



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-4-77-105

УДК 539.3

Дата: поступления статьи: 12.09.2023  
после рецензирования: 17.11.2023  
принятия статьи: 05.12.2023

**С.А. Лычев**

Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН,  
Москва 119526, Российская Федерация

E-mail: lychevsa@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7590-1389>

**А.В. Дигилов**

Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН,  
Москва 119526, Российская Федерация

E-mail: avdigilov@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6892-7740>

**Н.А. Пивоваров**

Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН,  
Москва 119526, Российская Федерация

E-mail: pivovaroff.bmstu@ya.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-7149-4102>

## ИЗГИБ КРУГОВОГО ДИСКА: ОТ ЦИЛИНДРА К УЛЬТРАТОНКОЙ МЕМБРАНЕ<sup>1</sup>

### АННОТАЦИЯ

В статье рассматриваются способы математического моделирования напряженно-деформированного состояния кругового диска при различных отношениях его толщины к радиусу, которые варьируются от 1 до  $10^{-3}$ . Для достаточно толстых пластин используется решение трехмерной линейной теории упругости, для пластин средней толщины – решение линейных уравнений изгиба в рамках гипотез Кирхгофа–Лява и нелинейных уравнений Фешля–фон Кармана, для ультратонких пластин – нелинейные уравнения Адкинса–Ривлина–Грина. Проведен сравнительный анализ решений и выделены интервалы относительных толщин, в которых рассматриваемые решения адекватно описывают процесс деформирования. Этот результат позволяет выбрать метод математического моделирования напряженно-деформированного состояния круглых пластин, используемых в микроэлектромеханических системах, наиболее подходящий для их относительного размера.

**Ключевые слова:** круговой диск; короткий цилиндр; толстая плита; тонкая пластина; ультратонкая мембрана; замкнутое решение; уравнения Фешля–фон Кармана; нелинейная модель мембран.

**Цитирование.** Лычев С.А., Дигилов А.В., Пивоваров Н.А. Изгиб кругового диска: от цилиндра к ультратонкой мембране // Вестник Самарского университета. Естественная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2023. Т. 29, № 4. С. 77–105. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-4-77-105>.

**Информация о конфликте интересов:** авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Лычев С.А., Дигилов А.В., Пивоваров Н.А., 2023

Сергей Александрович Лычев – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, 119526, Российская Федерация, г. Москва, пр-т Вернадского, 101, корп. 1.

Александр Вячеславович Дигилов – аспирант, младший научный сотрудник, Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, 119526, Российская Федерация, г. Москва, пр-т Вернадского, 101, корп. 1.

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 23-19-00866).

Никита Алексеевич Пивоваров — аспирант, Институт проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, 119526, Российская Федерация, г. Москва, пр-т Вернадского, 101, корп. 1.

## Введение

Расчет и оптимизация физико-механических параметров круглых пластин и мембран часто используются при разработке разнообразных микросистем. Как правило, при проектировании микроэлектронных устройств основное внимание уделяется электромагнитным полям и связанным с ними параметрам. Однако при разработке микроэлектромеханических систем (МЭМС) необходимо также учитывать механические деформации и напряжения. В зависимости от назначения упругие элементы МЭМС могут представлять собой как пластины значительной относительной толщины (например, сенсоры акселерометров), так и ультратонкие мембраны (например, газоанализаторы) [1; 2]. При таком разбросе параметров выбор уравнений и их решений для описания напряженно-деформированного состояния (НДС) в каждом конкретном случае является неочевидным. Ситуация становится более сложной при переходе к ультратонким изгибаемым элементам, изгиб которых сильно зависит от натяжений в срединной плоскости, причем эта зависимость существенно нелинейная [3]. Кроме того, в силу особенностей технологических процессов изготовления ультратонких элементов (напыления, травления, роста), в них возникают значительные остаточные напряжения [4–6]. В этой связи выбор адекватной модели и решения соответствующей начально-краевой задачи представляет актуальный вопрос в современной теории расчета тонкостенных систем. Ему посвящена настоящая статья.

Основным результатом является “шкала относительных толщин”, на которой отмечены интервалы применимости четырех математических моделей:

- линейной трехмерной теории упругости;
- теории изгиба Кирхгофа–Лява;
- нелинейной теории изгиба Фешля–фон Кармана;
- нелинейной теории гиперупругих мембран Адкинса–Ривлина–Грина.

Для всех четырех теорий построены в замкнутой форме решения модельных краевых задач об осесимметричном деформировании жестко закрепленного кругового диска.

## 1. Деформируемый диск

В статье рассматривается осесимметричное деформирование кругового диска толщиной  $h$  и радиуса  $R$ , выполненного из упругого материала. Боковая поверхность диска жестко закреплена, а его основания свободны от напряжений (рис. 1.1). Эту задачу целесообразно рассматривать в цилиндрических координатах  $(r, \varphi, z)$ , которые связаны с декартовыми координатами  $(x, y, z)$  следующими соотношениями<sup>2</sup>:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg(y, x), \quad z = z.$$

Начало координат  $O$  поместим в центре нижнего основания диска, а ось  $OZ$  направим вдоль его оси так, чтобы координаты точек диска принадлежали множеству:

$$\mathcal{D} = \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : r \in ]0, R[, \varphi \in ]0, 2\pi[, z \in ]0, h[\}$$

Векторные поля будем представлять в виде разложений по локальным базисам  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$ , связанным с ортонормированным базисом  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  преобразованиями:

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi, \quad \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi, \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{k}.$$

В частности, векторное поле перемещений точек диска  $\mathbf{u}$  имеет вид:

$$\mathbf{u} = u\mathbf{e}_r + w\mathbf{e}_z,$$

где  $u, w$  — искомые функции, представляющие размерные радиальные и осевые перемещения:

$$u : ]0, R[ \times ]0, h[ \ni (r, z) \mapsto u(r, z) \in \mathbb{R}, \quad w : ]0, R[ \times ]0, h[ \ni (r, z) \mapsto w(r, z) \in \mathbb{R}.$$

<sup>2</sup>Здесь подразумевается расширенная функция арктангенса, учитывающая квадрант угла и случай вырожденного аргумента  $\arctg(y, x) = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & (x=0) \wedge (y \neq 0) \end{cases} + \frac{\pi}{2} [1 - \operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} y (1 + \operatorname{sgn} x)(1 - \operatorname{sgn} y)]$ .

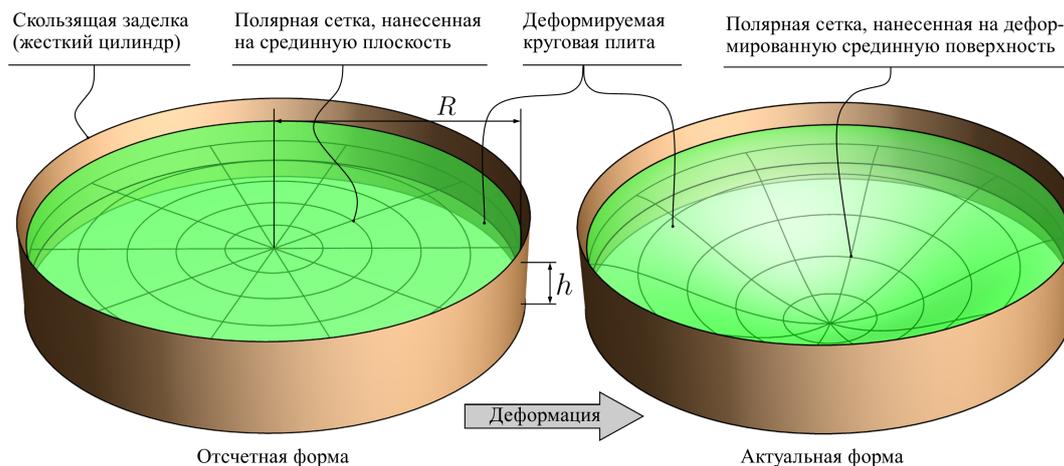


Рис. 1.1. Расчетная схема пластины  
 Fig. 1.1. The plate design scheme

Нагружение реализуется полем внешних объемных сил, однородным всюду, за исключением узкой кольцевой области в окрестности закрепления (рис. 1.2). В этой области, ширина которой может быть выбрана сколь угодно малой, объемная нагрузка направлена в противоположную сторону, а ее интенсивность такова, что весь диск в целом оказывается самоуравновешенным:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(r) \mathbf{e}_z = \left[ p - \frac{pR^2}{R^2 - a^2} \theta(r - a) \right] \mathbf{e}_z, \quad \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R \mathcal{P}(r) r dr d\varphi dz = 0. \quad (1.1)$$

Здесь  $p$  – постоянная объемная плотность заданного (внешнего) силового поля,  $a$  – граница кольцевой области,  $\theta$  – функция Хевисайда. Нагрузка на основной части диска может быть ассоциирована, например, с внешним электростатическим воздействием, а нагрузка в кольцевой области моделирует опорную реакцию. Такая специфическая форма нагружения позволяет в дальнейшем получить более простые разложения и более эффективные для вычисления аналитические формулы, а погрешность, связанная с учетом особенностей конкретной реализации краевых условий, незначительна в силу принципа Сен-Венана [7].

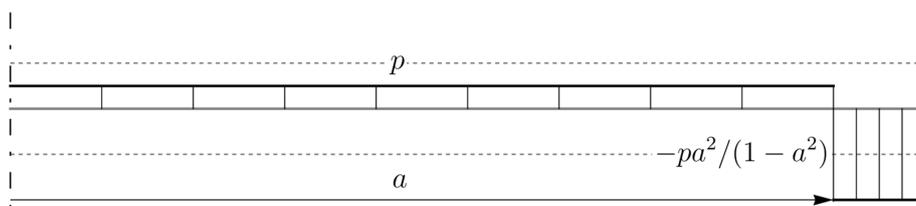


Рис. 1.2. Распределение внешних объемных сил  
 Fig. 1.2. Distribution of external volume forces

В рамках настоящей статьи анализируются четыре математические модели, одна из которых рассматривает материал как гиперупругий (с потенциалом Муни–Ривлина), а остальные – как линейно-упругий. Для того чтобы эти модели были согласованы, характеристики упругого и гиперупругого материалов должны быть связаны между собой. Это можно сделать, если записать гиперупругий потенциал Муни–Ривлина [8] через параметры Ламе  $\mu$ ,  $\lambda$ :

$$\mathcal{W} = \frac{\mu}{4} \left[ (1 - \beta) \left( \frac{I_1}{I_3^{1/3}} - 3 \right) + (1 + \beta) \left( \frac{I_2}{I_3^{2/3}} - 3 \right) \right] + \frac{2\mu + 3\lambda}{6} \left( \sqrt{I_3} - 1 \right)^2, \quad (1.2)$$

где  $\beta$  – безразмерная материальная константа второго порядка, а  $I_1, I_2, I_3$  – главные инварианты левого тензора деформаций Коши–Грина<sup>3</sup>:

$$\mathbf{B} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^T,$$

<sup>3</sup>В настоящей статье при определении результатов действия дифференциальных операторов на векторные и тензорные функции мы придерживаемся нотации Трусделла [7; 9]. Здесь  $\nabla \mathbf{u}$  – линейный оператор, действующий следующим образом:  $\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} + o(\|\mathbf{h}\|)$ .

которые могут быть представлены в сокращенной записи следующим образом:

$$\begin{aligned} I_1 &= 3 + 2q_1 + q_2, \\ I_2 &= 3 + 4q_1 + (2q_1^2 + q_2 - q_3) + 2(q_1q_2 - q_4) + \frac{1}{2}(q_2^2 - q_6), \\ I_3 &= 1 + 2q_1 + (2q_1^2 - q_3) + \frac{2}{3}(2q_1^3 - 3q_1q_3 + q_5) + \\ &\quad + \frac{1}{2}(4q_1^2q_2 - 8q_1q_4 - q_2^2 - 2q_2q_3 + q_6 + 4q_7 + 2q_8) + (q_1q_2^2 - q_1q_6 - 2q_2q_4 + 2q_9) + \\ &\quad + \frac{1}{6}(q_2^3 - 3q_2q_6 + 2q_{10}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} q_1 &= \text{tr } \nabla \mathbf{u}, & q_2 &= \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u}, & q_3 &= \nabla \mathbf{u}^T : \nabla \mathbf{u}, \\ q_4 &= (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) : \nabla \mathbf{u}, & q_5 &= (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) : \nabla \mathbf{u}^T, & q_6 &= (\nabla \mathbf{u}^T \cdot \nabla \mathbf{u}) : (\nabla \mathbf{u}^T \cdot \nabla \mathbf{u}), \\ q_7 &= (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) : (\nabla \mathbf{u}^T \cdot \nabla \mathbf{u}), & q_8 &= (\nabla \mathbf{u}^T \cdot \nabla \mathbf{u}) : (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^T), & q_9 &= (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^T \cdot \nabla \mathbf{u}) : (\nabla \mathbf{u}^T \cdot \nabla \mathbf{u}), \\ q_{10} &= (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^T \cdot \nabla \mathbf{u}) : (\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^T \cdot \nabla \mathbf{u}). \end{aligned}$$

Для линеаризации записанных выше соотношений представим градиент перемещений в виде произведения приведенного градиента  $\tilde{\nabla} \mathbf{u}$  и малого параметра, в качестве которого возьмем норму тензора  $\nabla \mathbf{u}$ :

$$\nabla \mathbf{u} = \epsilon \tilde{\nabla} \mathbf{u}, \quad \epsilon = \|\nabla \mathbf{u}\|, \quad \tilde{\nabla} \mathbf{u} = \frac{\nabla \mathbf{u}}{\|\nabla \mathbf{u}\|},$$

тогда нелинейные функции инвариантов, входящие в выражение потенциальной энергии (1.2), могут быть разложены в ряд Маклорена:

$$\begin{aligned} \frac{I_1}{I_3^{1/3}} &= 3 + \nabla \mathbf{u}^T : \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} - \frac{2}{3}(\text{tr } \nabla \mathbf{u})^2 + o(\epsilon^2), \\ \frac{I_2}{I_3^{2/3}} &= 3 + \nabla \mathbf{u}^T : \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} - \frac{2}{3}(\text{tr } \nabla \mathbf{u})^2 + o(\epsilon^2), \\ (\sqrt{I_3} - 1)^2 &= (\text{tr } \nabla \mathbf{u})^2 + o(\epsilon^2). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Подставляя (1.3) в (1.2), можно получить линейно-упругий потенциал с точностью до  $o(\epsilon^2)$ :

$$\mathcal{W} = \frac{\mu}{2} (\nabla \mathbf{u}^T : \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u}) + \frac{\lambda}{2} (\text{tr } \nabla \mathbf{u})^2 + o(\|\nabla \mathbf{u}\|^2) = \mu (\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon}) + \frac{\lambda}{2} (\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon})^2 + o(\epsilon^2),$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – тензор малых деформаций, представляющий линейную часть тензора деформаций Грина–Сен-Венана  $\mathbf{E}$ , который, в свою очередь, выражается через правый тензор Коши–Грина  $\mathbf{C}$ :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \boldsymbol{\varepsilon} + o(\nabla \mathbf{u}), \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}).$$

Компоненты тензора  $\boldsymbol{\varepsilon}$  связаны с компонентами вектора  $\mathbf{u}$  перемещений соотношениями Коши, которые в случае осевой симметрии записываются в цилиндрических координатах следующим образом<sup>4</sup>:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ 0 & \frac{u}{r} & 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Для построения решения и его последующего анализа целесообразно ввести безразмерные переменные, а именно

- пространственные переменные:  $\tilde{r} = r/R$ ,  $\tilde{z} = z/R$ ;
- перемещения:  $\tilde{u} = u/R$ ,  $\tilde{w} = w/R$ ;
- масштабные параметры:  $\tilde{R} = 1$ ,  $\tilde{h} = h/R$ ;
- модули Ламе:  $\tilde{\mu} = 1$ ,  $\tilde{\lambda} = \lambda/\mu$ ;
- параметры нагружения:  $\tilde{p} = pR/\mu$ ,  $\tilde{a} = a/R$ .

<sup>4</sup>Здесь и далее прямоугольными скобками обозначена матрица оператора в фиксированном базисе.

При использовании этого набора переменных следует учесть, что все вычисляемые функции, например напряжения, и потенциальная энергия также будут безразмерны.

При решении прикладных задач используются различные совокупности материальных констант, в частности, в трехмерных задачах теории упругости традиционно используются модули Ламе, а в технической механике – модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ . Для единообразия в настоящей статье все материальные константы выразим через один безразмерный параметр  $k$ :

$$\tilde{\lambda} = k - 1, \quad \tilde{E} = \frac{E}{\mu} = \frac{3k - 1}{k}, \quad \nu = \frac{k - 1}{2k}.$$

Для выполнения сравнительного анализа напряженного состояния, определяемого из различных решений, будем использовать эквивалентные напряжения Мизеса (корень из второго инварианта девиатора тензора напряжений):

$$\tilde{\sigma}_{\text{eqv}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\tilde{\sigma}_{rr} - \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi})^2 + (\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} - \tilde{\sigma}_{zz})^2 + (\tilde{\sigma}_{zz} - \tilde{\sigma}_{rr})^2 + 6\tilde{\sigma}_{rz}^2}, \quad (1.5)$$

где  $\tilde{\sigma}_{rr}, \tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}, \tilde{\sigma}_{zz}, \tilde{\sigma}_{rz}$  – компоненты тензора напряжений  $\tilde{\sigma}$ .

В дальнейшем все соотношения и результаты будут представлены в безразмерном виде, поэтому, чтобы не усложнять систему обозначений, знак “тильда” будем опускать.

## 2. Решение в трехмерной постановке

Рассмотрим постановку задачи о НДС круговой плиты и ее решение в рамках линейной теории упругости. Задача об упругом цилиндре является классическим примером, допускающим аналитическое решение, различные варианты которого развивались с конца XIX века (решения Похгаммера [10], Кри [11] и их последователей<sup>5</sup>). Основная сложность в построении таких решений заключается в удовлетворении краевым условиям, форма которых диктуется не изначальной постановкой задачи, а возможностью разделить переменные и свести задачу для уравнений с частными производными к независимым двухточечным задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. В решениях Похгаммера–Кри краевые условия специального вида, соответствующие гладко-жесткому контакту (roller contact), задаются на основаниях цилиндра, что не позволяет применить их непосредственно к рассматриваемой в статье проблеме. Однако их модификация, предложенная Файлоном [17] и развитая Сайто [18; 19], позволяет несколько иначе разделить краевые задачи на две двухточечные задачи, перенеся обременительные гладко-жесткие условия на боковую поверхность и предоставив свободу выбора условий на основаниях. При этом условия на боковой поверхности цилиндра как нельзя лучше соответствуют жесткому закреплению в терминах теории пластин, а возможная неточность его реализации (например, можно пожелать абсолютно жесткого закрепления точек цилиндрической поверхности, при котором все компоненты перемещений на нем обращаются в ноль) играет исчезающе малую роль при уменьшении относительной толщины в силу принципа Сен-Венана.

Итак, будем рассматривать задачу о конечном цилиндре при действии объемного поля сил, основания которого свободны от напряжений, а боковая поверхность свободна от касательных напряжений и при этом не может смещаться в радиальном направлении:

$$\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} + k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} \right) = 0, \quad \nabla^2 w + k \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = -\mathcal{P}(r), \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}|_{z=0,h} &= (k+1) \frac{\partial w}{\partial z} + (k-1) \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) \Big|_{z=0,h} = 0, \\ \sigma_{rz}|_{z=0,h} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{z=0,h} = 0, \quad \sigma_{rz}|_{r=1} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0, \quad u|_{r=1} = 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $\nabla^2$  – оператор Лапласа в цилиндрических координатах:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Эти дифференциальные уравнения и краевые условия в совокупности определяют дифференциальный оператор, который оказывается вырожденным, т. е. обладает нулевым собственным значением, соответствующая собственная функция которого характеризует движение цилиндра как жесткого целого вдоль

<sup>5</sup>Подробный литературный обзор представлен, например, в [12]. Обширный перечень работ отечественных авторов по этой теме приведен в [13; 14]. Из более поздних отечественных работ отметим серию статей, посвященных применению метода конечных интегральных преобразований к задаче о деформировании толстых плит [15; 16] и др.

его оси. Однако если правая часть (2.1) не проектируется на это собственное подпространство, то решение задачи существует. Самоуравновешенное силовое поле (1.1) удовлетворяет этому условию.

Для построения решения краевой задачи вначале заметим, что однородные уравнения, соответствующие левой части системы (2.1), допускают разделение переменных. Если искомые функции представить в виде

$$u = f_1(r) g_1(z), \quad w = f_2(r) g_2(z)$$

при соблюдении условий<sup>6</sup>

$$f_2' = -\alpha f_1, \quad f_1' + \frac{f_1}{r} = \alpha f_2, \quad (2.3)$$

где  $\alpha$  – некоторая константа, то система уравнений (2.1) может быть приведена к виду:

$$\begin{aligned} -\left(f_1'' + \frac{f_1'}{r} - \frac{f_1}{r^2}\right) \frac{1}{f_1} &= \frac{g_1''}{g_1} \frac{1}{k+1} - \frac{\alpha k}{k+1} \frac{g_2'}{g_1} = \lambda_1, \\ -\left(f_2'' + \frac{f_2'}{r}\right) \frac{1}{f_2} &= \frac{g_2''}{g_2} (k+1) + \alpha k \frac{g_1'}{g_2} = \lambda_2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

в котором  $\lambda_1, \lambda_2$  обозначают константы разделения. В действительности эти константы оказываются равными, поскольку из шести уравнений (2.3), (2.4) только четыре являются независимыми, и если из системы (2.3) поочередно исключать  $f_1, f_2$ , тогда получим два уравнения, подобных (2.4):

$$f_1'' + \frac{f_1'}{r} - \frac{f_1}{r^2} = -\alpha^2 f_1, \quad f_2'' + \frac{f_2'}{r} = -\alpha^2 f_2.$$

Следовательно,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha^2$ . Таким образом, имеем четыре независимых дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned} r^2 f_1'' + r f_1' + (\alpha^2 r^2 - 1) f_1 &= 0, & r^2 f_2'' + r f_2' + \alpha^2 r^2 f_2 &= 0, \\ g_1'' - \alpha^2 (k+1) g_1 - \alpha k g_2' &= 0, & (k+1) g_2'' - \alpha^2 g_2 + \alpha k g_1' &= 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

которым отвечают разделяющиеся краевые условия:

$$(k+1) \frac{g_2'}{g_1} + \frac{(k-1)}{f_2} \left(f_1' + \frac{f_1}{r}\right) \Big|_{z=0, h} = 0, \quad \frac{g_1'}{g_2} + \frac{f_2'}{f_1} \Big|_{z=0, h} = 0, \quad f_1|_{r=1} = 0, \quad f_2'|_{r=1} = 0,$$

или с учетом условий (2.3):

$$(k+1) g_2' + \alpha (k-1) g_1|_{z=0, h} = 0, \quad g_1' - \alpha g_2|_{z=0, h} = 0, \quad f_1|_{r=1} = 0, \quad f_2'|_{r=1} = 0.$$

Легко видеть, что первые два уравнения (2.5) являются уравнениями Бесселя, соответственно, первого и нулевого порядка; их общие решения могут быть представлены линейными комбинациями функций Бесселя первого и второго рода:

$$f_1 = C_1 J_1(\alpha r) + C_2 Y_1(\alpha r), \quad f_2 = C_3 J_0(\alpha r) + C_4 Y_0(\alpha r), \quad (2.6)$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  – неизвестные константы. Из условия регулярности решения в полюсе константы  $C_2, C_4$  следует положить равными нулю. Константы  $C_1, C_3$  равны друг другу в силу (2.3) и для краткости могут быть приняты равными единице, так как при разделении переменных отдельные функции определяются с точностью до множителя.

Поскольку параметр  $\alpha$  может принимать любое значение из  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  (случай нулевого  $\alpha$  будет рассмотрен отдельно), соотношения (2.6) задают континуальное множество решений, элементы которого в общем случае не удовлетворяют краевым условиям, заданным на боковой поверхности диска. Вместе с тем, если ограничить произвол в выборе параметра  $\alpha$  только корнями трансцендентного уравнения:

$$J_1(\alpha) = 0, \quad (2.7)$$

то удастся получить счетное семейство решений, удовлетворяющих краевым условиям<sup>7</sup>:

$$f_{1n} = J_1(\alpha_n r), \quad f_{2n} = J_0(\alpha_n r), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.8)$$

Корни трансцендентного уравнения (2.7) – нули функции Бесселя первого порядка, достаточно хорошее асимптотическое приближение которых дается формулой:

$$\alpha_n \approx \frac{(\pi + 4n\pi)^2 J_2((1/4 + n)\pi)}{16 J_1((1/4 + n)\pi) - 4(\pi + 4n\pi) J_0((1/4 + n)\pi)}.$$

<sup>6</sup>Здесь и далее в тех случаях, когда это не приводит к неоднозначности, производные функций одной переменной обозначены штрихом.

<sup>7</sup>В рамках настоящей статьи 0 не включается в множество натуральных чисел.

Отдельно рассмотрим случай  $\alpha = 0$  (решение для этого случая будем помечать нулевым индексом):

$$r^2 f''_{10} + r f'_{10} - f_{10} = 0, \quad r^2 f''_{20} + r f'_{20} = 0.$$

В этом случае система уравнений существенно упрощается и может быть непосредственно проинтегрирована:

$$f_{10} = \frac{C_5 r}{2} + \frac{C_6}{r}, \quad f_{20} = C_7 + C_8 \ln r.$$

В рамках рассуждений, аналогичных предыдущему случаю, могут быть определены все константы интегрирования:

$$f_{10} = 0, \quad f_{20} = 1. \tag{2.9}$$

Учитывая (2.8) и (2.9), вектор-функцию  $\{f_1, f_2\}$  можно представить в виде разложения по системе функций  $\{(0, 1), (J_1(\alpha_n r), J_0(\alpha_n r))\}$ , и поскольку оператор, порождаемый уравнениями (2.1) и краевыми условиями (2.2), самосопряженный, то эта система функций составляет базис в гильбертовом пространстве двухкомпонентных вектор-функций, заданных над интервалом  $(0, 1)$ . Соответственно, будем искать решение исходной неоднородной системы (2.1) в виде разложений:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} g_{1n} J_1(\alpha_n r), \quad w = g_{20} + \sum_{n=1}^{\infty} g_{2n} J_0(\alpha_n r). \tag{2.10}$$

Подстановка этих разложений в уравнения (2.1):

$$\sum_{n=1}^{\infty} [g''_{1n} - \alpha^2(k+1)g_{1n} - \alpha k g'_{2n}] J_1(\alpha_n r) = 0,$$

$$(k+1)g''_{20} + \sum_{n=1}^{\infty} [(k+1)g''_{2n} - \alpha^2 g_{2n} + \alpha k g'_{1n}] J_0(\alpha_n r) = -\mathcal{P}(r),$$

и краевые условия (2.2):

$$\sum_{n=1}^{\infty} (g'_{1n} - \alpha g_{2n}) J_1(\alpha_n r) \Big|_{z=0, h} = 0,$$

$$(k+1)g'_{20} + \sum_{n=1}^{\infty} [(k+1)g'_{2n} + \alpha(k-1)g_{1n}] J_0(\alpha_n r) \Big|_{z=0, h} = 0$$

приводит к уравнениям относительно коэффициентов разложений, которые сами являются функциями переменной  $z$ . Для нахождения этих функций подействуем на каждое уравнение системы операторами проектирования:

$$P_0(\mathbf{f}) = \int_0^1 \mathbf{f} \cdot (0, 1) r dr, \quad P_n(\mathbf{f}) = \int_0^1 \mathbf{f} \cdot (J_1(\alpha_n r), J_0(\alpha_n r)) r dr.$$

В результате получим счетное множество систем двух обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$g''_{1n} - \alpha^2(k+1)g_{1n} - \alpha k g'_{2n} = 0, \quad (k+1)g''_{2n} - \alpha^2 g_{2n} + \alpha k g'_{1n} = -b_n, \tag{2.11}$$

и одно уравнение для  $g_{20}$ :

$$(k+1)g''_{20} = -b_0, \tag{2.12}$$

где  $b_0, b_n$  – проекции правой части на собственные подпространства, вычисляемые по формулам:

$$b_0 = 2 \int_0^1 \mathcal{P}(r) r dr = 0, \quad b_n = \frac{2}{J_0(\alpha_n)^2} \int_0^1 \mathcal{P}(r) r J_0(\alpha_n r) dr = \frac{2pa J_1(\alpha_n a)}{\alpha_n (1-a^2) J_0(\alpha_n)^2}.$$

Аналогично спроектируем на собственные подпространства краевые условия:

$$g'_{1n} - \alpha g_{2n} \Big|_{z=0, h} = 0, \quad (k+1)g'_{2n} + \alpha(k-1)g_{1n} \Big|_{z=0, h} = 0, \tag{2.13}$$

$$(k+1)g'_{20} \Big|_{z=0, h} = 0. \tag{2.14}$$

Заметим, что сходимость (в среднеквадратичном) разложений к правым частям уравнений (2.1) обеспечивается самосопряженностью задачи Штурма–Лиувилля, порождаемой первыми двумя уравнениями (2.5), однородными краевыми условиями при  $r = 1$  и тем фактом, что каждое собственное значение этой задачи двукратное.

Рассмотрим решение полученных уравнений относительно функций, зависящих от переменной  $z$ . Уравнение для случая  $\alpha = 0$  (2.12) может быть сразу проинтегрировано:

$$g_{20} = C_9 + C_{10}z - \frac{b_0 z^2}{2(k+1)}.$$

Из этого соотношения следует, что краевые условия (2.14) для  $g_{20}$  не могут быть удовлетворены, если  $b_0$  отлично от нуля или, что то же самое, если объемные силы не самоуравновешены. Если же это условие выполнено, то  $g_{20}$  равняется произвольной константе, неопределяемой из краевых условий. Эта константа характеризует смещение цилиндра как жесткого целого вдоль его оси. После построения полного решения исходной неоднородной системы мы сможем выбрать эту константу так, чтобы прогиб в какой-нибудь наперед заданной точке, например, на контуре, был равен нулю.

Осталось только построить решения для систем (2.11). Общее решение для каждой системы может быть построено как сумма общего решения однородной системы:

$$\begin{aligned} g_{1n}^0 &= C_{1n}e^{\alpha z} + C_{2n}e^{-\alpha z} - C_{3n}e^{\alpha z}(k + k\alpha z) - C_{4n}e^{-\alpha z}(k - k\alpha z), \\ g_{2n}^0 &= -C_{1n}e^{\alpha z} + C_{2n}e^{-\alpha z} - C_{3n}e^{\alpha z}(2 - k\alpha z) + C_{4n}e^{-\alpha z}(2 + k\alpha z) \end{aligned} \quad (2.15)$$

и частного решения неоднородной системы, определяемого методом вариации произвольных постоянных (Лагранжа):

$$\begin{aligned} g_{1n}^* &= \frac{-b_n}{2(k+1)} \int_0^z [k(z-\zeta) \operatorname{sh} \alpha_n(z-\zeta)] d\zeta = -b_n \frac{k(\alpha_n z \operatorname{ch} \alpha_n z - \operatorname{sh} \alpha_n z)}{2(k+1)\alpha_n^2}, \\ g_{2n}^* &= \frac{-b_n}{2\alpha_n(k+1)} \int_0^z [(k+2) \operatorname{sh} \alpha_n(z-\zeta) - k\alpha_n(z-\zeta) \operatorname{ch} \alpha_n(z-\zeta)] d\zeta = \\ &= b_n \frac{k\alpha_n z \operatorname{sh} \alpha_n z + 2(1+k)(1 - \operatorname{ch} \alpha_n z)}{2(k+1)\alpha_n^2}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Константы интегрирования  $C_{1n}, C_{2n}, C_{3n}, C_{4n}$  определяются из краевых условий (2.13):

$$\begin{aligned} C_{1n} &= -\frac{K_n}{k+1} [e^{2\alpha_n h} k^2 - e^{\alpha_n h} (\alpha_n h k^2 - \alpha_n h k + k + 1) - k^2 + k + 1], \\ C_{2n} &= \frac{K_n}{k+1} [e^{2\alpha_n h} (k^2 - k - 1) - e^{\alpha_n h} (\alpha_n h k^2 - \alpha_n h k - k - 1) - k^2], \\ C_{3n} &= -\frac{K_n}{k+1} [e^{2\alpha_n h} k - 2e^{\alpha_n h} (\alpha_n h k - k - 1) - 3k - 2] / 2, \\ C_{4n} &= \frac{K_n}{k+1} [e^{2\alpha_n h} (3k + 2) - 2e^{\alpha_n h} (\alpha_n h k + k + 1) - k] / 2, \end{aligned}$$

где символом  $K_n$  обозначено выражение:

$$K_n = \frac{-b_n}{2\alpha_n^2 k (2e^{\alpha_n h} \alpha_n h - e^{2\alpha_n h} + 1)}.$$

Подставляя константы интегрирования в общее решение (2.15) и прибавляя частное решение (2.16), получим общее решение для систем неоднородных уравнений (2.11). После подстановки этого решения в соотношения (2.10) получим решение исходной краевой задачи (2.1), (2.2):

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^{\infty} K_n e^{-\alpha_n z} \left\{ e^{2\alpha_n h} [k(\alpha_n z - 1) - 1] + e^{\alpha_n h} [k(\alpha_n h - \alpha_n z + 1) + 1] - \right. \\ &\quad \left. - e^{\alpha_n(h+2z)} [k(\alpha_n h - \alpha_n z - 1) - 1] - e^{2\alpha_n z} [k(\alpha_n z + 1) + 1] \right\} J_1(\alpha_n r), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w &= W_0 + \sum_{i=1}^{\infty} K_n e^{-\alpha_n z} \left\{ e^{2\alpha_n h} (\alpha_n z k + 1) + e^{\alpha_n h} [k(\alpha_n h - \alpha_n z) - 1] + e^{\alpha_n(h+2z)} [k(\alpha_n h - \alpha_n z) + 1] - \right. \\ &\quad \left. - 4e^{\alpha_n(h+z)} \alpha_n h k + 2e^{\alpha_n(2h+z)} k - 2e^{\alpha_n z} k + e^{2\alpha_n z} (\alpha_n z k - 1) \right\} J_0(\alpha_n r), \end{aligned}$$

где  $W_0$  – константа, подобранная таким образом, чтобы вертикальное смещение края цилиндра равнялось нулю:

$$W_0 = -\sum_{i=1}^{\infty} K_n [(e^{2\alpha_n h} - 1)(2k + 1) - 2e^{\alpha_n h} \alpha_n h k] J_0(\alpha_n),$$

Напряжения выражаются через перемещения из закона Гука с помощью соотношений Коши:

$$\sigma_{rr} = \sum_{i=1}^{\infty} 2K_n e^{-\alpha_n z} \left\{ \left( \alpha_n J_0(\alpha_n r) - \frac{J_1(\alpha_n r)}{r} \right) \left[ e^{2\alpha_n h} [k(\alpha_n z - 1) - 1] + e^{\alpha_n h} [k(\alpha_n h - \alpha_n z + 1) + 1] - e^{\alpha_n(h+2z)} [k(\alpha_n h - \alpha_n z - 1) - 1] - e^{2\alpha_n z} [k(\alpha_n z + 1) + 1] \right] - (k-1) \alpha_n J_0(\alpha_n r) \left( e^{2\alpha_n h} - e^{\alpha_n h} - e^{\alpha_n(h+2z)} + e^{2\alpha_n z} \right) \right\},$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sum_{i=1}^{\infty} 2K_n e^{-\alpha_n z} \left\{ \left[ e^{2\alpha_n h} [k(\alpha_n z - 1) - 1] + e^{\alpha_n h} [k(\alpha_n h - \alpha_n z + 1) + 1] - e^{\alpha_n(h+2z)} [k(\alpha_n h - \alpha_n z - 1) - 1] - e^{2\alpha_n z} [k(\alpha_n z + 1) + 1] \right] \frac{J_1(\alpha_n r)}{r} - (k-1) \alpha_n J_0(\alpha_n r) \left( e^{2\alpha_n h} - e^{\alpha_n h} - e^{\alpha_n(h+2z)} + e^{2\alpha_n z} \right) \right\},$$

$$\sigma_{zz} = \sum_{i=1}^{\infty} 2K_n e^{-\alpha_n z} \left[ e^{2\alpha_n h} \alpha_n z + e^{\alpha_n h} (\alpha_n h - \alpha_n z) - e^{\alpha_n(h+2z)} (\alpha_n h - \alpha_n z) - e^{2\alpha_n z} \alpha_n z \right] (-k \alpha_n J_0(\alpha_n r)),$$

$$\sigma_{rz} = \sum_{i=1}^{\infty} 2K_n e^{-\alpha_n z} \left[ e^{2\alpha_n h} (\alpha_n z - 1) + e^{\alpha_n h} (\alpha_n h - \alpha_n z + 1) + e^{\alpha_n(h+2z)} (\alpha_n h - \alpha_n z - 1) - 2e^{\alpha_n(h+z)} \alpha_n h + e^{\alpha_n(2h+z)} - e^{\alpha_n z} + e^{2\alpha_n z} (\alpha_n z + 1) \right] (-k \alpha_n J_1(\alpha_n r)).$$

Поскольку решение представлено в рядах, то желательно исследовать их сходимость и оценить погрешность частичных сумм в зависимости от числа учитываемых слагаемых. Для этой цели положим  $p = 1$  и подставим частичные суммы с различным числом слагаемых в уравнения (2.1). Получаемые в результате разложения (которые из общих теоретических рассуждений сходятся в среднеквадратичном) сравним с оригинальной кусочно-постоянной правой частью. Результаты приведены на рис. 2.1. В верхнем ряду показано сопоставление оригинальной кусочно-линейной правой части с результатами действия левой части уравнения (2.1) на частичные суммы 10, 60 и 110 слагаемых, а во втором ряду их отличие от частичной суммы 200 слагаемых. Из рисунка видно, что ряд быстро сходится, но в точке разрыва функции внешних сил имеется неустранимая погрешность (эффект Гиббса). Этот эффект может быть сглажен, если суммирование производить методом средних арифметических (Фейера) [20], однако в этом случае частичные суммы сходятся медленнее, как видно из графиков, приведенных на рис. 2.2.

Сопоставление оригинальной правой части и результата подстановки частичной суммы в левые части (2.1)

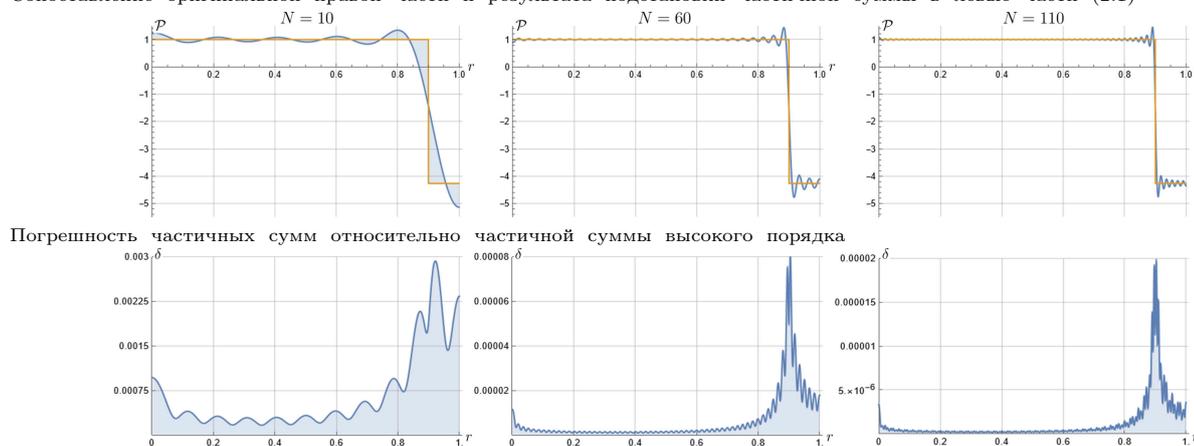


Рис. 2.1. Оценка сходимости частичных сумм  
 Fig. 2.1. Estimation of partial sum convergence

Сопоставление оригинальной правой части и результата подстановки частичной суммы в левые части (2.1)

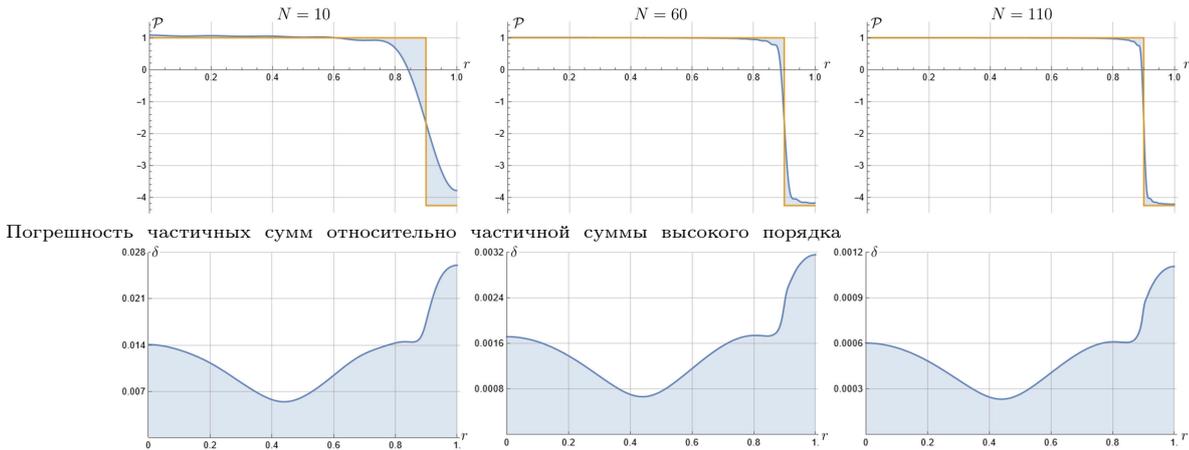


Рис. 2.2. Оценка сходимости частичных сумм (суммирование по Фейеру)  
 Fig. 2.2. Estimation of partial sum convergence (Fejer summation)

### 3. Модель Кирхгофа – Лява

Перейдем к постановке задачи в рамках теории пластин Кирхгофа–Лява. В ее основе лежат гипотезы, ограничивающие возможные перемещения и распределения напряжений по толщине, а именно [21–23]:

- гипотеза нейтральной поверхности: срединная поверхность пластины при изгибе не деформируется;
- статическая гипотеза: нормальные напряжения на площадках параллельных срединной плоскости пластины пренебрежимо малы;
- кинематическая гипотеза: материальный отрезок, изначально перпендикулярный срединной поверхности пластины, в процессе деформации остается перпендикулярным к срединной поверхности.

**Замечание 1.** Часто к кинематической гипотезе добавляют дополнительное требование о сохранении длины материального отрезка [24; 25]. Для того чтобы избежать путаницы, кинематическую гипотезу с дополнительным условием, следуя Н.А. Кильчевскому [26], будем называть гипотезой прямых неизменяемых нормальных элементов.

Ограничения на возможные перемещения сужают класс вектор-функций, представляющих пространственное поле перемещений  $\mathbf{u}(r, z)$ , так что оно может быть выражено через одну скалярную функцию прогиба  $\omega$ , которая в случае осесимметричной деформации зависит от одной переменной  $\omega(r)$ :

$$\mathbf{u} = -z\omega' \mathbf{e}_r + \omega \mathbf{e}_z. \quad (3.1)$$

Такое описание кинематики очень удобно для анализа деформаций пластин и позволяет строить достаточно простые модели, допускающие аналитическое решение. Вместе с тем за эту простоту приходится платить противоречивостью системы принятых гипотез. Действительно, в рамках модели изотропного материала гипотеза прямых, неизменяемых нормалей не может быть выполнена одновременно со статической гипотезой.

В литературе предложено множество способов разрешения этого противоречия, наиболее перспективным из которых представляется подход, предложенный в работе [27]. В ней кинематическая гипотеза рассматривается как наложение идеальных связей на материал пластины. Тогда, в соответствии с принципом материальной индифферентности [8], класс допустимых ортогональных преобразований ограничивается преобразованиями, сохраняющими направление нормалей к срединной поверхности пластины. В результате в материале пластины появляется выделенное направление, т. е. материал становится трансверсально-изотропным, а закон состояния (с учетом осевой симметрии) записывается следующим образом<sup>8</sup> [28]:

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \frac{E}{1+\nu} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \hat{E} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} + \frac{E\nu}{1-\nu^2} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

<sup>8</sup>Коэффициент Пуассона, характеризующий сужение в плоскости изотропии при растяжении нормальных волокон, выбирается равным нулю, так, чтобы гипотеза нейтральной поверхности выполнялась независимо от статической гипотезы.

Здесь  $\varepsilon_{rr}$ ,  $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ ,  $\varepsilon_{zz}$  – компоненты тензора малых деформаций (1.4),  $q$  – реакция идеальных связей, сохраняющих прямой угол, определяемая для каждого элементарного объема,  $\hat{E}$  – модуль Юнга для растяжения волокон нормальных к срединной поверхности. Таким образом, если материал пластины полагается трансверсально-изотропным, то условие сохранения длины нормали является следствием остальных гипотез.

В технической литературе по теории пластин и оболочек, как правило, вопросу об усилиях в идеальных связях уделяют мало внимания, концентрируя его в большей степени на результирующих усилиях – моментах и перерезывающих силах. Но поскольку важным элементом настоящей работы является сравнение эффективных напряжений, вычисляемых в рамках различных подходов, то представляется целесообразным остановиться на этом вопросе подробнее. Как и в любых средах с идеальными связями (например, несжимаемых), усилия в связях определяются из уравнений равновесия. Так, для нахождения зависимости для  $q$  вначале выразим компоненты тензора малых деформаций через функцию  $\omega$ :

$$\varepsilon_{rr} = -z\omega'', \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = -\frac{z\omega'}{r}$$

и подставим результат в закон состояния (3.2):

$$\sigma_{rr} = -\frac{E}{1-\nu^2}z\left(\omega'' + \nu\frac{\omega'}{r}\right), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{E}{1-\nu^2}z\left(\frac{\omega'}{r} + \nu\omega''\right), \quad \sigma_{rz} = \sigma_{zr} = q. \quad (3.3)$$

Поскольку  $\sigma_{rz} = \sigma_{zr} = q$ , то из уравнений равновесия:

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + \mathcal{P}(r) = 0 \quad (3.4)$$

найдем:

$$\sigma_{rz} = \sigma_{zr} = q = -\int\left(\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r}\right)dz = \frac{E}{2(1-\nu^2)}z^2\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2\omega + C(r), \quad (3.5)$$

Неизвестная функция  $C(r)$  определяется из условия отсутствия касательных напряжений на лицевых поверхностях:

$$q = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right)\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2\omega.$$

**Замечание 2.** В настоящем разделе координата  $z$  отсчитывается от срединной поверхности пластины (в отличие от раздела 2, в котором осевая координата отсчитывалась от нижнего основания).

Сократив число искоемых функций до одной,  $\omega$ , получаем из полной системы уравнений равновесия (3.4) и краевых условий переопределенную задачу относительно  $\omega$ , которая в общем случае решений не имеет. Однако, допуская выполнение краевых условий на лицевой поверхности приближенно (в интегральном смысле) и вводя результирующие усилия (результанты) по следующим формулам:

$$\begin{aligned} T_{rr} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{rr} dz = 0, & M_{rr} &= \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{rr} dz = -D\left(\omega'' + \nu\frac{\omega'}{r}\right), \\ T_{\varphi\varphi} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\varphi\varphi} dz = 0, & M_{\varphi\varphi} &= \int_{-h/2}^{h/2} z\sigma_{\varphi\varphi} dz = -D\left(\frac{\omega'}{r} + \nu\omega''\right), \\ Q_{rz} &= Q_{zr} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{rz} dz = -D\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2\omega, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где символ  $D$  обозначает цилиндрическую жесткость:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{kh^3}{3(k+1)},$$

приходим к корректной системе уравнений, выраженных через усилия:

$$T'_{rr} + \frac{T_{rr} - T_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad Q'_{zr} + \frac{Q_{zr}}{r} + \mathcal{P}(r)h = 0, \quad M'_{rr} + \frac{M_{rr} - M_{\varphi\varphi}}{r} - Q_{rz} = 0, \quad (3.7)$$

и краевым условиям, соответствующим жесткому закреплению на круговом контуре:

$$\omega|_{r=1} = 0, \quad \omega'|_{r=1} = 0. \quad (3.8)$$

В модели Кирхгофа уравнения равновесия усилий и моментов в радиальном направлении тождественно удовлетворены; осталось только уравнение равновесия перерезывающих сил:

$$-Q'_{zr} - \frac{Q_{zr}}{r} = D\nabla^2\nabla^2\omega = \mathcal{P}(r)h, \quad (3.9)$$

где  $\nabla^2\nabla^2$  – бигармонический оператор, который в полярных координатах и в случае осевой симметрии приводится к дифференциальному выражению:

$$\nabla^2\nabla^2 f = f^{(4)} + \frac{2f'''}{r} - \frac{f''}{r^2} + \frac{f'}{r^3}.$$

Располагая решением краевой задачи (3.8), (3.9), по формулам (3.3), (3.5) могут быть определены все компоненты тензора напряжений, а из соотношений (1.5) – соответствующее эффективное напряжение (Мизеса).

Решение задачи (3.8), (3.9) может быть получено в замкнутом виде. Действительно, имея в виду фундаментальную систему решений однородного уравнения, соответствующего уравнению (3.9):

$$(1, r^2, \ln r, r^2 \ln r),$$

и используя метод Лагранжа, получим:

$$\omega = \frac{h}{D} \int_0^r \frac{\mathcal{P}(\zeta)}{8} [2(\zeta^2 + r^2) \ln r + (\zeta^2 + 1)(1 - r^2)] \zeta d\zeta + \\ + \frac{h}{D} \int_r^1 \frac{\mathcal{P}(\zeta)}{8} [2(r^2 + \zeta^2) \ln \zeta + (r^2 + 1)(1 - \zeta^2)] \zeta d\zeta.$$

Такая форма представления решения оказывается особо удобной в тех случаях, когда функция распределения внешних сил имеет конечный разрыв, как, например, в случае нагрузки, заданной распределением (1.1). В этом случае после интегрирования имеем:

$$\omega = \begin{cases} \frac{ph}{64D} \left\{ r^4 + \frac{a^2}{1-a^2} [4(a^2 + 2r^2) \ln a + (3 + 2r^2)(1 - a^2)] \right\} & r \leq a \\ -\frac{pha^2}{64D(1-a^2)} \left\{ (r^2 - 1)^2 - 4(a^2 + 2r^2) \ln r - 2(a^2 + 2)(1 - r^2) \right\} & r > a \end{cases}.$$

Заметим, что если устремить параметр  $a$  к единице, то, используя правило Лопиталья–Бернулли, в пределе можно получить решение для случая однородного нагружения:

$$\omega = \lim_{a \rightarrow 1} \frac{ph}{64D} \left\{ r^4 + \frac{a^2}{1-a^2} [4(a^2 + 2r^2) \ln a + (3 + 2r^2)(1 - a^2)] \right\} = \frac{ph}{64D} (r^2 - 1)^2. \quad (3.10)$$

Для проведения сравнительного анализа необходимо иметь выражения для функций прогибов и напряжений, поэтому удобно еще раз выписать функции напряжений, для единообразия выразив их через параметр  $k$ :

$$\sigma_{rr} = -\frac{4k}{k+1} z \left( \omega'' + \frac{k-1}{2k} \frac{\omega'}{r} \right), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{4k}{k+1} z \left( \frac{\omega'}{r} + \frac{k-1}{2k} \omega'' \right), \\ \sigma_{rz} = \sigma_{zr} = \frac{2k}{k+1} \left( z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \frac{d}{dr} \nabla^2 \omega.$$

#### 4. Модель Фешля – фон Кармана

Линейное уравнение изгиба Кирхгофа–Лява не учитывает влияние напряжений в плоскости пластины на ее изгибную жесткость, что оправдано для пластин средней толщины, но ведет к существенным погрешностям (а для ультратонких пластин к ошибкам на несколько порядков) при значительном уменьшении относительной толщины и приближении изгибного НДС к мембранному. Конечно, классическая линейная теория мембран, развитая еще в XVIII веке, приводит к очень простому уравнению – уравнению Пуассона. Но в него в качестве параметра входит усилие натяжения на контуре, определение которого как раз и представляет основную проблему. С достаточной степенью точности задача определения натяжения решается уравнениями Фешля–фон Кармана, предложенными в начале XX века в работах [29; 30]. Эти уравнения в некотором смысле представляют собой модификацию уравнения Кирхгофа–Лява и плоской теории упругости, к которым добавляются нелинейные термы, содержащие взаимное влияние изгиба и напряжений в плоскости. При этом перемещения представляются разложениями, подобными (3.1):

$$\mathbf{u} = (v - z\omega') \mathbf{e}_r + \omega \mathbf{e}_z,$$

где  $v$  – скалярная функция двух координат  $r, \varphi$  (в случае осевой симметрии – одной координаты,  $r$ ).

В модели Фешля–фон Кармана допускаются большие повороты и следует различать отсчетную и актуальную формы пластины, поэтому при описании ее деформаций следует использовать один из тензоров конечных деформаций. Для вывода системы уравнений Фешля–фон Кармана используется редуцированный тензор Грина–Сен-Венана  $\mathbf{E}^*$  (деформации фон Кармана):

$$[\mathbf{E}^*] = \begin{pmatrix} v' + \frac{1}{2}(\omega')^2 - z\omega'' & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v}{r} - z\frac{\omega'}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Компоненты этого тензора связаны с компонентами второго тензора напряжений Пиола–Кирхгофа  $\boldsymbol{\sigma}$  уравнениями состояния специального вида [31], которые могут быть получены формальной подстановкой редуцированного тензора Сен-Венана в уравнение состояния (3.2):

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ v' + \frac{1}{2}(\omega')^2 + \nu \frac{v}{r} - z \left( \omega'' + \nu \frac{\omega'}{r} \right) \right], \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{v}{r} + \nu \left( v' + \frac{1}{2}(\omega')^2 \right) - z \left( \frac{\omega'}{r} + \nu \omega'' \right) \right].$$

Касательные напряжения, как и в предыдущей модели, не определяются из уравнений состояния, но могут быть получены из уравнений равновесия, которые могут быть сформулированы в форме (3.4) для компонент первого тензора Пиола–Кирхгофа  $\mathbf{P}$  [9]:

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (4.1)$$

При этом в рамках приближений Кармана компоненты градиента деформации берутся с точностью до малых<sup>9</sup>:

$$[\mathbf{F}] \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\omega' \\ 0 & 1 & 0 \\ \omega' & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Подставляя эту матрицу в соотношение выше, получим выражения для компонент первого тензора Пиола–Кирхгофа:

$$[\mathbf{P}] \approx \begin{pmatrix} \sigma_{rr} - \omega' \sigma_{zr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\varphi\varphi} & 0 \\ \sigma_{zr} + \omega' \sigma_{rr} & 0 & \omega' \sigma_{rz} \end{pmatrix}.$$

Теперь можно воспользоваться уравнениями равновесия в форме (3.4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \frac{\partial(\omega' \sigma_{zr})}{\partial r} - \frac{(\omega' \sigma_{zr})}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + \omega' \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\partial(\omega' \sigma_{rr})}{\partial r} + \frac{(\omega' \sigma_{rr})}{r} + \mathcal{P}(r) &= 0. \end{aligned}$$

Мы полагаем, что касательные напряжения существенно меньше нормальных, следовательно, их произведения с производной прогиба могут быть отброшены:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + \frac{\partial(\omega' \sigma_{rr})}{\partial r} + \frac{(\omega' \sigma_{rr})}{r} + \mathcal{P}(r) = 0.$$

При сделанных предположениях, касательные напряжения в модели Фешля–фон Кармана полностью совпадают с моделью Кирхгофа:

$$\sigma_{rz} = \sigma_{zr} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left( z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 \omega.$$

**Замечание 3.** Как видно, для вывода уравнений Фешля–фон Кармана приходится несколько вольно обращаться с нелинейными слагаемыми, что ставит вопрос о корректности этой модели. Этот вопрос был подробно рассмотрен в работах Сьярле [31–34] и др., где он показал, что уравнения Фешля–фон Кармана естественно возникают как первый член асимптотического разложения уравнений нелинейной теории упругости.

После приведения к срединной плоскости уравнения равновесия усилий и моментов будут такими же, как и в (3.7), а уравнение равновесия перерезывающих будет дополнено нелинейными слагаемыми:

$$\begin{aligned} T'_{rr} + \frac{T_{rr} - T_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad M'_{rr} + \frac{M_{rr} - M_{\varphi\varphi}}{r} - Q_{rz} = 0, \\ Q'_{zr} + \frac{Q_{zr}}{r} + (\omega' T_{rr})' + \frac{(\omega' T_{rr})}{r} + \mathcal{P}(r) h = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

<sup>9</sup>В рамках этой модели предполагается, что перемещения и квадрат производной прогиба малы по сравнению с единицей.

Здесь моменты и поперечные силы совпадают с (3.6), а мембранные усилия становятся ненулевыми:

$$T_{rr} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ v' + \frac{1}{2} (\omega')^2 + \nu \frac{v}{r} \right], \quad T_{\varphi\varphi} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ \frac{v}{r} + \nu \left( v' + \frac{1}{2} (\omega')^2 \right) \right]. \quad (4.4)$$

Как и в теории Кирхгофа–Лява, соответствующий выбор функции распределения касательных напряжений позволяет тождественно удовлетворить уравнению равновесия моментов. Уравнение равновесия сил в осевом направлении дополняется нелинейными слагаемыми, которые выражают связь между изгибом пластины и ее растяжением в своей плоскости. Нелинейные слагаемые, в свою очередь, определяются из уравнения равновесия сил в радиальном направлении. Для того чтобы удовлетворить этому уравнению, удобно ввести функцию напряжений Эри  $\psi$ :

$$\frac{\psi'}{r} = \frac{T_{rr}}{h}, \quad \psi'' = \frac{T_{\varphi\varphi}}{h}. \quad (4.5)$$

Такой выбор вспомогательной функции позволяет заведомо удовлетворить уравнению равновесия, однако теперь требуется дополнить систему уравнением совместности. Для этого исключим радиальные перемещения из уравнений (4.4), (4.5) и продифференцируем полученное выражение:

$$\nabla^2 \nabla^2 \psi + \frac{E}{2} L[\omega, \omega] = 0, \quad (4.6)$$

где  $L$  – нелинейный дифференциальный оператор:

$$L[f, g] = \frac{1}{r} (f'g'' + g'f'').$$

После подстановки перерезывающей силы и функции Эри в оставшееся уравнение равновесия получим уравнение, замыкающее систему уравнений Фешля–фон Кармана:

$$D\nabla^2 \nabla^2 \omega - hL[\psi, \omega] = \mathcal{P}(r)h. \quad (4.7)$$

В общем случае для того чтобы сформулировать краевую задачу, требуется выразить перемещения через функцию Эри, что приводит к интегральным краевым условиям. Однако в случае осевой симметрии радиальные перемещения напрямую выражаются через производные функции Эри, что позволяет исключить интегралы из краевых условий:

$$v = \frac{1}{E} (\psi''r - \nu\psi').$$

Более удобной может оказаться формулировка системы Фешля–фон Кармана в перемещениях. Такая формулировка может быть получена путем подстановки соотношений (3.6) и (4.4) в уравнения равновесия (4.3):

$$D\nabla^2 \nabla^2 \omega - \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ \left( v' + \frac{1}{2} (\omega')^2 \right) \left( \omega'' + \frac{\omega'}{r} \right) + \left( v'' + \nu \frac{v'}{r} \right) \omega' + \left( (\omega')^2 + \nu \frac{v}{r} \right) \omega'' \right] = \mathcal{P}(r)h, \quad (4.8)$$

$$v'' + \frac{v'}{r} - \frac{v}{r^2} + \omega'\omega'' + \frac{(\omega')^2}{2r} (1-\nu) = 0.$$

При этом первое уравнение (4.8) может быть приведено к более простому виду, если выразить  $v''$  из второго уравнения и подставить результат в его левую часть:

$$D\nabla^2 \nabla^2 \omega - \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ \left( v' + \frac{1}{2} (\omega')^2 \right) \left( \omega'' + \nu \frac{\omega'}{r} \right) + \frac{v}{r} \left( \frac{\omega'}{r} + \nu \omega'' \right) \right] = \mathcal{P}(r)h. \quad (4.9)$$

С одной стороны, недостаток формулировки в перемещениях заключается в утрате симметрии относительно искомых функций. С другой стороны, эта система имеет лишь шестой порядок, в то время как система с функцией Эри – восьмой.

**Замечание 4.** В работе [35] Рейсснер показал, что осевая симметрия позволяет дополнительно снизить порядок первого дифференциального уравнения (4.8):

$$D \left( \omega''' + \frac{\omega''}{r} - \frac{\omega'}{r^2} \right) - \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( v'\omega' + \frac{(\omega')^3}{2} + \nu \frac{v\omega'}{r} \right) = \frac{1}{r} \int \mathcal{P}(r)h r dr.$$

#### 4.1. Гипотеза об однородном натяжении

Система уравнений Фешля–фон Кармана существенно нелинейна и в общем случае не имеет аналитического решения, а ее численное решение осложнено наличием точек бифуркации и требует проведения дополнительного анализа уравнения разветвления<sup>10</sup>. Поэтому на практике обычно стараются

<sup>10</sup>Такой анализ проведен, например, в [36].

избежать численного интегрирования этой системы и решают ее одним из полуаналитических методов. Наиболее простой способ построения полуаналитического решения заключается в принятии дополнительной гипотезы о форме деформированной поверхности с последующим определением ее параметров каким-либо методом (Ритца, Галеркина и т.д.). Существует множество различных решений, полученных таким способом, многие из них представлены в сводных таблицах в работе [37]. Также в последние годы для решения уравнений Фешля–фон Кармана широко применяются различные модификации метода гомотопического анализа [38–40].

В настоящей статье будем использовать упрощенные уравнения Фешля–фон Кармана [41], допускающие построение замкнутого аналитического решения. Этот метод основан на предположении об однородности поля мембранных усилий:

$$\frac{T_{rr}}{h} = \frac{T_{\varphi\varphi}}{h} = \frac{\psi'}{r} = \psi'' = \frac{T_0}{h}.$$

В этом случае уравнение совместности (4.6) удается выполнить лишь приближенно, зато уравнение равновесия (4.7) становится пригодным для аналитического решения:

$$D\nabla^2\nabla^2\omega - T_0\nabla^2\omega = \mathcal{P}(r)h.$$

Для того чтобы построить аналитическое решение, заметим, что полученное уравнение допускает факторизацию:

$$\nabla^2(\nabla^2\omega - \chi^2\omega) = \frac{\mathcal{P}(r)h}{D}, \tag{4.10}$$

где  $\chi = \sqrt{T_0/D}$ . В случае осевой симметрии выражение в скобках представляет собой левую часть уравнения Бесселя нулевого порядка. Следовательно, фундаментальная система решений однородного уравнения, определяемого левой частью (4.10), состоит из модифицированных функций Бесселя и решений уравнения Лапласа:

$$(1, I_0(\chi r), \ln r, K_0(\chi r)),$$

где  $I_0$  – модифицированная функция Бесселя первого рода (функция Инфельда),  $K_0$  – модифицированная функция Бесселя второго рода (функция Макдональда). Частное решение неоднородного уравнения вновь может быть получено методом Лагранжа. Итак, общее решение принимает вид:

$$\omega = C_1 I_0(\chi r) + C_2 \ln r + C_3 K_0(\chi r) + C_4 + \frac{h}{\chi^2 D} \int_0^r \mathcal{P}(\zeta) \left\{ \ln \frac{\zeta}{r} + \frac{I_0(\chi r) K_0(\chi \zeta) - K_0(\chi r) I_0(\chi \zeta)}{\chi \zeta [I_0(\chi \zeta) K_1(\chi \zeta) + I_1(\chi \zeta) K_0(\chi \zeta)]} \right\} \zeta d\zeta.$$

Константы интегрирования  $C_1, C_2, C_3, C_4$  определяются из краевых условий (3.8) и условия регулярности решения в полюсе. Это выражение можно упростить, если заметить, что в знаменателе одного из подынтегральных слагаемых стоит сумма произведений модифицированных функций Бесселя первого и второго рода, которая может быть сведена к степенной функции [42]:

$$I_0(\chi \zeta) K_1(\chi \zeta) + I_1(\chi \zeta) K_0(\chi \zeta) = \frac{1}{\chi \zeta}.$$

Исключая константы, можно получить общее решение в виде:

$$\omega = \frac{h}{\chi^2 D} \int_0^r \mathcal{P}(\zeta) \left\{ \frac{I_0(\chi \zeta) + I_0(\chi r) - I_0(\chi) - \chi I_0(\chi \zeta) I_0(\chi r) K_1(\chi)}{\chi I_1(\chi)} - I_0(\chi \zeta) K_0(\chi r) - \ln r \right\} \zeta d\zeta + \frac{h}{\chi^2 D} \int_r^1 \mathcal{P}(\zeta) \left\{ \frac{I_0(\chi r) + I_0(\chi \zeta) - I_0(\chi) - \chi I_0(\chi r) I_0(\chi \zeta) K_1(\chi)}{\chi I_1(\chi)} - I_0(\chi r) K_0(\chi \zeta) - \ln \zeta \right\} \zeta d\zeta.$$

Для случая ступенчатой нагрузки, заданной в виде (1.1), имеем:

$$\omega = \begin{cases} \frac{ph}{\chi^2 D} \left\{ -\frac{1}{\chi^2} - \frac{r^2}{4} + \frac{a}{1-a^2} \left[ \frac{I_1(\chi a)}{\chi^2 I_1(\chi)} - \frac{I_0(\chi r)}{\chi I_1(\chi)} (I_1(\chi a) K_1(\chi) - I_1(\chi) K_1(\chi a)) - a \left( \frac{1}{2} \ln a + \frac{1}{\chi^2} \right) \right] \right\} & r \leq a \\ \frac{pha}{\chi^2 D(1-a^2)} \left\{ \frac{I_1(\chi a)}{\chi^2 I_1(\chi)} - \frac{I_1(\chi a)}{\chi I_1(\chi)} (I_0(\chi r) K_1(\chi) + I_1(\chi) K_0(\chi r)) - a \left( \frac{1}{2} \ln r + \frac{1-r^2}{4} \right) \right\} & r > a \end{cases}. \tag{4.11}$$

Заметим, что в результате предельного перехода может быть получена формула для случая однородного нагружения:

$$\omega = \frac{ph}{\chi^2 D} \left[ \frac{I_0(\chi r) - I_0(\chi)}{2\chi I_1(\chi)} + \frac{1-r^2}{4} \right].$$

Напряжения выражаются через постоянное натяжение и функцию прогиба следующим образом:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{T_0}{h} - \frac{4k}{k+1}z \left( \omega'' + \frac{k-1}{2k} \frac{\omega'}{r} \right), & \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{T_0}{h} - \frac{4k}{k+1}z \left( \frac{\omega'}{r} + \frac{k-1}{2k} \omega'' \right), \\ \sigma_{rz} = \sigma_{zr} &= \frac{2k}{k+1} \left( z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \frac{d}{dr} \nabla^2 \omega.\end{aligned}$$

Перед вычислением эквивалентных напряжений для пластины Кармана необходимо отметить, что формула (1.5) справедлива лишь в тех случаях, когда номинальные и истинные напряжения не различают.

В противном случае критерий пластичности Мизеса следует переформулировать в терминах компонент тензора истинных напряжений Коши  $\mathbf{S}$ :

$$S_{\text{eqv}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(S_{rr} - S_{\varphi\varphi})^2 + (S_{\varphi\varphi} - S_{zz})^2 + (S_{zz} - S_{rr})^2 + 6 S_{rz}^2},$$

который связан с  $\boldsymbol{\sigma}$  следующим образом [9]:

$$\mathbf{S} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^T.$$

Здесь  $J = \det(\mathbf{F})$  – якобиан преобразования. Используя упрощенный тензор градиента деформации (4.2), после соответствующих упрощений получим:

$$[\mathbf{S}] \approx \begin{pmatrix} \sigma_{rr} - \omega'(\sigma_{rz} + \sigma_{zr}) & 0 & \sigma_{rz} + \omega'\sigma_{rr} - (\omega')^2\sigma_{zr} \\ 0 & \sigma_{\varphi\varphi} & 0 \\ \sigma_{zr} + \omega'\sigma_{rr} - (\omega')^2\sigma_{rz} & 0 & (\omega')^2\sigma_{rr} + \omega'(\sigma_{rz} + \sigma_{zr}) \end{pmatrix}.$$

Для использования полученных решений необходимо определить параметр  $T_0$ , который характеризует натяжение пластины в своей плоскости. Он может быть найден из упрощенного решения методом Бубнова–Галеркина. В настоящей статье мы рассмотрим два таких решения – для пластин и мембран.

## 4.2. Решение методом Бубнова–Галеркина

Так как в рамках настоящей работы это решение носит вспомогательный характер, ограничимся лишь одной пробной функцией прогибов, которую вслед за [21] выберем подобной решению задачи об изгибе круглой пластины в рамках модели Кирхгофа–Лява (3.10):

$$\omega = C (r^2 - 1)^2, \quad (4.12)$$

где  $C$  – неизвестный множитель. Для определения радиальных перемещений подставим это выражение для функции прогибов во второе уравнение системы (4.8):

$$v'' + \frac{v'}{r} - \frac{v}{r^2} + 32C^2r^3(r^2 - 1) + 8C^2r(r^2 - 1)^2(3 - \nu) = 0.$$

После интегрирования с учетом краевых условий приходим к выражению:

$$v = \frac{C^2}{6} [-7r^7 + 20r^5 - 18r^3 + 5r + \nu(r^7 - 4r^5 + 6r^3 - 3r)]. \quad (4.13)$$

Таким образом, получены поля перемещений с точностью до неизвестного множителя  $C$ , который следует определять из условия ортогональности пробной функции и невязки уравнения равновесия (4.9):

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left\{ 64DC + \frac{4EhC^3}{3} \left[ 5r^8 - 20r^6 + 30r^4 - 22r^2 + 5 - \frac{\nu(4r^2 - 2)}{1 - \nu} \right] - \mathcal{P}(r)h \right\} (r^2 - 1)^2 r d\varphi dr = 0.$$

Для случая постоянной нагрузки  $\mathcal{P}(r) = p$  получим кубическое уравнение относительно  $C$ :

$$\frac{Eh(23 - 9\nu)}{21(1 - \nu)} C^3 + 32DC - \frac{ph}{2} = \frac{h(3k - 1)(37k + 9)}{21k(k + 1)} C^3 + 32DC - \frac{ph}{2} = 0, \quad (4.14)$$

которое имеет одно вещественное решение, определяемое по формуле Кардано.

Аналогично рассмотрим систему уравнений Фешля–фон Кармана для случая абсолютно гибкой мембраны, которая может быть получена из исходных уравнений предельным переходом при стремлении цилиндрической жесткости  $D$  к нулю. Имеем:

$$\begin{aligned}\frac{E}{1 - \nu^2} \left[ \left( v' + \frac{1}{2} (\omega')^2 \right) \left( \omega'' + \nu \frac{\omega'}{r} \right) + \frac{v}{r} \left( \frac{\omega'}{r} + \nu \omega'' \right) \right] + \mathcal{P}(r) &= 0, \\ v'' + \frac{v'}{r} - \frac{v}{r^2} + \omega' \omega'' + \frac{(\omega')^2}{2r} (1 - \nu) &= 0.\end{aligned}$$

Для решения этой системы методом Бубнова–Галеркина часто [43–45] выбирают пробную функцию для прогибов, обеспечивающую сферическую форму деформированной поверхности:

$$\omega = C (r^2 - 1). \quad (4.15)$$

Повторяя выкладки (4.13) – (4.14), получим функцию радиальных перемещений:

$$v = C^2 \frac{3 - \nu}{4} (r - r^3) \quad (4.16)$$

и выражение для неизвестного множителя:

$$C = -\sqrt[3]{\frac{3(1-\nu)p}{(7-\nu)E}} = -\sqrt[3]{\frac{3(k+1)kp}{(3k-1)(13k+1)}}.$$

После определения функций перемещений можно определить мембранные усилия по формулам (4.4), которые удобно записать через  $k$ :

$$T_{rr} = \frac{4kh}{k+1} \left[ v' + \frac{1}{2} (\omega')^2 + \frac{k-1}{2k} \frac{v}{r} \right], \quad T_{\varphi\varphi} = \frac{4kh}{k+1} \left[ \frac{v}{r} + \frac{k-1}{2k} \left( v' + \frac{1}{2} (\omega')^2 \right) \right].$$

Для использования решения (4.11) поля мембранных усилий необходимо осреднить. Осреднение будем проводить из условия равенства работ осредненных усилий и фактических:

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} T_0 \left( v' + \frac{(\omega')^2}{2} + \frac{v}{r} \right) r d\varphi dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[ T_{rr} \left( v' + \frac{(\omega')^2}{2} \right) + T_{\varphi\varphi} \frac{v}{r} \right] r d\varphi dr.$$

При вычислении этого интеграла для относительно толстых пластин целесообразно использовать решение (4.12), (4.13), а для ультратонких мембран – решение (4.15), (4.16).

## 5. Модель мембран Адкинса – Ривлина – Грина

Рассмотрим систему уравнений, описывающих выпучивание закрепленной на контуре мембраны с позиций нелинейной теории упругости. Такая система была впервые получена в работе Адкинса и Ривлина [46] для мембраны из несжимаемого материала Муни–Ривлина. Эта система довольно громоздка и содержит шестнадцать дифференциальных уравнений, что, впрочем, не помешало ее авторам получить численное решение. Позднее, в работе Янга и Фенга [47], эта система для случая осевой симметрии была сведена к трем дифференциальным уравнениям первого порядка.

Вывод уравнений модели Адкинса и Ривлина также опирается на статическую и кинематическую гипотезы Кирхгофа, однако теперь перемещения точек мембраны считаются конечными и не предполагается, что нормальное волокно сохраняет свою длину. В этом случае кинематика мембраны описывается следующим полем перемещений:

$$\mathbf{u} = v\mathbf{e}_r + \omega\mathbf{e}_z + z(\lambda_z\mathbf{e}_n - \mathbf{e}_z), \quad (5.1)$$

где  $\lambda_z$  – отношение толщин мембраны в актуальной и отсчетной формах, а  $\mathbf{e}_n$  – семейство единичных нормалей к срединной поверхности. Такая запись вектора перемещений достаточна наглядна и позволяет сразу разделить слагаемые по физическому смыслу. Однако для дальнейших выкладок она не очень удобна, так как содержит векторы разных базисов – базиса цилиндрической системы координат и базиса Дарбу, построенного на деформированной поверхности мембраны ( $\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_n$ ). Эти базисы связаны преобразованиями:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_s &= \mathbf{e}_r \cos \theta - \mathbf{e}_z \sin \theta, & \mathbf{e}_\varphi &= \mathbf{e}_\varphi, & \mathbf{e}_n &= \mathbf{e}_r \sin \theta + \mathbf{e}_z \cos \theta, \\ \mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_s \cos \theta + \mathbf{e}_n \sin \theta, & \mathbf{e}_\varphi &= \mathbf{e}_\varphi, & \mathbf{e}_z &= -\mathbf{e}_s \sin \theta + \mathbf{e}_n \cos \theta, \end{aligned}$$

где  $\theta$  – угол поворота нормали срединной поверхности мембраны. Для дальнейших построений более удобным оказывается представление перемещений (5.1) в компонентах разложений по базису Дарбу. При этом матрицы градиента деформаций и левого тензора Коши–Грина принимают диагональный вид:

$$[\mathbf{F}] = \begin{pmatrix} \lambda_r & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{B}] = \begin{pmatrix} \lambda_r^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\varphi^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z^2 \end{pmatrix},$$

где  $\lambda_r, \lambda_\varphi$  – главные удлинения в радиальном и окружном направлениях, связанные с перемещениями формулами:

$$\lambda_r = \sqrt{(1+v')^2 + \omega'^2}, \quad \lambda_\varphi = 1 + \frac{v}{r}. \quad (5.2)$$

Здесь нужно отметить, что, в отличие от моделей пластин, в модели мембран не учитываются слагаемые, зависящие от нормальной координаты  $z$ , т. е. эта модель имеет нулевой порядок асимптотического разложения.

В этой модели материал полагается несжимаемым, что приводит к существенному упрощению выражения для потенциала Муни–Ривлина (1.2):

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \frac{1}{4} \left[ (1 - \beta) \left( \frac{I_1}{I_3^{1/3}} - 3 \right) + (1 + \beta) \left( \frac{I_2}{I_3^{2/3}} - 3 \right) \right] + \frac{3k - 1}{6} \left( \sqrt{I_3} - 1 \right)^2 = \\ &= \frac{1}{4} \left[ (1 - \beta) (\lambda_r^2 + \lambda_\varphi^2 + \lambda_z^2 - 3) + (1 + \beta) (\lambda_r^2 \lambda_\varphi^2 + \lambda_\varphi^2 \lambda_z^2 + \lambda_z^2 \lambda_r^2 - 3) \right]. \end{aligned}$$

Это выражение следует дополнить условием несжимаемости:

$$\det(\mathbf{F}) = J = \lambda_r \lambda_\varphi \lambda_z = 1.$$

Конкретный вид функции упругого потенциала позволяет получить компоненты первого тензора напряжений Пиола–Кирхгофа по формуле Дойля–Эриксона, однако эту формулу следует модифицировать для учета несжимаемости:

$$\mathbf{P} = 2\mathbf{F} \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{B}} + s \frac{\partial J}{\partial \mathbf{B}} \right); \quad [\mathbf{P}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \lambda_r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \lambda_\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \lambda_z} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \lambda_\varphi \lambda_z & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_z \lambda_r & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_r \lambda_\varphi \end{pmatrix},$$

где  $s$  – реакция идеальных связей, обеспечивающих несжимаемость. Переходя к компонентам, получим:

$$\begin{aligned} P_{rr} &= \frac{1 - \beta}{2} [\lambda_r + \alpha \lambda_r (\lambda_\varphi^2 + \lambda_z^2) + s \lambda_\varphi \lambda_z], & P_{\varphi\varphi} &= \frac{1 - \beta}{2} [\lambda_\varphi + \alpha \lambda_\varphi (\lambda_z^2 + \lambda_r^2) + s \lambda_z \lambda_r], \\ P_{zz} &= \frac{1 - \beta}{2} [\lambda_z + \alpha \lambda_z (\lambda_r^2 + \lambda_\varphi^2) + s \lambda_r \lambda_\varphi], \end{aligned}$$

где  $\alpha = (1 + \beta) / (1 - \beta)$ . Отсюда по формуле, подобной (4.1):

$$\mathbf{S} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}^T,$$

можно получить компоненты тензора напряжений Коши  $\mathbf{S}$ . Используя условие несжимаемости, исключим из выражений третью кратность удлинения  $\lambda_z$ :

$$\begin{aligned} S_{rr} &= \frac{1 - \beta}{2} \left[ \lambda_r^2 + \alpha \lambda_r^2 \left( \lambda_\varphi^2 + \frac{1}{\lambda_r^2 \lambda_\varphi^2} \right) + s \right], & S_{\varphi\varphi} &= \frac{1 - \beta}{2} \left[ \lambda_\varphi^2 + \alpha \lambda_\varphi^2 \left( \lambda_r^2 + \frac{1}{\lambda_r^2 \lambda_\varphi^2} \right) + s \right], \\ S_{zz} &= \frac{1 - \beta}{2} \left[ \frac{1}{\lambda_r^2 \lambda_\varphi^2} + \alpha \frac{1}{\lambda_r^2 \lambda_\varphi^2} (\lambda_r^2 + \lambda_\varphi^2) + s \right]. \end{aligned}$$

Неизвестную реакцию идеальных связей  $s$  можно определить из условия выполнения статической гипотезы Кирхгофа:

$$S_{zz} = 0.$$

Тогда тензор напряжений Коши будет содержать лишь две ненулевые компоненты:

$$S_{rr} = \frac{1 - \beta}{2} \left( \lambda_r^2 - \frac{1}{\lambda_r^2 \lambda_\varphi^2} \right) (1 + \alpha \lambda_\varphi^2), \quad S_{\varphi\varphi} = \frac{1 - \beta}{2} \left( \lambda_\varphi^2 - \frac{1}{\lambda_r^2 \lambda_\varphi^2} \right) (1 + \alpha \lambda_r^2).$$

Для подстановки в уравнения равновесия полученные напряжения следует осреднить по толщине мембраны в актуальной форме:

$$T_{rr} = \lambda_z h S_{rr} = \frac{h S_{rr}}{\lambda_r \lambda_\varphi}, \quad T_{\varphi\varphi} = \lambda_z h S_{\varphi\varphi} = \frac{h S_{\varphi\varphi}}{\lambda_r \lambda_\varphi}.$$

После осреднения можно получить усилия, которые должны удовлетворять уравнениям равновесия в актуальной конфигурации:

$$\frac{\partial T_{rr}}{\partial \rho} + \frac{T_{rr} - T_{\varphi\varphi}}{\rho} = 0, \quad T_{rr} \kappa_1 + T_{\varphi\varphi} \kappa_2 = \mathcal{P}(r) h, \quad (5.3)$$

где  $\rho$  – радиальная координата точек мембраны в актуальной форме:

$$\rho = r + v,$$

а  $\kappa_1, \kappa_2$  – главные кривизны деформированной поверхности<sup>11</sup>:

$$\kappa_1 = \frac{\rho' \omega'' - \rho'' \omega'}{\lambda_r^3}, \quad \kappa_2 = \frac{\omega'}{\lambda_r \rho}.$$

<sup>11</sup>Здесь штрихами обозначена производная по  $r$ .

Для получения наиболее компактной системы дифференциальных уравнений выберем следующий набор главных переменных:

$$y_1 = \lambda_r, \quad y_2 = \lambda_\varphi = \frac{\rho}{r}, \quad y_3 = \rho'. \quad (5.4)$$

В новых обозначениях уравнения равновесия (5.3) имеют следующий вид:

$$\frac{T'_{rr}}{y_3} + \frac{T_{rr} - T_{\varphi\varphi}}{y_2 r} = 0, \quad T_{rr} \frac{y'_1 y_3 - y_1 y'_3}{y_1^2 \sqrt{y_1^2 - y_3^2}} + T_{\varphi\varphi} \frac{\sqrt{y_1^2 - y_3^2}}{y_1 y_2 r} = \mathcal{P}(r) h.$$

Для удобства также выпишем усилия в новых переменных:

$$T_{rr} = \frac{h(1-\beta)}{2} \left( \frac{y_1}{y_2} - \frac{1}{y_1^3 y_2^3} \right) (1 + \alpha y_2^2), \quad T_{\varphi\varphi} = \frac{h(1-\beta)}{2} \left( \frac{y_2}{y_1} - \frac{1}{y_1^3 y_2^3} \right) (1 + \alpha y_1^2).$$

Подставляя эти выражения в уравнения равновесия, получим систему двух дифференциальных уравнений изгиба мембраны:

$$\begin{aligned} r y'_1 \left( \frac{1}{y_2} + \frac{3}{y_1^4 y_2^3} \right) (1 + \alpha y_2^2) + \left( \frac{y_3}{y_2} - 1 \right) \left( \frac{3}{y_1^3 y_2^3} + \alpha y_1 y_2 \right) + \frac{y_1}{y_2} - \frac{y_3}{y_1} + \frac{\alpha}{y_1 y_2} \left( \frac{y_3}{y_2^2} - \frac{1}{y_1^2} \right) &= 0, \\ \frac{(y'_1 y_3 - y_1 y'_3)}{y_1^2 \sqrt{y_1^2 - y_3^2}} \left( \frac{y_1}{y_2} - \frac{1}{y_1^3 y_2^3} \right) (1 + \alpha y_2^2) + \frac{\sqrt{y_1^2 - y_3^2}}{y_1 y_2 r} \left( \frac{y_2}{y_1} - \frac{1}{y_1^3 y_2^3} \right) (1 + \alpha y_1^2) - \frac{2\mathcal{P}(r)}{1-\beta} &= 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Эти соотношения необходимо дополнить уравнением, связывающим главные переменные:

$$y'_2 = \frac{1}{r} (y_3 - y_2).$$

Особенностью этой системы уравнений является то, что она сформулирована в деформациях, а не перемещениях. Соответственно и краевые условия следует формулировать для деформаций. В рассматриваемой задаче окружная деформация на контуре равна нулю и в полюсе имеется особая точка, в которой все направления неразличимы, следовательно, в этой точке радиальная и окружная деформации равны. Кроме того, в полюсе первая и вторая кривизна равны нулю, тогда из соотношения (5.2) следует, что производная радиальной координаты  $\rho$  в полюсе равна первой кратности удлинения. Эти соображения, с учетом (5.4), позволяют записать краевые условия через главные переменные:

$$y_1|_{r=0} = y_2|_{r=0} = y_3|_{r=0}, \quad y_2|_{r=1} = 1. \quad (5.6)$$

Решение краевой задачи (5.5), (5.6) удобно проводить методом пристрелки. Для этого необходимо свести краевую задачу к задаче Коши, задавшись значением главных переменных в начале участка интегрирования, т. е. в полюсе. Из первого краевого условия видно, что это значение одинаково для всех трех главных переменных:

$$y_1|_{r=0} = y_2|_{r=0} = y_3|_{r=0} = \lambda_0.$$

Затем нужно решить полученную задачу Коши каким-либо численным методом, например, методом Рунге–Кутты. После этого следует проверить выполнение краевого условия на контуре и при необходимости скорректировать  $\lambda_0$ .

Недостаток этого метода заключается в том, что он не устойчив относительно малых колебаний параметра  $\lambda_0$ . Эту трудность удастся преодолеть если в качестве начального приближения параметра выбрать значение кратности удлинения в полюсе, полученное из решения упрощенной задачи. Например, из решения (4.15), (4.16):

$$\lambda_0 = \sqrt{(1 + \nu')^2 + \omega'^2} \Big|_{r=0} = 1 + C^2 \frac{3 - \nu}{4} = 1 + \frac{5k + 1}{8k} \sqrt[3]{\frac{9(k+1)^2 k^2 p^2}{(13k+1)^2 (3k-1)^2}}.$$

## 6. Сравнительный анализ

Располагая аналитическими и численно-аналитическими решениями, полученными для кругового диска в предыдущих разделах, произведем сравнительный вычислительный анализ с целью выявления областей их применения на “оси относительных толщин”.

В безразмерных переменных, помимо относительной толщины, используются два безразмерных параметра, характеризующие материал,  $k$  и  $\beta$ , и два, характеризующие нагружение,  $p$  и  $a$ . Относительную толщину будем варьировать в интервале  $(1, 10^{-3})$ . Параметр формы нагрузки  $a$  выберем равным 0.99, что соответствует случаю равномерного нагружения и однопроцентной кольцевой опорной зоне (что реализуется в натуральных экспериментах).

Поскольку сравнительный анализ ориентирован на элементы МЭМС, будем полагать, что круговой диск изготовлен из химически чистого алюминия (как результат напыления или химического осаждения). При этом  $k = 3$ , что соответствует величине 0.33 для коэффициента поперечного сжатия. Это значение соответствует данным, приведенным в справочной литературе. Выбор значения параметра  $\beta$  не принципиален, так как при малых деформациях он практически не влияет на значение упругой потенциальной энергии материала. Для удобства выберем его равным нулю.

Отдельно следует определиться с интенсивностью нагружения  $p$ , поскольку при столь значительном изменении относительных толщин величина  $p$  должна подбираться из условий разумных значений максимальных перемещений. По этой причине на каждом участке “оси относительно толщины” будет фиксироваться не нагрузка, а прогиб в центре диска. Тогда сравнение перемещений будем проводить опосредовано, по величине нагрузки, потребной для того, чтобы обеспечить заданный прогиб, т. е. будем сравнивать “жесткость” разных моделей. А для сравнения напряженных состояний будем оценивать величину максимального эквивалентного напряжения при заданном прогибе.

Всего было проведено три серии сравнений. Параметры расчетов перечислены в таблице, а результаты приведены на рис. 6.1–6.6.

Таблица

**Параметры расчетов**

Table

**Calculation parameters**

Модели	3D и KL	KL и FvKp			FvKm и GAR		
$\omega_{\text{Max}}$	1/4	1/10	1/50	1/100	1/10	1/50	1/100
$h$	[0.01, 1]	[0.01, 1]			[0.001, 0.1]		
Результаты	Рис. 6.1, 6.2	Рис. 6.3, 6.4			Рис. 6.5, 6.6		
3D – модель линейной теории упругости;      KL – пластина Кирхгофа–Лява; FvKp – пластина Фешля–фон Кармана (натяжение из решения для пластины); FvKm – пластина Фешля–фон Кармана (натяжение из решения для GAR); GAR – мембрана Грина–Ривлина–Адкинса							

На основании сопоставления результатов расчетов можно определить области параметров, в которых каждая из рассматриваемых моделей адекватно описывает НДС изгибаемой пластины. Для уровня погрешности 5 % относительные толщины, при которых может быть использована теория Кирхгофа–Лява, находятся в интервале от 1/10 до 1/30 (при максимальном прогибе 1/100 радиуса). В интервале от 1/30 до 1/480 может быть использована теория Фешля–фон Кармана, а при меньших значениях отношения толщины к радиусу — теория Грина–Ривлина–Адкинса.

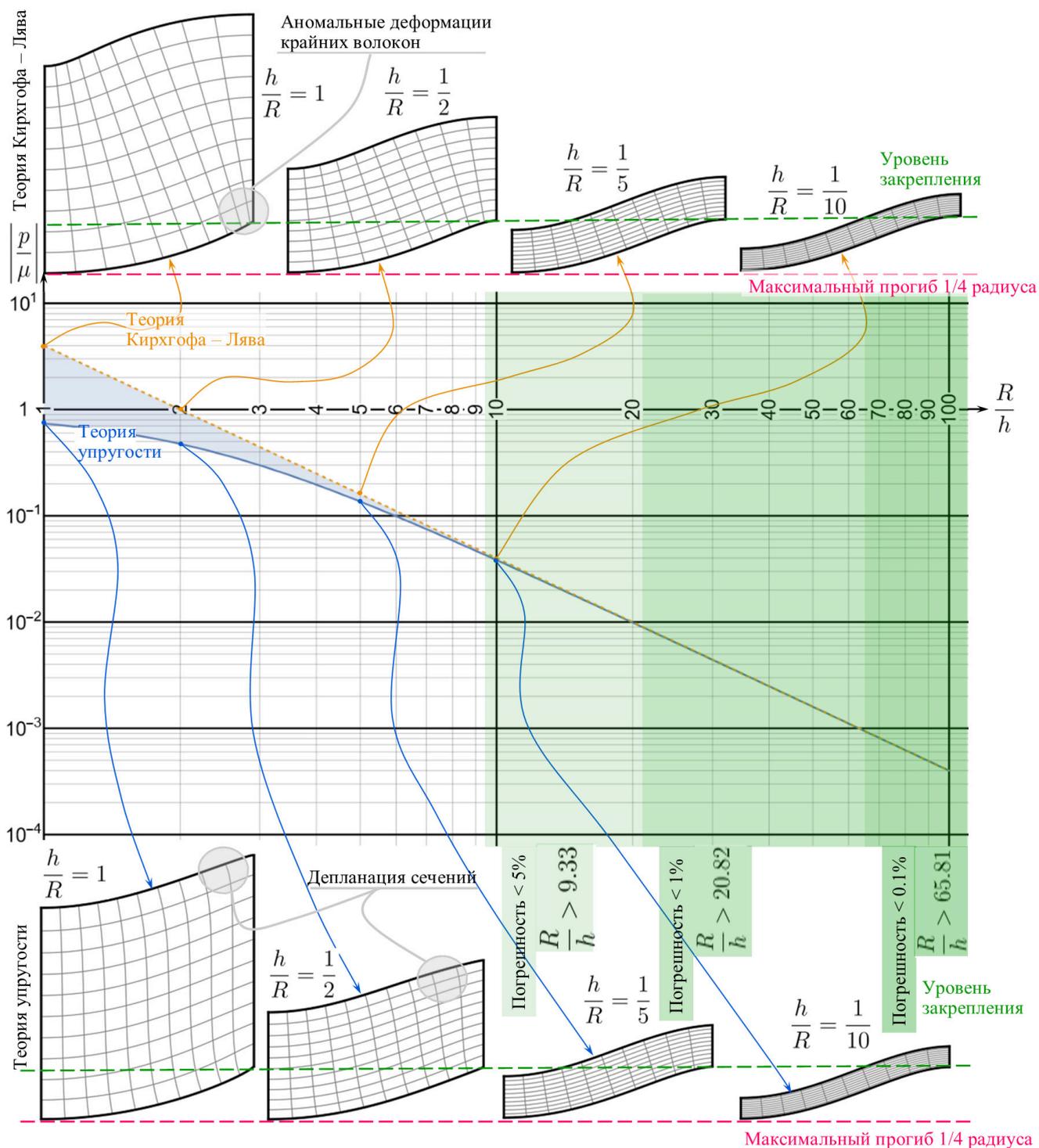


Рис. 6.1. Сравнение “жесткости” моделей Кирхгофа–Лява и линейной теории упругости  
 Fig. 6.1. “Stiffness” comparison of Kirchhoff–Love and linear theory of elasticity models

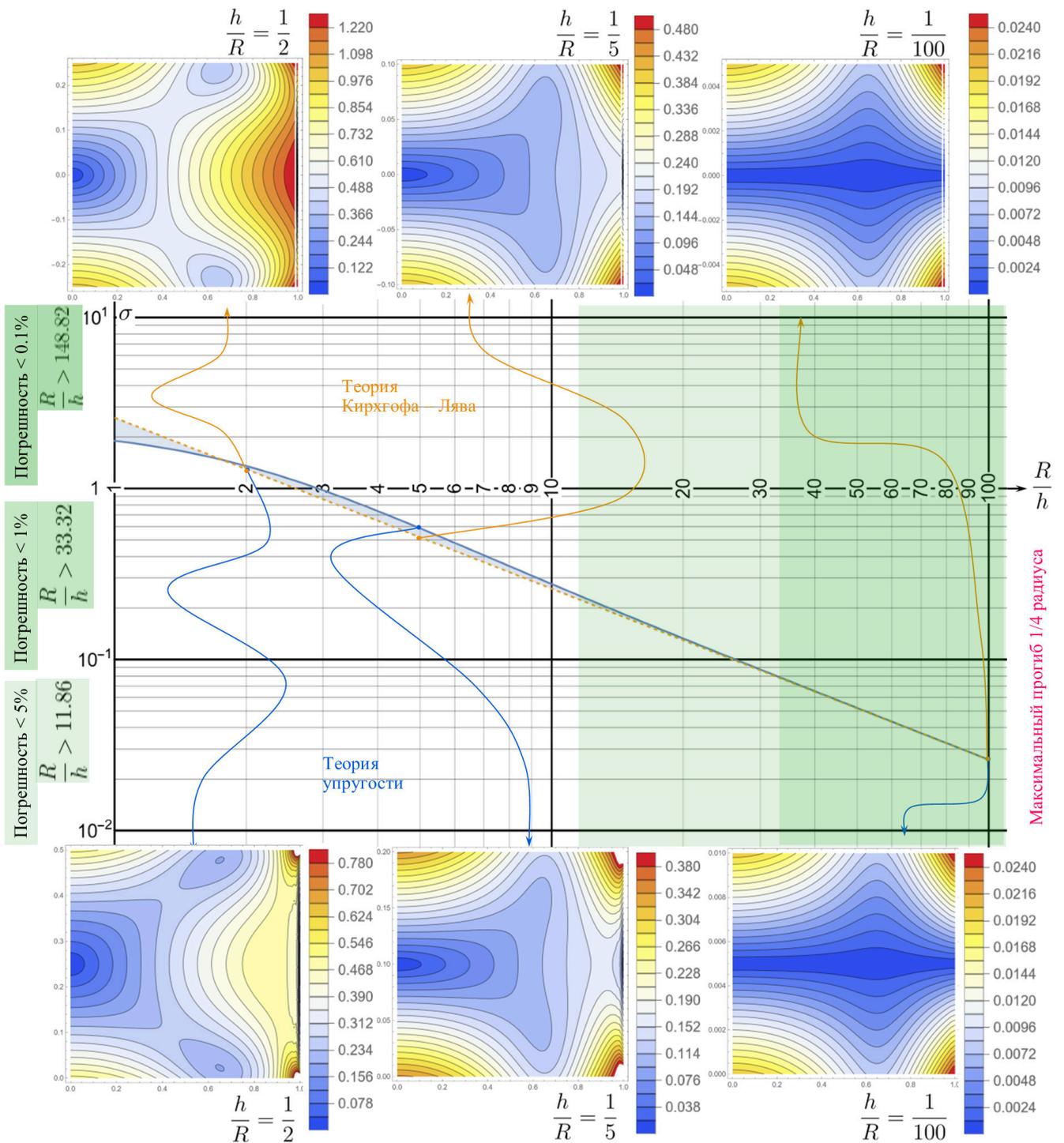


Рис. 6.2. Сравнение эквивалентных напряжений Мизеса по теории Кирхгофа–Лява и линейной теории упругости (на контуре)

Fig. 6.2. Mises equivalent stresses comparison of Kirchhoff–Love theory and linear theory of elasticity on a circuit)

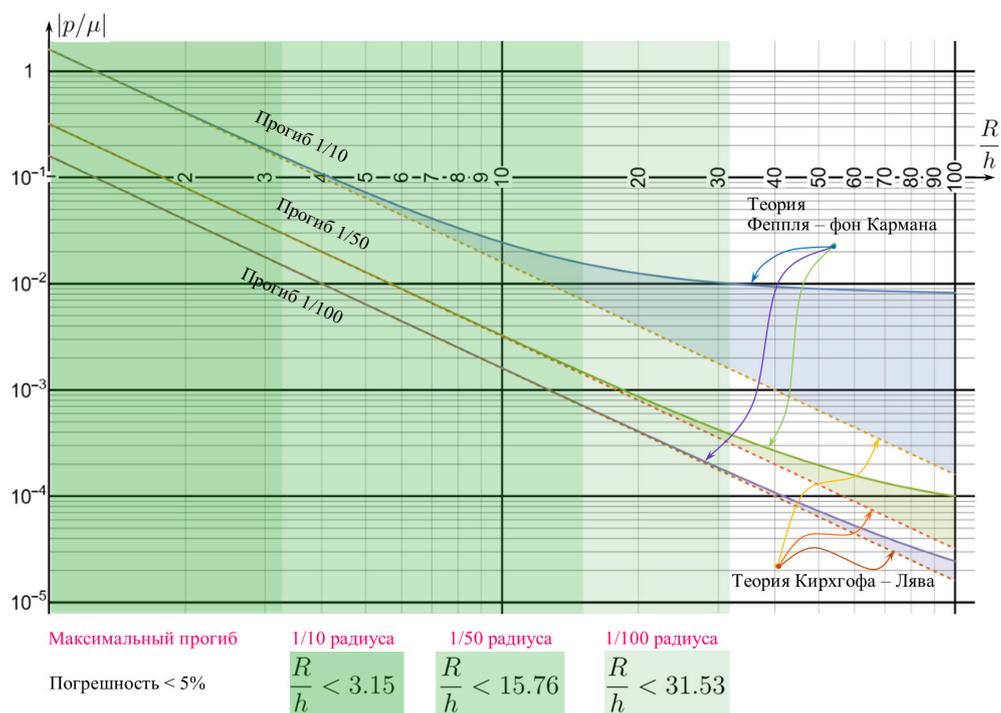


Рис. 6.3. Сравнение “жесткости” моделей Кирхгофа–Лява и Фешпля–фон Кармана  
 Fig. 6.3. “Stiffness” comparison of Kirchhoff–Love and Foppl–von Karman models

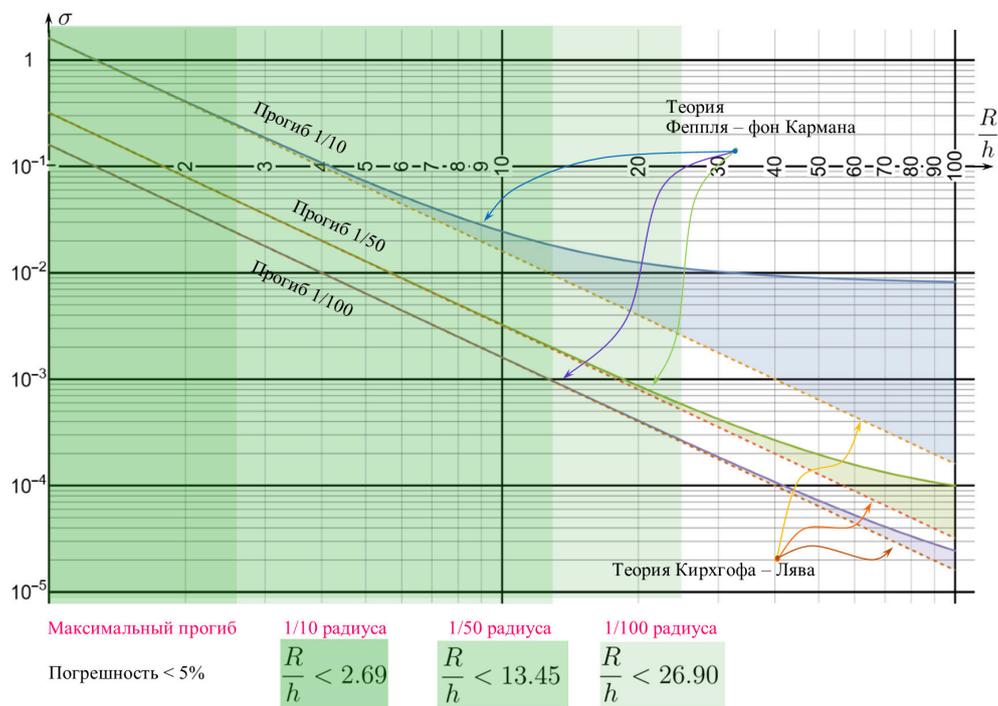


Рис. 6.4. Сравнение эквивалентных напряжений Мизеса по моделям Кирхгофа–Лява и Фешпля–фон Кармана (на контуре)

Fig. 6.4. Mises equivalent stresses comparison of Kirchhoff–Love and Foppl–von Karman models (on a circuit)

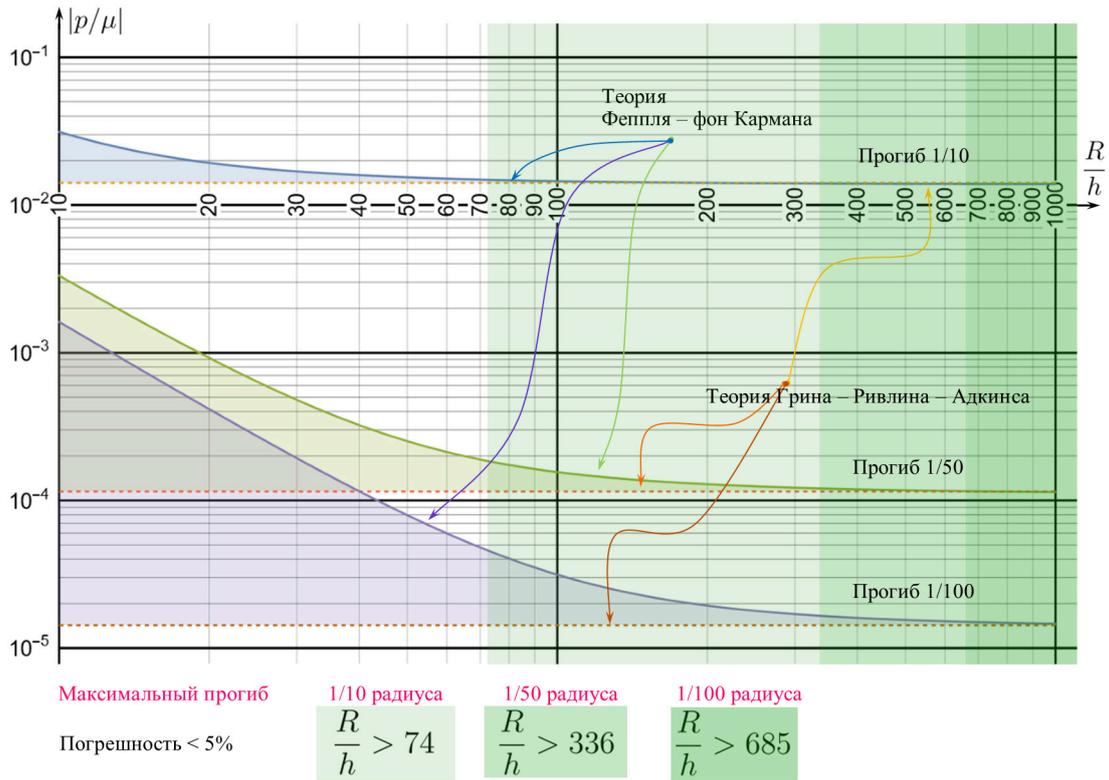


Рис. 6.5. Сравнение “жесткости” моделей Феппля–фон Кармана и нелинейной мембраны  
 Fig. 6.5. “Stiffness” comparison of Foppl–von Karman and nonlinear membrane models

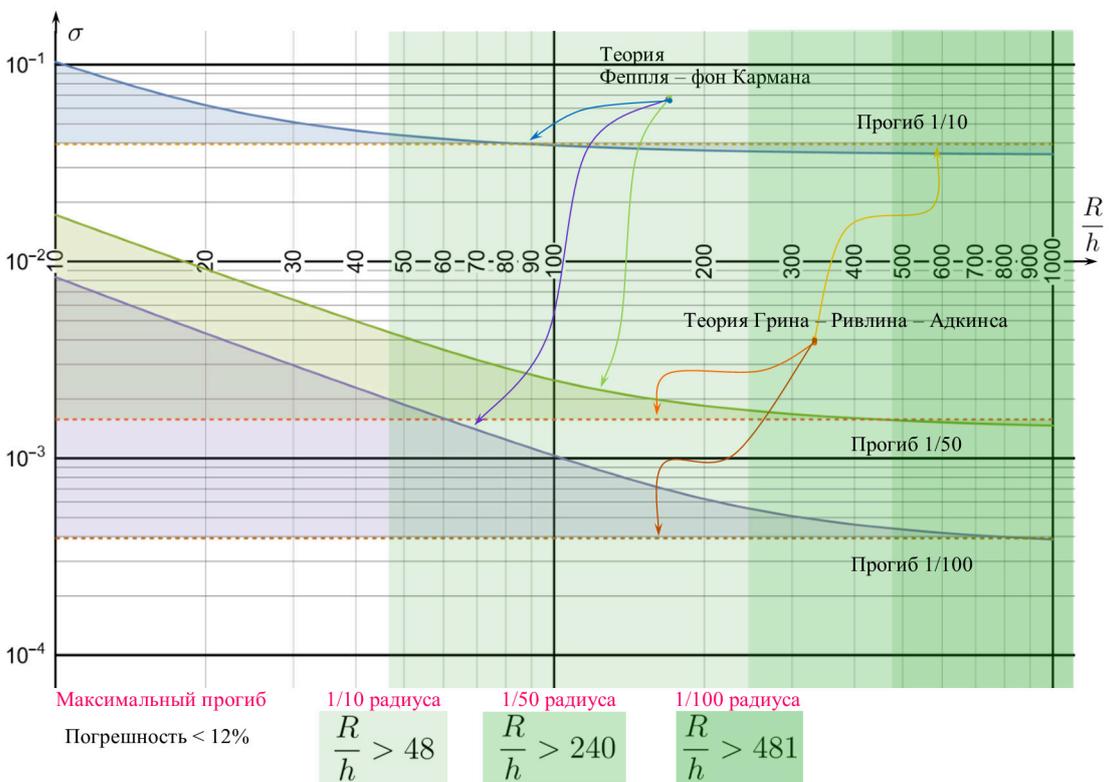


Рис. 6.6. Сравнение эквивалентных напряжений Мизеса по моделям Феппля–фон Кармана и нелинейной мембраны (в полюсе)

Fig. 6.6. Mises equivalent stresses comparison of Foppl–von Karman and nonlinear membrane models (at the pole)

## Литература

- [1] Zorman C.: Material Aspects of Micro- and Nanoelectromechanical Systems // In: Bhushan B. (eds) Springer Handbook of Nanotechnology. Springer Handbooks. Berlin: Springer-Verlag, 2010. Pp. pp 299–322. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-540-29857-1\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-540-29857-1_10).
- [2] Особенности деформирования круглых тонкопленочных мембран и экспериментальное определение их эффективных характеристик / А.А. Дедкова [и др.] // Журнал технической физики. 2021. Т. 91, № 10. С. 1454–1465. DOI: <http://dx.doi.org/10.21883/JTF.2021.10.51357.121-21>.
- [3] Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. Москва: Гостехиздат, 1956. 419 с. URL: <https://dwg.ru/dnl/6759?ysclid=lpkvdu6rgi257339739>.
- [4] Manzhairov A.V., Lychev S.A. On the equilibrium of accreted plates // Topical Problems in Solid and Fluid Mechanics / eds. A.V. Manzhairov, N.K. Gupta, D.A. Indeitsev. Delhi: Elite Pub. House, 2011. Pp. 294–300.
- [5] Лычев С.А., Лычева Т.Н., Манжиров А.В. Нестационарные колебания растущей круглой пластины // Известия Российской Академии наук. Сер.: Механика твердого тела. 2011. № 2. Р. 198–208. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=15785061>. EDN: <https://www.elibrary.ru/nhlavh>.
- [6] Lychev S. Equilibrium equations for transversely accreted shells // ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2014. Т. 94, № 1–2, P. 118–129. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.201200231>. EDN: <https://www.elibrary.ru/skkyph>.
- [7] Gurtin M.E. The Linear Theory of Elasticity // In: Truesdell C. (Ed.) Volume VIa/2. Mechanics of Solids II. Berlin, Heidelberg: Springer, 1984. 304 p. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-662-39776-3\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-662-39776-3_1).
- [8] Wang C.-C., Truesdell C. Introduction to rational elasticity. Springer Science & Business Media Elsevier, 1973. 556 p. URL: [https://books.google.ru/books?id=cGtGRkTB\\_MC&printsec=frontcover&hl=ru#v=onepage&q&f=false](https://books.google.ru/books?id=cGtGRkTB_MC&printsec=frontcover&hl=ru#v=onepage&q&f=false).
- [9] Truesdell C., Noll W. The Non-Linear Field Theories of Mechanics. Berlin, Heidelberg: Springer, 2004. 602 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-10388-3>.
- [10] Pochhammer L. Beitrag zur Theorie der Biegung des Kreiscylinders // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1876. Vol. 1876. Issue 81. Pp. 33–61. DOI: <https://doi.org/10.1515/crll.1876.81.33>.
- [11] Chree C. The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solutions and applications // Transactions of the Cambridge Philosophical Society. 1889. Vol. 14. Pp. 251–369.
- [12] Chau K.T., Wei X.X. Finite solid circular cylinders subjected to arbitrary surface load. Part I — Analytic solution // International Journal of Solids and Structures. 2000. Vol. 37, Issue 40. Pp. 5707–5732. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(99\)00289-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(99)00289-9).
- [13] Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. Москва: ГИТТЛ, 1955. URL: <https://lib-bkm.ru/load/86-1-0-2247?ysclid=lpkye1d5c5278329098>.
- [14] Лурье А.И. Теория упругости. Москва: Наука, 1970. 940 с. URL: <https://djvu.online/file/jVW1y2RAOcEY?ysclid=lpkyfikvtw867996432>.
- [15] Сеницкий Ю.Э. Динамическая задача электроупругости для неоднородного цилиндра // Прикладная математика и механика. 1993. Т. 57, № 1. С. 116–122.
- [16] Сеницкий Ю.Э., Шляхин Д.А. Нестационарная осесимметричная задача электроупругости для толстой круглой анизотропной пьезокерамической пластины // Известия Российской Академии наук. Сер.: Механика твердого тела. 1999. № 1. С. 78–87. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23543073>. EDN: <https://www.elibrary.ru/tvfaib>.
- [17] Filon L.N.G. On the elastic equilibrium of circular cylinders under certain practical systems of load // Proceedings of the Royal Society of London. 1901. Vol. 68, Issue 442–450. Pp. 353–358. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspl.1901.0056>.
- [18] Saito H. The Axially Symmetrical Deformation of a Short Circular Cylinder // Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers. 1952. Vol. 18, № 68. Pp. 21–28. DOI: [https://doi.org/10.1299/kikai1938.18.68\\_21](https://doi.org/10.1299/kikai1938.18.68_21).
- [19] Saito H. The Axially Symmetrical Deformation of a Short Circular Cylinder // Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers. 1954. Vol. 20, № 91.
- [20] Зиза О.А. Суммирование ортогональных рядов. Москва: УРСС, 1999. 281 с.
- [21] Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. Москва: Наука, 1966. 636 с. URL: <https://djvu.online/file/VtgNwUsEoWlyW?ysclid=lp3ujt2ay103010779>.
- [22] Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. Москва: Машиностроение, 1977. 488 с. URL: <https://dwg.ru/dnl/6392?ysclid=lp417f3jv135311463>.
- [23] Лычев С.А., Салеев С.В. Замкнутое решение задач об изгибе жестко закрепленной прямоугольной пластины // Вестник Самарского государственного университета. Естественная серия. 2006. № 2. С. 62–73. URL: <https://ipmnet.ru/lychev/papers/LychevSaleev200620101.pdf?ysclid=lp146zt2af827660061>.

- [24] Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Санкт-Петербург: Издательство СПбГУ, 2010. 378 с. URL: <https://dvizhenie24.ru/download/teoriya-tonkih-obolochek/?ysclid=lp14fjud3l941820153>.
- [25] Reddy J.N. Theory and analysis of elastic plates and shells. Boca Raton: CRC Press, 2006. 568 p. DOI: <https://doi.org/10.1201/9780849384165>.
- [26] Кильчевский Н.А. Основы аналитической механики оболочек. Киев: Изд-во Академии наук Украинской ССР, 1963. 354 с. URL: [https://books.totalarch.com/fundamentals\\_of\\_analytical\\_mechanics\\_of\\_shells\\_kilchevsky\\_1963?ysclid=lp14o1sxtl352609336](https://books.totalarch.com/fundamentals_of_analytical_mechanics_of_shells_kilchevsky_1963?ysclid=lp14o1sxtl352609336).
- [27] Podio-Guidugli P. An exact derivation of the thin plate equation // Journal of Elasticity. 1989. Vol. 22, № 2–3. Pp. 121–133. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/BF00041107>.
- [28] Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. Москва: Наука, 1977. 417 с. URL: <https://djvu.online/file/nRZ45BINutAhh?ysclid=lp1512usuk734973961>.
- [29] Föppl A. Vorlesungen über technische Mechanik. Vol. 5. Leipzig: B.G. Teubner Verlag, 1907. URL: <https://archive.org/details/vorlesungenuber00foppgoog/mode/2up>.
- [30] Kármán T. Festigkeitsprobleme im Maschinenbau // Encyclopaedie Der Mathematischen Wissenschaften. Vol. 4. Leipzig: B.G. Teubner Verlag, 1910. Pp. 311–385. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-663-16028-1\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-663-16028-1_5).
- [31] Ciarlet P.G. A justification of the von Karman equations. // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1980. Vol. 73, № 4. Pp. 349–389. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00247674>.
- [32] Ciarlet P.G. Mathematical elasticity. Vol. 1: Three-dimensional elasticity. Amsterdam: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2021. 451 p. DOI: <https://doi.org/10.1137/1.9781611976786>.
- [33] Сьярле Ф., Рабье П. Уравнения Кармана. Сер.: Новое в зарубежной науке. Механика. Вып. 31. Москва: Мир, 2006. 172 с.
- [34] Ciarlet P.G. Mathematical Elasticity. Vol III: Theory of Shells. Amsterdam: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2022. 599 p. Available at: <https://www.sciencedirect.com/bookseries/studies-in-mathematics-and-its-applications/vol/29>.
- [35] Reissner E. On finite deflections of circular plates // Proceedings of Symposia in Applied Mathematics. 1949. Vol. 1. Pp. 213–219. URL: <https://zbmath.org/0036.39701>.
- [36] Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. Москва: Наука. 1969. 529 с. URL: <https://reallib.org/reader?file=467347&ysclid=lp16u4x3b551294565>.
- [37] Zhang Y. Large deflection of clamped circular plate and accuracy of its approximate analytical solutions // Science China Physics, Mechanics & Astronomy. 2016. Vol. 59, № 2, Article number: 624602. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11433-015-5751-y>.
- [38] Van Gorder R.A. Analytical method for the construction of solutions to the Foppl–von Karman equations governing deflections of a thin flat plate // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2012. Vol. 47, Issue 3. Pp. 1–6. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2012.01.004>.
- [39] Van Gorder R.A. Asymptotic solutions for the Foppl–von Karman equations governing deflections of thin axisymmetric annular plates // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2017. Vol. 91. P. 8–21. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2017.02.004>.
- [40] Yu Q., Xu H., Liao S. Coiflets solutions for Foppl–von Karman equations governing large deflection of a thin flat plate by a novel wavelet-homotopy approach // Numerical Algorithms. 2018. Vol. 79. P. 993–1020. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11075-018-0470-x>.
- [41] Бычков П.С., Лычев С.А., Бут Д.К. Экспериментальная методика определения эволюции формы изгиба тонкой подложки при электрокристаллизации меди в областях сложной формы // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2019. Т. 25, № 4. С. 48–73. URL: <http://dx.doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-4-48-73>.
- [42] Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Москва: Изд-во иностр. лит., 1949. 784 с. URL: <https://ega-math.narod.ru/Books/Watson.htm?ysclid=lpma5mavxy139390417>.
- [43] Феодосьев В.И. Осесимметричные гибкие оболочки // Пономарев С.Д. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 2. Москва: МАШГИЗ, 1958. 974 с. URL: <https://lib-bkm.ru/12048?ysclid=lpmapv9rzb296687414>.
- [44] Андреева Л.Е. Упругие элементы приборов. Москва: МАШГИЗ, 1962. 462 с. URL: <https://lib-bkm.ru/10326?ysclid=lpmb0864re299303131>.
- [45] Freund L.B., Suresh S. Thin Film Materials. Stress, Defect Formation and Surface Evolution. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. Available at: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511754715>.
- [46] Adkins J.E., Rivlin R.S. Large elastic deformations of isotropic materials IX. The deformation of thin shells // Philosophical Transactions of the Royal Society A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1952. Vol. 244, Issue 888. Pp. 505–531. DOI: <https://doi.org/10.1098/rsta.1952.0013>.

- [47] Yang W.H., Feng W.W. On Axisymmetrical Deformations of Nonlinear Membranes // Journal of Applied Mechanics. 1970. Vol. 37. Issue 4. Pp. 1002–1011. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3408651>.



Scientific article

DOI: [10.18287/2541-7525-2023-29-4-77-105](https://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-4-77-105)

Submitted: 12.09.2023

Revised: 17.11.2023

Accepted: 05.12.2023

**S.A. Lychev**

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russian Federation

E-mail: [lychevsa@mail.ru](mailto:lychevsa@mail.ru). ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7590-1389>

**A.V. Digilov**

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russian Federation

E-mail: [avdigilov@gmail.com](mailto:avdigilov@gmail.com). ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6892-7740>

**N.A. Pivovarovff**

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russian Federation

E-mail: [pivovarovff.bmstu@ya.ru](mailto:pivovarovff.bmstu@ya.ru). ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-7149-4102>

## BENDING OF A CIRCULAR DISK: FROM CYLINDER TO ULTRATHIN MEMBRANE<sup>12</sup>

### ABSTRACT

The article discusses methods of mathematical modeling of the stress-strain state of a circular disc at various ratios of its thickness to radius, ranging from 1 to  $10^{-3}$ . For sufficiently thick plates, the solution of three-dimensional linear elasticity theory is used, for plates of medium thickness — the solution of linear bending equations within the Kirchhoff–Love hypotheses and nonlinear equations of Foppl–von Karman, and for ultrathin plates — the nonlinear equations of Adkins–Rivlin–Green. A comparative analysis of the solutions has been conducted, and ranges of relative thickness have been identified in which the considered solutions adequately describe the deformation process. This result enables the selection of a method for mathematical modeling of the stress-strain state of circular plates used in microelectromechanical systems that is most suitable for their relative size.

**Key words:** circular disc; short cylinder; thick plate; thin plate; ultrathin membrane; closed-form solution; Foppl–von Karman equations; nonlinear membrane model.

**Citation.** Lychev S.A., Digilov A.V., Pivovarovff N.A. Bending of a circular disk: from cylinder to ultrathin membrane. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya Seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 77–105. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-4-77-105>. (In Russ.)

**Information about the conflict of interests:** authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Lychev S.A., Digilov A.V., Pivovarovff N.A., 2023

*Sergey A. Lychev* — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, leading researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, 101, bldg. 1, Vernadsky Avenue, Moscow, 119526, Russian Federation.

*Alexander V. Digilov* — postgraduate student, junior researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, 101, bldg. 1, Vernadsky Avenue, Moscow, 119526, Russian Federation.

*Nikita A. Pivovarovff* — postgraduate student, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, 101, bldg. 1, Vernadsky Avenue, Moscow, 119526, Russian Federation.

## References

- [1] Zorman C. Material Aspects of Micro- and Nanoelectromechanical Systems. In: Bhushan B. (eds) Springer Handbook of Nanotechnology. Springer Handbooks. Berlin: Springer-Verlag, 2010, pp. 299–322. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-540-29857-1\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-540-29857-1_10).

<sup>12</sup>The work is carried out with the financial support of the Russian Science Foundation (grant № 23-19-00866).

- [2] Dedkova A.A. et al. Peculiarities of deformation of round thin-film membranes and experimental determination of their effective characteristics. *Technical Physics*, 2021, vol. 91, no. 10, pp. 1454–1465. DOI: <http://dx.doi.org/10.21883/JTF.2021.10.51357.121-21>.
- [3] Volmir A.S. Flexible plates and shells. Moscow: Gostekhizdat, 1956, 419 p. Available at: <https://dwg.ru/dnl/6759?ysclid=lpkvdu6rgi257339739>. (In Russ.)
- [4] Manzhirrov A.V., Lychev S.A. On the equilibrium of accreted plates. In: Manzhirrov A.V., Gupta N.K., Indeitsev D.A. (Eds.) *Topical Problems in Solid and Fluid*. Delhi: Elite Pub. House, 2011, pp. 294–300.
- [5] Lychev S.A., Manzhirrov A.V., Lycheva T.N. Unsteady vibration of a growing circular plate. *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 46, no. 2, pp. 325–333. DOI: <https://doi.org/10.3103/S002565441102021X>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ohrjnj>. (In English; original in Russian).
- [6] Lychev S. Equilibrium equations for transversely accreted shells. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2014, vol. 94, no. 1-2, pp. 118–129. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.201200231>. EDN: <https://www.elibrary.ru/skkyph>.
- [7] Gurtin M.E. The Linear Theory of Elasticity. In: Truesdell C. (Ed.) *Volume VIa/2. Mechanics of Solids II*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1984, 304 p. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-662-39776-3\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-662-39776-3_1).
- [8] Wang C.-C., Truesdell C. Introduction to rational elasticity. Springer Science & Business Media Elsevier, 1973, 556 p. Available at: [https://books.google.ru/books?id=cGtGRkTB\\_MC&printsec=frontcover&hl=ru#v=onepage&q&f=false](https://books.google.ru/books?id=cGtGRkTB_MC&printsec=frontcover&hl=ru#v=onepage&q&f=false).
- [9] Truesdell C., Noll W. The Non-Linear Field Theories of Mechanics. Berlin, Heidelberg: Springer, 2004, 602 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-10388-3>.
- [10] Pochhammer L. Beitrag zur Theorie der Biegung des Kreiscylinders. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1876, vol. 1876, issue 81, pp. 33–61. DOI: <https://doi.org/10.1515/crll.1876.81.33>.
- [11] Chree C. The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates, their solutions and applications. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 1889, vol. 14, pp. 251–369.
- [12] Chau K.T., Wei X.X. Finite solid circular cylinders subjected to arbitrary surface load. Part I – Analytic solution. *International Journal of Solids and Structures*, 2000, vol. 37, issue 40, pp. 5707–5732. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(99\)00289-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(99)00289-9).
- [13] Lurie A.I. Spatial problems of elasticity theory. Moscow: GITTL, 1955. Available at: <https://lib-bkm.ru/load/86-1-0-2247?ysclid=lpkye1d5c5278329098>. (In Russ.)
- [14] Lurie A.I. Theory of elasticity. Moscow: Nauka, 1970, 940 p. Available at: <https://djvu.online/file/jVW1yj2RAOcEY?ysclid=lpkyfikvtw867996432>. (In Russ.)
- [15] Senitskii Yu.E. Dynamic problem of electroelasticity for a nonhomogeneous cylinder. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1993, vol. 57, no. 1, pp. 116–122. (In Russ.)
- [16] Senitskii Yu.E., Shlyakhin D.A. Nonstationary axisymmetric problem of electroelasticity for a thick circular anisotropic piezoceramic plate. *Mechanics of Solids*, 1999, no. 1, pp. 78–87. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23543073>. EDN: <https://www.elibrary.ru/tvfaib>. (In Russ.)
- [17] Filon L.N.G. On the elastic equilibrium of circular cylinders under certain practical systems of load. *Proceedings of the Royal Society of London*, 1901, vol. 68, issues 442–450, pp. 353–358. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspl.1901.0056>.
- [18] Saito H. The Axially Symmetrical Deformation of a Short Circular Cylinder. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, 1952, vol. 18, no. 68, pp. 21–28. DOI: [https://doi.org/10.1299/kikai1938.18.68\\_21](https://doi.org/10.1299/kikai1938.18.68_21). (In Japanese).
- [19] Saito H. The Axially Symmetrical Deformation of a Short Circular Cylinder. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, 1954, vol. 20, no. 91. (In Japanese).
- [20] Ziza O.A. Summability of Orthogonal Series. Moscow: URSS, 1999, 281 p. (In Russ.)
- [21] Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. Theory of plates and shells. New York, Toronto, London: McGraw-hill, 1959, 636 p. Available at: <https://djvu.online/file/VtgNwUsEoWlyW?ysclid=lp3ujt2ay103010779>. (In Russ.)
- [22] Biderman V.L. Mechanics of thin-walled structures. Statics. Moscow: Mashinostroenie, 1977, 488 p. Available at: <https://dwg.ru/dnl/6392?ysclid=lp1417f3jv135311463>. (In Russ.)
- [23] Lychev S.A., Saleev S.V. Closed solution of boundary value problem for rectangular plate fixed on boundary. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2006, no. 2, pp. 62–73. Available at: <https://ipmnet.ru/lychev/papers/LychevSaleev200620101.pdf?ysclid=lp146zt2af827660061>. (In Russ.)
- [24] Novozhilov V.V. Theory of thin shells. Saint Petersburg: Izdatel'stvo SPbGU, 2010, 378 p. Available at: <https://dvizhenie24.ru/download/teoriya-tonkih-obolochek/?ysclid=lp14fjud3l941820153>. (In Russ.)
- [25] Reddy J.N. Theory and analysis of elastic plates and shells. Boca Raton: CRC Press, 2006. 568 p. DOI: <https://doi.org/10.1201/9780849384165>.

- [26] Kil'chevskii N.A. Fundamentals of analytical mechanics of shells. Kyiv: Izdatel'stvo Akademii nauk Ukrainy SSR, 1963, 354 p. Available at: [https://books.totalarch.com/fundamentals\\_of\\_analytical\\_mechanics\\_of\\_shells\\_kilchevsky\\_1963?ysclid=lp14o1sxtl352609336](https://books.totalarch.com/fundamentals_of_analytical_mechanics_of_shells_kilchevsky_1963?ysclid=lp14o1sxtl352609336). (In Russ.)
- [27] Podio-Guidugli P. An exact derivation of the thin plate equation. *Journal of Elasticity*, 1989, vol. 22, no. 2-3, pp. 121–133. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/BF00041107>.
- [28] Lekhnitsky S.G. Theory of anisotropic body elasticity. Moscow: Nauka, 1977. 417 p. Available at: <https://djvu.online/file/nRZ45BlNutAhh?ysclid=lp1512usuk734973961>. (In Russ.)
- [29] Föppl A. Vorlesungen über technische Mechanik. Volume 5. Leipzig: B.G. Teubner Verlag, 1907. Available at: <https://archive.org/details/vorlesungenuber00fopppgoog/mode/2up>.
- [30] Kármán T. Festigkeitsprobleme im Maschinenbau. In: *Encyclopadie Der Mathematischen Wissenschaften. Vol. 4*. Leipzig: B.G. Teubner Verlag, 1910. Pp. 311–385. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-663-16028-1\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-663-16028-1_5).
- [31] Ciarlet P.G. A justification of the von Karman equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1980, vol. 73, no. 4, pp. 349–389. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00247674>.
- [32] Ciarlet P. G.: Mathematical elasticity: Three-dimensional elasticity. Amsterdam: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2021, 451 p. DOI: <https://doi.org/10.1137/1.9781611976786>.
- [33] Ciarlet P.G., Rabie P. Karman equations. Series: "New in foreign science. Mechanics". Issue 31. Moscow: Mir, 2006, 172 p. (In Russ.)
- [34] Ciarlet P.G. Mathematical Elasticity. Vol III: Theory of Shells. Amsterdam: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2022. 599 p. Available at: <https://www.sciencedirect.com/bookseries/studies-in-mathematics-and-its-applications/vol/29>.
- [35] Reissner E. On finite deflections of circular plates. *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, 1949, vol. 1, pp. 213–219. Available at: <https://zbmath.org/0036.39701>.
- [36] Vainberg M.M., Trenogin V.A. Theory of branching of solutions of nonlinear equations. Moscow: Nauka, 1969, 529 p. Available at: <https://reallib.org/reader?file=467347&ysclid=lp16u4x3b551294565>. (In Russ.)
- [37] Zhang Y. Large deflection of clamped circular plate and accuracy of its approximate analytical solutions. *Science China Physics, Mechanics & Astronomy*, 2016, vol. 59, no. 2, Article number: 624602. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11433-015-5751-y>.
- [38] Van Gorder R.A. Analytical method for the construction of solutions to the Foppl–von Karman equations governing deflections of a thin flat plate. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2012, vol. 47, issue 3, pp. 1–6. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2012.01.004>.
- [39] Van Gorder R.A. Asymptotic solutions for the Foppl–von Karman equations governing deflections of thin axisymmetric annular plates. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2017, vol. 91, pp. 8–21. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2017.02.004>.
- [40] Yu Q., Xu H., Liao S. Coiflets solutions for Foppl–von Karman equations governing large deflection of a thin flat plate by a novel wavelet-homotopy approach. *Numerical Algorithms*, 2018, vol. 79, pp. 993–1020. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11075-018-0470-x>.
- [41] Bychkov P.S., Lychev S.A., Bout D.K. Experimental technique for determining the evolution of the bending shape of thin substrate by the copper electrocrystallization in areas of complex shapes. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 48–73. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-4-48-73>. (In Russ.)
- [42] Watson G.N. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Moscow: Izdatel'stvo inostrannoy literatury, 1949, 784 p. Available at: <https://ega-math.narod.ru/Books/Watson.htm?ysclid=lpma5mavxy139390417>. (In Russ.)
- [43] Feodosiev V.I. Axisymmetric flexible shells. In: Ponomarev S.D. Strength calculations in mechanical engineering. Volume 2. Moscow: MASHGIZ, 1958, 974 p. Available at: <https://lib-bkm.ru/12048?ysclid=lpmapv9rzb296687414>. (In Russ.)
- [44] Andreeva L.E. Elastic elements of instruments. Moscow: MASHGIZ, 1962, 462 p. Available at: <https://lib-bkm.ru/10326?ysclid=lpmb0864re299303131>. (In Russ.)
- [45] Freund L.B., Suresh S. Thin Film Materials. Stress, Defect Formation and Surface Evolution. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511754715>.
- [46] Adkins J. E., Rivlin R. S.: Large elastic deformations of isotropic materials IX. The deformation of thin shells. *Philosophical Transactions of the Royal Society A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1952, vol. 244, issue 888, pp. 505–531. DOI: <https://doi.org/10.1098/rsta.1952.0013>.
- [47] Yang W.H., Feng W.W. On Axisymmetrical Deformations of Nonlinear Membranes. *Journal of Applied Mechanics*, 1970, vol. 37, pp. 1002–1011. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3408651>.