, когда $\boldsymbol{\omega}_{\text{лв}} = \boldsymbol{\omega}_{\text{лв}}^{\text{НСК}}$, а $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{лв}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{лв}}^{\text{ВСК}}$, тогда (3.9) необходимо переписать в одном из вариантов:

$$\mathbf{P}_{\text{НСК}}^{\text{ВСК}} \boldsymbol{\omega}_{\text{лв}}^{\text{НСК}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{лв}}^{\text{ВСК}} + \left(\boldsymbol{\omega}_{\text{лв}}^{Trans}\right)^{\text{ВСК}}; \;\; \boldsymbol{\omega}_{\text{лв}}^{\text{НСК}} = \mathbf{P}_{\text{ВСК}}^{\text{НСК}} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{лв}}^{\text{ВСК}} + \left(\boldsymbol{\omega}_{\text{лв}}^{Trans}\right)^{\text{НСК}},$$

где $\boldsymbol{\omega}_{\text{лв}}^{Trans}$ задается своими компонентами, соответственно, либо в ВСК, либо в НСК.

Установим далее взаимосвязь между угловыми ускорениями ЛВ $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}$ и $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{лв}}$. Для этого подставим (3.6) и (3.7) в (2.9) и после предварительной группировки членов, соответственно, с учетом $\mathbf{e}_{\text{лв}} = \tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}}$ $(\tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_{\text{лв}}) = (\mathbf{e}_{\text{лв}} \cdot \mathbf{v}_{\text{лв}})$ тогда получим:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}} = \frac{1}{r_{\text{лв}}} \tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}} \times \left[\tilde{\mathbf{w}}_{\text{лв}} - \frac{2(\tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_{\text{лв}})}{r_{\text{лв}}} \tilde{\mathbf{v}}_{\text{лв}} \right] +$$

$$+ \tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}} \times (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ВСК}} \times \tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}}) + \tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}} \times [\boldsymbol{\omega}_{\text{ВСК}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{ВСК}} \times \tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}})] +$$

$$+ \frac{2}{r_{\text{лв}}} \left\{ \tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{ВСК}} \times \tilde{\mathbf{v}}_{\text{лв}}) - (\tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_{\text{лв}}) \left[\tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{ВСК}} \times \tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}}) \right] \right\}.$$

Раскрывая в последнем слагаемом двойные векторные произведения [5] и учитывая (3.5), окончательно получим

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{лв}} + \tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}} \times (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ВСК}} \times \tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}}) + \tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}} \times [\boldsymbol{\omega}_{\text{ВСК}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{ВСК}} \times \tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}})] -$$
$$- \frac{2(\tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{ВСК}})}{r_{\text{лв}}} \left[\tilde{\mathbf{v}}_{\text{лв}} - (\tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_{\text{лв}}) \, \tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}} \right]. \tag{3.10}$$

В (3.10) в последнем слагаемом вектор

$$\tilde{\mathbf{v}}_{\text{лв}}^{*} = \tilde{\mathbf{v}}_{\text{лв}} - (\tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_{\text{лв}}) \, \tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}} = \tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}} \times (\tilde{\mathbf{v}}_{\text{лв}} \times \tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}})$$

является составляющей относительной скорости $\tilde{\mathbf{v}}_{\text{лв}}$, ортогональной ЛВ.

Очевидно, что в случае $\tilde{\mathbf{v}}_{\text{лв}} = 0$ и, соответственно, $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{лв}} = 0$ из (3.10) получим

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}|_{\tilde{\mathbf{v}}_{\text{лв}}=0} = \tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}} \times (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ВСК}} \times \tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}}) + \tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}} \times [\boldsymbol{\omega}_{\text{ВСК}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{ВСК}} \times \tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}})],$$

то есть угловое ускорение ЛВ будет обусловлено только вращением ВСК относительно НСК и, стало быть, тогда $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}|_{\tilde{\mathbf{v}}_{\text{лв}}=0} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}^{Trans}$ можно будет отождествить с переносным угловым ускорением ЛВ. Соответственно, последнее слагаемое в (3.10) также можно трактовать (естественно, имея в виду соответствующую аналогию с кориолисовым ускорением в сложном движении точки [4]) как поворотное угловое ускорение ЛВ – $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}^{Rotor}$. Таким образом, формула (3.10) выражает собой ***теорему о сложении угловых ускорений ЛВ*** в ее сложном движении в следующем виде:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{лв}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}^{Trans} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}^{Rotor}, \tag{3.11}$$

где

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}^{Trans} = \tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}} \times (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ВСК}} \times \tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}}) + \tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}} \times [\boldsymbol{\omega}_{\text{ВСК}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{ВСК}} \times \tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}})],$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}^{Rotor} = -\frac{2(\tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{ВСК}})}{r_{\text{лв}}} \tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}} \times (\tilde{\mathbf{v}}_{\text{лв}} \times \tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}}).$$

В том случае, если $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}^{\text{НСК}}$, $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{лв}} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{лв}}^{\text{ВСК}}$, то при вычислении кинематических характеристик ЛВ следует использовать соотношения:

$$\mathbf{P}_{\text{НСК}}^{\text{ВСК}} \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}^{\text{НСК}} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{лв}}^{\text{ВСК}} + \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}^{Trans}\right)^{\text{ВСК}} + \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}^{Rotor}\right)^{\text{ВСК}};$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}^{\text{НСК}} = \mathbf{P}_{\text{ВСК}}^{\text{НСК}} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{лв}}^{\text{ВСК}} + \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}^{Trans}\right)^{\text{НСК}} + \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}^{Rotor}\right)^{\text{НСК}},$$

в которых векторы $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}^{Trans}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}^{Rotor}$ задаются компонентами (или вычисляются) в соответствующих системах координат.

Дополнительно отметим, что $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}^{Rotor}$ с учетом (3.4) также можно переписать в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{лв}}^{Rotor} = 2(\tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\text{ВСК}}) \tilde{\mathbf{e}}_{\text{лв}} \times \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{лв}}.$$

Выводы

Рассмотрена задача кинематики сложного движения ЛВ «КА — ППИ», решение которой получено в виде соответствующих теорем о сложении угловых скоростей (3.9) и угловых ускорений (3.11) ЛВ. Полученная связь кинематических характеристик ЛВ «КА — ППИ» в случае ее сложного движения необходима для моделирования процессов наведения подвижных АУ на ППИ, например, для КА дистанционного зондирования Земли. Дополнительно отметим, что полученные результаты решения задачи кинематики сложного движения ЛВ также представляют интерес и в задачах моделирования процессов сближения КА на орбите [6], для которых может потребоваться расчет кинематических характеристик движения ЛВ «КА — цель», а также точные значения кинематических характеристик орбитального трехгранника [7], моделирующего орбитальную систему координат КА [4; 5].

Литература

[1] Соллогуб А.В., Аншаков Г.П., Данилов В.В. Космические аппараты систем зондирования поверхности Земли. Москва: Машиностроение, 1993. 368 с.

[2] Мостовой Я.А. Управление сложными техническими системами: конструирование программного обеспечения спутников ДЗЗ. Москва: Техносфера, 2016. 352 с.

[3] Горелов Ю.Н., Горелова О.И., Мантуров А.И. Моделирование кинематических характеристик управляемой подвижной антенны космического аппарата // Управление движением и навигация летательных аппаратов: сб. тр. XI Всероссийского научно-технического семинара по управлению движением и навигации летательных аппаратов. Самара, 2003. С. 68–73.

[4] Маркеев А.П. Теоретическая механика. 4-е изд., испр. Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2007. 592 с.

[5] Стражева И.В., Мелкумов В.С. Векторно-матричные методы в механике полета. Москва: Машиностроение, 1973. 260 с. URL: https://libarch.nmu.org.ua/bitstream/handle/GenofondUA/66671/eab332aa52099a8798176d8d05a37a16.djvu?sequence=1&isAllowed=y.

[6] Балахонцев В.Г., Иванов В.А., Шабанов В.И. Сближение в космосе. Москва: Воениздат, 1973. 240 с. URL: https://reallib.org/reader?file=2228948&ysclid=lp0x42jmyi28935028.

[7] Горелов Ю.Н. Кинематические характеристики орбитального трехгранника // Известия Самарского научного центра Российской Академии наук. 2018. Т. 20, № 1 (81). С. 96–100. URL: http://www.ssc.smr.ru/media/journals/izvestia/2018/2018_1_96_100.pdf.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-4-117-124

Submited: 15.08.2023
Revised: 23.09.2023
Accepted: 05.12.2023

Yu.N. Gorelov
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: yungor07@mail.ru. ORCID: https://0009-0003-2183-6261
L.V. Kurganskaya
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: limbo83@mail.ru. ORCID: https://orcid/0000-0003-1513-3802

MODELING OF KINEMATIC CHARACTERISTICS OF THE LINE OF SIGHT OF A MOBILE ANTENNA OF A SPACECRAFT WHEN IT IS POINTED AT AN INFORMATION RECEPTION POINT

ABSTRACT

Within the framework of the general problem of calculating the kinematic characteristics of the mobile antenna of the spacecraft, the problem of the kinematics of the complex movement of the line of sight "Sc — IRP" ("spacecraft — information reception point") is considered. The solution of this problem is given, with the help of which the relationship of kinematic characteristics in the absolute and relative movements of the line of sight "Sc — IRP" is established in the form of theorems on the addition of its angular velocities and accelerations.

Key words: spacecraft; line of sight; absolute and relative movements; angular velocities and accelerations; kinematic characteristics; information reception point.

Citation. Gorelov Yu.N., Kurganskaya L.V. Modeling of kinematic characteristics of the line of sight of a mobile antenna of a spacecraft when it is pointed at an information reception point. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 117–124. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-4-117-124. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

Yury N. Gorelov — Doctor of Technical Sciences, professor, head of the Research Institute of Modelling and Control Science, Samara National Research University; professor of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Lubov V. Kurganskaya — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, leading researcher of the Research Institute of Modeling and Control Science; associate professor of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

[1] Sollogub A.V., Anshakov G.P., Danilov V.V. Spacecrafts of Earth surface sensing systems. Moscow: Mashinostroenie, 1993, 368 p. (In Russ.)

[2] Mostovoy Ya.A. Control complex technical systems: designing software for remote sensing satellites. Moscow: Tekhnosfera, 2016, 352 p. (In Russ.)

[3] Gorelov Yu.N., Gorelova O.I., Manturov A.I. Modeling of kinematic characteristics of a controlled mobile antenna of a spacecraft. In: *Motion control and navigation of aircraft: proceedings of the XI All-Russian research and technical seminar on motion control and navigation of aircraft (June, 23–25, 2003, Samara, Russian Federation)*. Samara, 2003, pp. 68–73. (In Russ.)

[4] Markeev A.P. Theoretical mechanics. 4th edition, revised. Moscow–Izhevsk: NITs "Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika", 2007, 592 p. (In Russ.)

[5] Strazheva I.V., Melkumov V.S. Vector-matrix methods in flight mechanics. Moscow: Mashinostroenie, 1973. 260 p. Available at: https://libarch.nmu.org.ua/bitstream/handle/GenofondUA/66671/eab332aa52099a8798176d8d05a37a16.djvu?sequence=1&isAllowed=y. (In Russ.)

[6] Balakhontsev V.G., Ivanov V.A., Shabanov V.I. Docking in the space. Moscow: Voenizdat, 1973, 240 p. Available at: https://reallib.org/reader?file=2228948&ysclid=lp0x42jmyi28935028. (In Russ.)

[7] Gorelov Yu.N. Kinematic characteristics of the orbital trihedron. *Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*, 2018, vol. 20, no. 1 (81), pp. 96–100. Available at: http://www.ssc.smr.ru/media/journals/izvestia/2018/2018_1_96_100.pdf. (In Russ.)