



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-4-26-53

УДК 539.3

Дата: поступления статьи: 15.08.2023
после рецензирования: 20.09.2023
принятия статьи: 05.12.2023

К.Г. Койфман

Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана, г. Москва, Российская Федерация
E-mail: koifman.konstantin@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7891-9995>

ОТСЧЕТНАЯ ФОРМА ТЕЛ С РАСШИРЕННОЙ КИНЕМАТИКОЙ. ЧАСТЬ I. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ¹

АННОТАЦИЯ

В статье представлены дифференциально-геометрические методы моделирования конечных несовместных деформаций гиперупругих твердых тел. Они основаны на представлении тела в виде гладкого многообразия, на котором синтезируются метрика и неевклидова связность. Полученное геометрическое пространство интерпретируется как глобальная, свободная от напряжений, форма, и относительно него формулируются физический отклик и материальные уравнения баланса. В рамках геометрического подхода деформации моделируются в виде вложений неевклидовой формы в физическое пространство. Меры несовместности представлены инвариантами аффинной связности — кривизной, кручением и неметричностью, а сама связность определяется типом физического процесса.

Настоящая статья является первой частью исследования. Предлагаемый геометрический подход применяется для тел, отклик которых зависит от первого градиента деформации. Получены условия совместности и предложена их геометрическая интерпретация.

Ключевые слова: гиперупругость; тело с расширенной кинематикой; второй градиент; микроструктура; несовместные деформации; остаточные напряжения; неевклидова геометрия; материальная метрика; материальная связность; кривизна; кручение; неметричность.

Цитирование. Койфман К.Г. Отсчетная форма тел с расширенной кинематикой. Часть I. Геометрические методы // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2023. Т. 29, № 4. С. 26–53. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-4-26-53>.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Койфман К.Г., 2023

Константин Георгиевич Койфман — тьютор по математике, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, 105005, Российская Федерация, г. Москва, 2-я Бауманская улица, 5.

1. Предварительные сведения

1°. В рамках классической теории гиперупругости (далее — теории простого материала) предполагается, что механический отклик тела определяется упругим потенциалом \widehat{W}_1 , который является действительной функцией двух аргументов [1]:

$$W = \widehat{W}_1(X, \mathbf{F}(X)). \quad (1.1)$$

¹Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00457).

Здесь $X \in \mathcal{B}$ — точка отсчетной формы $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}$, т. е. области, представляющей отсчетное положение тела в физическом пространстве \mathcal{E} , а \mathbf{F} — градиент деформации, т. е. главная линейная часть отображения $\gamma : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$, характеризующего изменение отсчетной формы. В настоящей статье, наряду с зависимостью (1.1), используется ее расширенный вариант [2; 3]:

$$W = \widehat{W}_2(X, \mathbf{F}(X), D_X \mathbf{F}), \quad \text{или} \quad W = \widehat{W}_3(X, \mathbf{F}(X), \mathbf{M}, D_X \mathbf{M}), \quad (1.2)$$

где $D\mathbf{F}$ есть второй градиент отображения γ , а \mathbf{M} — некоторый тензор второго ранга, независимый от γ . Последние два случая объединены под общим названием: гиперупругие тела с расширенной кинематикой.

Рассуждения, предполагающие расширенную кинематику, можно встретить в работах Пиола [4; 5], а также в более поздних работах Фойгта [6], Дюгема [7] и братьев Коссера [8]. Вместе с тем основной интерес к средам с расширенной кинематикой возник в начале второй половины XX века, когда Эриксоном было показано, что напряженное состояние в жидких кристаллах определяется несимметричным тензором [9]. Значительный прогресс был достигнут в серии работ Труделла и Эриксона [10], Тупина [2; 11], а также Миндлина [12; 13]. В частности, авторами этих работ была установлена взаимосвязь между различными подходами к описанию расширенной кинематики и сформулирован общий вид определяющих соотношений.

Развитие теории определяющих соотношений и уточнение понятий жидкости и изотропного твердого тела для сред второго градиента было предложено Кроссом в работе [14]. В частности, Кросс продемонстрировал удобство и элегантность формализма теории 2-струй на многообразиях, позволившего ему получить инвариантные соотношения для групп изотропии, обобщающие соотношения теории Нолла для сред первого градиента [15; 16].

В начале 80-х годов XX века Айфантис предложил альтернативный подход к описанию расширенной кинематики, когда определяющее соотношение для теории первого градиента дополнялось слагаемым, содержащим второй градиент и характеристическую константу [17; 18]. Так, в рамках линейного приближения закон Гука модифицировался посредством добавления слагаемого, содержащего лапласиан по пространственным переменным [19]. Благодаря этому удалось осуществить сглаживание решений классических задач теории упругости в точках разрыва. Например, в работе [20] построено решение задачи Фламана — Буссинеска на основе предложенного Айфантисом подхода и показано, что это решение непрерывно и ограничено в точках приложения нагрузок. В работах [19; 20] установлено, что предложенным методом можно устранить сингулярность тензора деформаций в вершине трещины.

Гуткин и Айфантис на основе градиентной модели Айфантиса [20] построили решение задачи о напряженно-деформированном состоянии среды с краевой дислокацией [21], винтовой дислокацией [22] и показали, что в рамках используемых моделей удается добиться непрерывности тензора деформаций в ядре дислокации. Добавив в модель Айфантиса слагаемое, содержащее лапласиан напряжений, авторы работы [23] построили решения задач для сред с дислокациями и дисклинациями и показали, что не только тензор деформаций непрерывен в ядре дислокации, но и то же самое справедливо и для тензора напряжений.

В настоящее время теория тел с расширенной кинематикой продолжает развиваться. Рассматриваются связанные модели термоупругости [3] и электроупругости [24; 25], изучается напряженно-деформированное состояние тел с включениями [26–28], развивается теория определяющих соотношений [29] и исследуются уравнения равновесия [30]. Представленная статья также рассчитывает внести свой вклад в это направление. Ее цель — геометрическое моделирование несовместных деформаций в средах с расширенной кинематикой.

2°. Несовместные деформации. Теория несовместных деформаций для случая простого материала достаточно развита и представлена в многочисленных статьях [16; 31–34] и монографиях² [35–37]. Основной особенностью тела с несовместными деформациями является невозможность целиком достичь состояния, совпадающего с тем, которое было достигнуто малым тестовым образцом из того же материала (такое состояние далее называется натуральным). Геометрическая идея, лежащая в основе моделирования несовместных деформаций, заключается в отказе от требования, согласно которому все формы тела должны быть областями евклидова физического пространства: форму, в которой все тело находится в натуральном состоянии, предлагается искать в пространстве общей аффинной связности.

Для реализации этой идеи условия совместности локальных деформаций интерпретируются в терминах инвариантов подходящей аффинной связности [38]. Если через \mathbf{H} обозначить тензорное поле второго ранга, представляющее локальные разгрузочные деформации из некоторой промежуточной формы \mathcal{S}_R в натуральное состояние, то условие, согласно которому оно будет градиентом некоторого отображения

²Детальное изложение аспектов геометрической теории приведено в разд 3.

ражения $\gamma : S_R \rightarrow \mathcal{E}$, — условие совместности, — имеет вид: $\text{curl } \mathbf{H} = \mathbf{0}$. Геометрически последнее равенство может быть записано в терминах кручения связности Вайценбока [34] как $\mathfrak{T} = 0$. Альтернативно определяя специальным способом метрический тензор \mathbf{G} по полю \mathbf{H} [34], условие совместности, выражающее евклидовость геометрии, порождаемой этим тензором, можно выразить в терминах равенства нулю кривизны связности Леви-Чивита: $\mathfrak{R} = 0$. Таким образом, поля кручения и кривизны являются мерами несовместности локальных деформаций. Отличие их от нуля означает несовместность деформаций, а соответствующие пространства аффинной связности вмещают натуральную форму.

Применение геометрических моделей несовместных деформаций весьма разнообразно. Впервые они были использованы в континуальной теории дефектов [32; 33; 38–41]. В последующем геометрическое моделирование было применено в рамках теории объемного роста [42], теории поверхностного роста [43–49], а также при математическом моделировании аддитивных процессов [50–54]. Соединение положений теории относительности и теории роста привело к исследованиям по аккреции массивных тел [55–57]. Отметим, что, несмотря на единство подходов к описанию непрерывно распределенных дефектов и поверхностного роста, где последний можно интерпретировать как непрерывный процесс записи дефектов [58], имеются и отличия между ними. В рамках континуальной теории дефектов локальные деформации предполагаются известными из эксперимента. Все, что нужно сделать, — определить меры несовместности. Однако в рамках процесса роста локальные деформации являются неизвестными полями, требующими решения дополнительной эволюционной задачи для их определения. Примеры таких задач рассмотрены в [46; 47; 59–61].

Вместе с тем существует сравнительно мало работ, посвященных проблематике моделирования несовместных деформаций для сред с расширенной кинематикой. Можно объяснить это необходимостью использовать более сложный математический формализм 2-струй и главных расслоений, нежели тот, что используется в рамках сред первого градиента. По-видимому, первым систематическим изложением теории структурно неоднородных тел с расширенной кинематикой можно считать работу Моргана [62], являющуюся непосредственным обобщением работы Вана [16] для сред первого градиента. Последующие работы написаны в основном Эпштейном, Эльжановски, де Леоном и их соавторами. В частности, работы [63–65] посвящены моделированию несовместных деформаций в телах второго градиента (первый потенциал в (1.2)), а работы [66; 67] — моделированию несовместных деформаций в телах с микроструктурой (второй потенциал в (1.2)). Настоящая работа использует иной подход, позволяющий получить уравнения совместности и неевклидову отсчетную форму. Однако для дальнейшего описания расширенной кинематики все равно нужно привлекать более тонкие рассуждения, основанные на формализме 2-струй (случай второго градиента) либо на формализме главных расслоений (случай микроструктуры).

3°. Структуры и их синтезирование. Работа использует формализм структур и отображений между ними. Каждая структура характеризуется упорядоченным набором

$$\mathcal{X} = (X, S_1, S_2, \dots, S_k), \quad (1.3)$$

состоящим из множества X — носителя структуры, а также классов и полей S_1, \dots, S_k , определяющих конкретный вид структуры над X . Как правило, объекту S_1 соответствует топология над X , а объекту S_2 — гладкая структура над X . Остальные элементы структуры являются геометрическими полями, как-то: метрикой, связностью и формой объема.

Исходная структура (1.3) определяет последовательность вложенных структур

$$X = \mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}_1 \subset \dots \subset \mathcal{X}_k = \mathcal{X},$$

где $\mathcal{X}_i = (X, S_1, S_2, \dots, S_i)$. Будем говорить, что структура \mathcal{X}_i получена из \mathcal{X} стиранием элементов S_{i+1}, \dots, S_k , а \mathcal{X} , в свою очередь, синтезированием по \mathcal{X}_i и S_{i+1}, \dots, S_k . В работе в основном используется стирание до структуры \mathcal{X}_2 , которая при соответствующей интерпретации S_1 и S_2 является гладким многообразием. Операции стирания и синтезирования структур комбинируются, что приводит к различным структурам, определенным над одним и тем же многообразием.

Если \mathcal{X} и \mathcal{Y} — различные структуры одного типа, то можно рассматривать отображения между ними: $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, которые в рамках теории категорий принято называть морфизмами [68]. Если через \mathcal{F}_i обозначить процедуру стирания структур до i -й подструктуры («стирающий функтор»), то отображение f индуцирует отображение $\mathcal{F}_i f : \mathcal{X}_i \rightarrow \mathcal{Y}_i$. В рамках работы оно полагается отличным от f .

Используются стандартные соглашения и обозначения для структур, принятые в линейной алгебре и теории гладких многообразий. Их определение и связанная с ними техника представлены в монографиях [69–71]. В частности, символ $\text{Hom}(\mathcal{U}; \mathcal{V})$ обозначает векторное пространство линейных отображений $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$. В свою очередь, символы $\text{End}(\mathcal{V}) = \text{Hom}(\mathcal{V}; \mathcal{V})$ и $\text{Aut}(\mathcal{V})$ отвечают, соответственно, векторному пространству линейных операторов на \mathcal{V} и группе автоморфизмов.

Символ D обозначает оператор полной производной, а символ ∂_i — оператор частной производной по i -й переменной.

Настоящая статья является первой частью исследовательской работы. В ней определяются исходные структуры, излагаются основные геометрические идеи и демонстрируется их реализация на примере простого материала. Вторая часть представлена в [72]. В ней излагается методика синтезирования неевклидовой отсчетной формы для тел второго градиента и тел с микроструктурой.

2. Материальное многообразие и его формы

2.1. Формы и деформации

Геометрическая механика континуума рассматривает тело и физическое пространство как два отдельных гладких многообразия, наделенные специфическими геометриями и связанные между собой гладкими вложениями. Композиция этих вложений определяет диффеоморфизм — деформацию тела. Настоящая работа следует этой методологии с одним лишь отличием: геометрические структуры, характеризующие тело, его формы и физическое пространство, определены над одним и тем же множеством. По этой причине для структур, встречающихся в работе, используются детальные обозначения.

4°. Физическое пространство. Исходная структура представлена трехмерным евклидовым точечным пространством [69]

$$\mathcal{E} = (E, \mathcal{V}, \text{vec}, \cdot), \quad (2.1)$$

моделирующим физическое пространство, в котором наблюдается деформирование тела. Первый элемент структуры E является континуальным множеством мест, а второй элемент $\mathcal{V} = (V, \mathbb{R}, +_V, \cdot_V)$ — трансляционным векторным пространством над³ \mathbb{R} , размерности 3. Третий элемент структуры (2.1) является отображением $\text{vec} : E \times E \rightarrow V$, удовлетворяющим аксиомам Вейля:

а) для любых точек $x, y, z \in E$ выполняется соотношение Шаля

$$\text{vec}(x, y) + \text{vec}(y, z) = \text{vec}(x, z),$$

б) для любой точки $x \in E$ и любого вектора $v \in \mathcal{V}$ существует единственная точка $y \in E$ такая, что $\text{vec}(x, y) = v$.

Значение $v = \text{vec}(x, y)$ интерпретируется как вектор с началом в точке x и концом в точке⁴ y . Наконец, последний элемент структуры (\cdot) определяет скалярное произведение на \mathcal{V} .

Задание скалярного произведения тесно связано с выбором некоторого прямоугольного репера $(o, (c_i)_{i=1}^3)$, в котором $o \in E$ — начало отсчета, а $(c_i)_{i=1}^3$ — ортонормированный базис пространства \mathcal{V} . При таком выборе точке o соответствует поле радиус-векторов $p : x \mapsto \text{vec}(o, x)$, а базис $(c_i)_{i=1}^3$ позволяет определить координаты произвольной точки из E , которые полагаются равными координатам радиус-вектора этой точки:

$$\text{если } p(x) = x^i c_i, \text{ то } \text{Coor}(x) := (x^i)_{i=1}^3.$$

Приходим к отображению $\text{Coor} : E \rightarrow \mathbb{R}^3$ — декартовой арифметизации, которое каждой точке пространства сопоставляет ее прямоугольные координаты.

Замечание 1. Несмотря на то что в рамках настоящей работы структура (2.1) полагается первичной, в действительности можно встать на более общую точку зрения, согласно которой исходными являются трехмерное векторное пространство

$$\mathcal{V} = (V, \mathbb{R}, +_V, \cdot_V),$$

некоторый объект o (образно говоря, «божественное присутствие»), и базис $(c_i)_{i=1}^3$ пространства \mathcal{V} . В таком случае первый элемент структуры (2.1) можно определить как образ действия элементов группы трансляции $\text{Trans}(3)$ на объект o , т. е. $E = o \triangleleft \text{Trans}(3)$, а скалярное произведение (\cdot) — из требования ортонормированности базиса $(c_i)_{i=1}^3$.

5°. Сопряженное пространство. Для работы с координатами точек и векторов целесообразно использовать дополнительную структуру, представленную сопряженным векторным пространством \mathcal{V}^* , элементы которого — линейные функционалы $\xi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ (ковекторы). Свойство рефлексивности сопряженного пространства исходному [70] позволяет определить операцию действия вектора на ковектор, что удобно записывать в виде спаривания

$$\langle \xi, v \rangle = \langle v, \xi \rangle = \xi(v).$$

³В нем V — подлежащее множество, а $+_V : V \times V \rightarrow V$ и $\cdot_V : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ — операции сложения и умножения на скаляр соответственно.

⁴В работе также используется операция сдвига $(+)$ из точки на вектор, определенная следующим образом: если $v = \text{vec}(x, y)$, то $y = x + v$. В силу аксиомы б) операция сдвига определена однозначно.

При этом базису $(\mathbf{c}_i)_{i=1}^3$ отвечает дуальный ковекторный базис $(c^i)_{i=1}^3$ пространства \mathcal{V}^* , определяемый совокупностью 9 равенств $\langle c^i, \mathbf{c}_j \rangle = \delta_j^i$, $i, j = 1, 2, 3$, где δ_j^i — символ Кронекера. Использование дуального базиса позволяет извлечь координаты векторов и точек в соответствии со следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} \ni \mathbf{v} = v^i \mathbf{c}_i &\mapsto v^i = \langle c^i, \mathbf{v} \rangle \in \mathbb{R}, \\ E \ni x = o + x^i \mathbf{c}_i &\mapsto x^i = \langle c^i, \mathbf{p}(x) \rangle \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

В частности, операцию арифметизации Coor теперь можно задать явно:

$$\text{Coor} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \text{Coor}(x) = \left(\langle c^i, \mathbf{p}(x) \rangle \right)_{i=1}^3. \quad (2.2)$$

Замечание 2. Использование координат может ввести в искушение считать («по изоморфизму») точки и векторы элементами пространства \mathbb{R}^3 , а линейные операторы — матрицами 3×3 . Такое представление ошибочно, поскольку ведет к стиранию различий между точками и векторами: нет никакого способа сказать, чем является данный кортеж из трех чисел — совокупностью координат точки или совокупностью координат вектора.

6°. Физическое пространство как многообразие. Хотя структура (2.1) уже позволяет строить классическую механику континуума, для целей работы ее недостаточно, поскольку в рамках исследования предполагается синтезирование неевклидовых пространств, представляющих отсчетную форму. Для формализации последних удобно использовать язык теории гладких многообразий и аффинных связностей. Вместе с тем структуру пространства аффинной связности можно извлечь из структуры (2.1) и декартова репера $(o, (\mathbf{c}_i)_{i=1}^3)$ следующим образом.

Декартова арифметизация (2.2) позволяет определить на множестве E топологию открытых шаров:

$$\mathcal{T}_E = \{O \subset E : \text{множество } \text{Coor}(O) \text{ открыто в } \mathbb{R}^3\}.$$

Кроме того, пара (E, Coor) является картой на множестве E , полностью его покрывающей. Она определяет единственную гладкую структуру \mathcal{D}_E , содержащую тривиальный атлас $\{(E, \text{Coor})\}$.

Используя введенные топологию и гладкую структуру, приходим к структуре пространства аффинной связности

$$\mathcal{E}_{\text{geom}} = (E, \mathcal{T}_E, \mathcal{D}_E, \mathbf{g}, \epsilon, \nabla) \quad (2.3)$$

над множеством E , производной по отношению к исходной структуре (2.1). Здесь \mathbf{g} — метрика, определенная по базису $(\mathbf{c}_i)_{i=1}^3$ в соответствии с теоремой Пифагора:

$$\mathbf{g} = \delta_{ij} c^i \otimes c^j. \quad (2.4)$$

В таком случае скалярное произведение (\cdot) — элемент структуры (2.1) — связано с метрикой \mathbf{g} равенством $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Пятый элемент структуры (2.3) — элемент объема ϵ [69], определенный равенством $\epsilon = c^1 \wedge c^2 \wedge c^3$, где \wedge обозначает внешнее произведение⁵ [70]. Элементы площади, согласованные с исходным элементом объема, определяются равенствами

$$s_1 = c^2 \wedge c^3, \quad s_2 = c^3 \wedge c^1, \quad s_3 = c^1 \wedge c^2.$$

Последний элемент структуры (2.3) — аффинная связность ∇ , действующая на векторные поля $\mathbf{u}, \mathbf{v} : E \rightarrow \mathcal{V}$ согласованно с евклидовой метрикой (2.4):

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{v} := D\mathbf{v}[\mathbf{u}] = u^i \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \mathbf{c}_j.$$

Здесь $D\mathbf{v} : E \rightarrow \text{End}(\mathcal{V})$ — полная производная векторного поля \mathbf{v} , т. е. для точки $x \in E$ и вектора $\mathbf{h} \in \mathcal{V}$ выполняется равенство $\mathbf{v}(x + \mathbf{h}) = \mathbf{v}(x) + D_x \mathbf{v}[\mathbf{h}] + o(\|\mathbf{h}\|)$. Покомпонентно $D_x \mathbf{v} = \left. \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right|_x \mathbf{c}_i \otimes c^j$, где $\left. \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right|_x := D_x v^i[\mathbf{c}_j]$.

7°. Формы. Материальный континуум наблюдается в физическом пространстве в виде форм $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$, которые в рамках классической механики полагаются открытыми множествами с регулярной по Келлогу границей [1; 73]. В настоящем исследовании удобно использовать более детальное описание для форм в виде структур, подобных (2.3):

$$\mathcal{S} = (\mathcal{S}, \mathcal{T}_E|_{\mathcal{S}}, \mathcal{D}_E|_{\mathcal{S}}, \mathbf{g}|_{\mathcal{S}}, \epsilon|_{\mathcal{S}}, \nabla|_{\mathcal{S}}). \quad (2.5)$$

⁵Для двух ковекторов $\xi, \eta \in \mathcal{V}^*$ их внешнее произведение $\xi \wedge \eta$ определяется как

$$\xi \wedge \eta = \xi \otimes \eta - \eta \otimes \xi.$$

Здесь $S \subset E$ — непустое открытое множество, являющееся носителем формы, а символ вертикальной черты с нижним индексом S обозначает сужение элемента исходной структуры (2.3) на S .

Элемент $\mathcal{T}_E|_S$ структуры (2.5) обозначает топологию на S , полученную сужением исходной евклидовой топологии \mathcal{T}_E . Топология $\mathcal{T}_E|_S$ состоит из открытых подмножеств E , лежащих в S , т. е.

$$\mathcal{T}_E|_S = \{O \subset S : O \in \mathcal{T}_E\}.$$

Третий элемент структуры $\mathcal{D}_E|_S$ является гладкой структурой на S , полученной сужением исходной гладкой структуры \mathcal{D}_E на S . Это гладкая структура, порожденная атласом, состоящим из одной карты $(S, \text{Coor}|_S)$. Таким образом, тройка $\mathfrak{S} = (S, \mathcal{T}_E|_S, \mathcal{D}_E|_S)$ является многообразием размерности 3.

Последние три элемента структуры (2.5) обозначают, соответственно, метрику, элемент объема и связность, индуцированные метрикой, элементом объема и связностью объемлющего пространства $\mathcal{E}_{\text{geom}}$ на S . Эти поля можно рассматривать как теоретико-множественные сужения полей, заданных на объемлющем пространстве⁶.

Поскольку структура (2.5) весьма тривиальна, в классических руководствах по механике континуума она детально не определяется. Вместе с тем такое детальное определение необходимо, если в дальнейшем предполагается модификация части этой структуры. Именно по этой причине мы сочли уместным привести полный список элементов, составляющих форму \mathcal{S} как структуру.

8°. Деформации. Для идентификации точек, составляющих тело, одна из форм \mathcal{B} фиксируется и объявляется отсчетной. В явном виде отсчетная форма представлена в виде структуры, подобной (2.5):

$$\mathcal{B} = (\mathfrak{B}, \mathbf{g}|_{\mathfrak{B}}, \epsilon|_{\mathfrak{B}}, \nabla|_{\mathfrak{B}}), \quad (2.6)$$

где \mathfrak{B} — подлежащее многообразие, которое назовем материальным многообразием. Его элементы — материальные точки — обозначаются заглавными фактурными символами $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ и т. д.

Введение отсчетной формы (2.6) сопровождается установлением связей между ней и частью форм в физическом пространстве \mathcal{E} . Каждая такая связь моделируется посредством отображения

$$\chi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}, \quad x = \chi(\mathfrak{X}), \quad (2.7)$$

которое в соответствии с терминологией, принятой в механике континуума [1; 74], назовем деформацией. Предположим справедливой аксиому непрерывности [75]: 1) отображение χ является обратимым и 2) отображение χ и обратное к нему χ^{-1} непрерывно дифференцируемы необходимое число раз. Иными словами, отображение χ является диффеоморфизмом между гладкими многообразиями \mathfrak{B} и \mathfrak{S} .

Рассмотрим теперь произвольные формы $\mathcal{S}_R, \mathcal{S} \subset \mathcal{E}$, связанные с отсчетной формой \mathcal{B} деформациями $\chi_R : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}_R$ и $\chi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}$. Здесь форма \mathcal{S}_R , называемая далее промежуточной, также представлена в виде структуры

$$\mathcal{S}_R = (\mathfrak{S}_R, \mathbf{g}|_{\mathfrak{S}_R}, \epsilon|_{\mathfrak{S}_R}, \nabla|_{\mathfrak{S}_R}), \quad (2.8)$$

в которой \mathfrak{S}_R — подлежащее многообразие. Переход тела от промежуточной формы (2.8) к актуальной форме (2.5) определяется композицией

$$\gamma := \chi \circ \chi_R^{-1} : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}, \quad x = \gamma(X), \quad (2.9)$$

которая также характеризует изменение формы и потому для нее по-прежнему используется термин «деформация». Отметим, что в силу связей, установленных между формами, предполагается, что произвольной можно выбрать любую из пар (χ_R, χ) , (χ_R, γ) и (χ, γ) . Третий элемент, соответственно γ , χ и χ_R , определяется из композиции (2.9).

Таким образом, в рамках рассуждений, проведенных выше, деформации из отсчетной формы и деформации из промежуточной формы не вполне равноправны, поскольку первые используются для идентификации форм, а вторые характеризуют изменение формы. Однако, если раз и навсегда связи между отсчетной формой и остальными формами установлены, то отсчетную форму можно поменять на любую из этих форм с сохранением связей. Именно по этой причине отображения (2.7) и (2.9) не различаются терминологически.

Замечание 3. В настоящей работе используется три вида форм: фиксированная отсчетная форма (2.6), промежуточная форма (2.8) и актуальная форма (2.5). Отсчетная форма служит пространством меток, с помощью которого идентифицируется деформация континуума, а актуальная форма — та, которую занимает тело в текущий момент. Несмотря на то что в рамках классической механики континуума нет необходимости явно выделять промежуточную форму, в работе она используется как вспомогательная форма для синтеза неевклидовой геометрии частного вида.

⁶Такое рассмотрение допустимо в силу канонического изоморфизма [71] $T_x\mathfrak{S} \cong_{\text{vec}} \mathcal{V}$ между касательным пространством к \mathfrak{S} и трансляционным векторным пространством \mathcal{V} .

Деформацию можно задать для любой пары топологически эквивалентных форм \mathcal{S}_1 и \mathcal{S}_2 . Более того, возможен случай, когда деформация между рассматриваемыми формами определена не единственным образом. В этой связи целесообразно говорить о множестве всех деформаций из \mathcal{S}_1 в \mathcal{S}_2 , для обозначения которого в работе используется символ $\text{Deform}(\mathcal{S}_1; \mathcal{S}_2)$. В частности, соотношение $\text{Deform}(\mathcal{S}_1; \mathcal{S}_2) = \emptyset$ означает, что \mathcal{S}_1 и \mathcal{S}_2 не являются формами одного тела.

9°. Координатные представления. В работе, наряду с прямой тензорной записью, интенсивно используется метод координат, что позволяет привлекать аналитические рассуждения на основе классического анализа. Остановимся подробнее на тех координатных представлениях деформации, которые будут играть роль в дальнейшем.

В прямоугольных координатах деформацию γ (2.9) можно представить как отображение

$$\tilde{\gamma}_d := \text{Coor} \circ \gamma \circ \text{Coor}^{-1}|_{\text{Coor}(\mathcal{S}_R)} : \text{Coor}(\mathcal{S}_R) \rightarrow \text{Coor}(\mathcal{S}). \quad (2.10)$$

Если через $(X^I)_{I=1}^3$ обозначить значения прямоугольных координат точек промежуточной формы \mathcal{S}_R , или, что то же самое, элементы открытого множества $\text{Coor}(\mathcal{S}_R)$, то отображение (2.10) можно записать посредством трех соотношений:

$$x^i = x^i(X^1, X^2, X^3), \quad i = 1, 2, 3,$$

а обратное к нему — в виде соотношений

$$X^I = X^I(x^1, x^2, x^3), \quad I = 1, 2, 3.$$

Наличие пространственных симметрий у форм служит поводом для введения криволинейных координат, которые могут значительно упростить представление деформации. В общем случае с каждой из форм \mathcal{S}_R и \mathcal{S} соотнесем свою систему координат и, таким образом, придем к следующим функциям замены координат:

$$\begin{aligned} \psi_R : O_R \rightarrow \text{Coor}(\mathcal{S}_R), \quad X^I = X^I(Q^1, Q^2, Q^3), \quad I = 1, 2, 3, \\ \psi : O \rightarrow \text{Coor}(\mathcal{S}), \quad x^i = x^i(q^1, q^2, q^3), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Здесь $O_R, O \subset \mathbb{R}^3$ — открытые множества, элементы которых (упорядоченные тройки) обозначаются соответственно через $(Q^I)_{I=1}^3$ и $(q^i)_{i=1}^3$. Отображения ψ_R и ψ являются обратимыми и подчиняющимися требованиям: якобианы

$$\det \left[\frac{\partial X^I}{\partial Q^J} \right] \quad \text{и} \quad \det \left[\frac{\partial x^i}{\partial q^j} \right] \quad (2.12)$$

отличны от нуля в каждой точке множеств O_R и O соответственно. Хотя в действительности криволинейные координаты могут быть определены на более широких множествах, чем формы \mathcal{S}_R и \mathcal{S} , в силу локальности дальнейших рассуждений достаточно рассматривать их лишь в точках форм.

Функции замены координат (2.11) позволяют определить карты $(\mathcal{S}_R, \sigma_R)$ и (\mathcal{S}, σ) на отсчетной и актуальной формах. В явном виде координатные отображения σ_R и σ задаются соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_R = \psi_R^{-1} \circ \text{Coor}|_{\mathcal{S}_R} : \mathcal{S}_R \rightarrow O_R, \quad Q^I = Q^I(X), \quad I = 1, 2, 3, \\ \sigma = \psi^{-1} \circ \text{Coor}|_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \rightarrow O, \quad q^i = q^i(x), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.13)$$

В паре карт $(\mathcal{S}_R, \sigma_R)$ и (\mathcal{S}, σ) деформация γ имеет представление

$$\tilde{\gamma}_c := \sigma \circ \gamma \circ \sigma_R^{-1} : O_R \rightarrow O. \quad (2.14)$$

В координатной форме отображение (2.14) можно записать посредством соотношений

$$q^i = q^i(Q^1, Q^2, Q^3), \quad i = 1, 2, 3,$$

а обратную биекцию как

$$Q^I = Q^I(q^1, q^2, q^3), \quad I = 1, 2, 3.$$

Связь между отображениями γ и (2.14), а также координатными отображениями (2.13) иллюстрируется на рис. 2.1.

2.2. Неевклидова отсчетная форма

10°. Материальное многообразие. В механике континуума определяющие соотношения, связывающие кинематические поля с физическим откликом тела, получаются для некоторого предварительно подготовленного тестового образца. Состояние, в котором находится этот тестовый образец, назовем натуральным. Примером натурального состояния может служить состояние, свободное от напряжений, однако в работе допускаются и более общие случаи. При этом неявно подразумевается, что части, составляющие тело, физически неотличимы от тестового образца: выбирая любую часть тела, преобразуя ее в

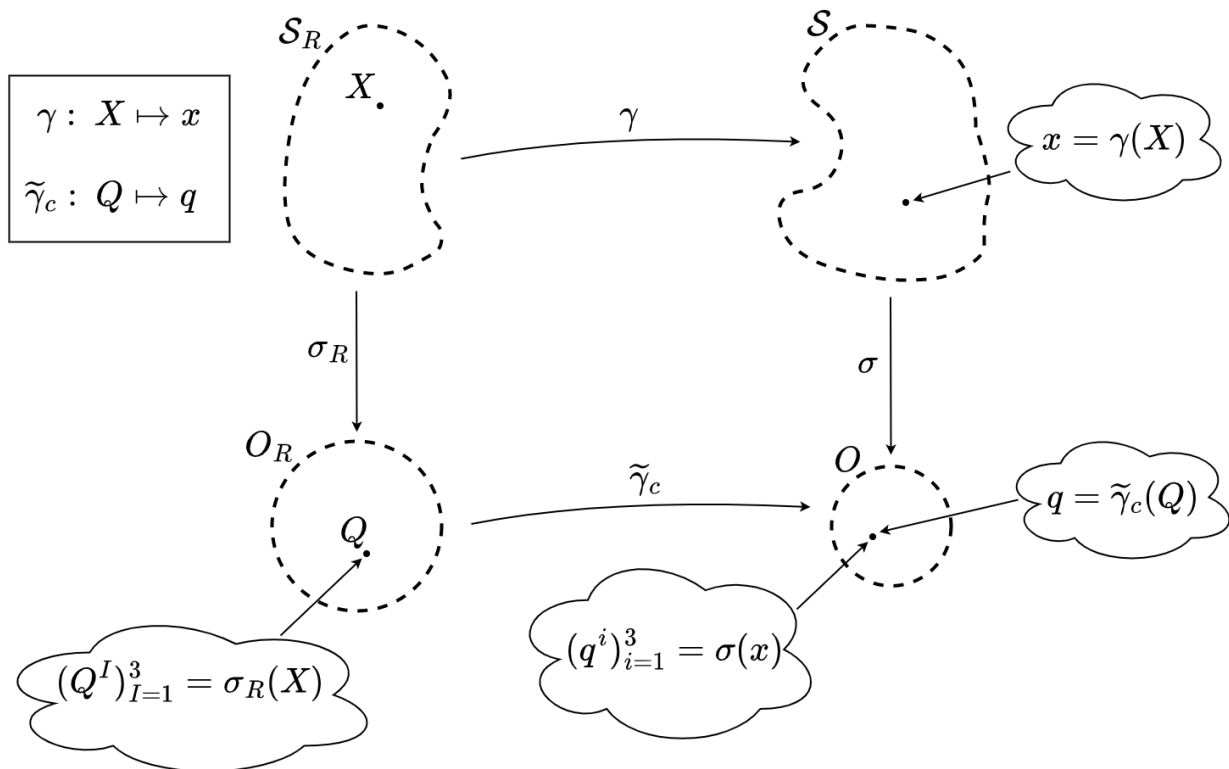


Рис. 2.1. Деформация γ и ее представление $\tilde{\gamma}_c$ в криволинейных координатах
 Fig. 2.1. Deformation γ and its representation $\tilde{\gamma}_c$ in curvilinear coordinates

натуральное состояние и подвергая затем разнообразным деформациям, получим то же определяющее соотношение, что и для исходного тестового образца. Следуя Ноллу, назовем такое тело материально единообразным [76].

В рамках классической механики континуума предполагается, что отсчетная форма (2.6) целиком находится в натуральном состоянии, что позволяет применять к ее точкам одно и то же определяющее соотношение. В таком случае деформация является глобальным преобразованием формы, результат которого можно количественно охарактеризовать, подставив частный вид отображения (2.7) в соответствующие аргументы определяющего закона. Однако существуют случаи, когда предположение о глобальности натурального состояния неправомерно [77]. Тело с дефектами или тело, полученное в ходе процесса роста (что тоже можно рассматривать как процесс записи дефектов), могут служить примерами таких случаев.

Вслед за Билби и Кондо [78–80] в настоящей работе предлагается отказаться от требования, согласно которому отсчетная форма должна быть областью физического пространства. Вместо этого отсчетная форма определяется в пространстве с некоторой неевклидовой геометрией. Выбор геометрии осуществляется таким образом, что физические причины отсутствия глобального натурального состояния кодируются инвариантами аффинной связности — кручением, кривизной и неметричностью.

Для реализации намеченной цели — синтеза неевклидовой формы — «сотрем» исходную геометрию с отсчетной формы (2.6), что приведет к материальному многообразию \mathfrak{B} , лежащему в ее основании. Следующим шагом на основе специальных рассуждений определим новую геометрию на материальном многообразии. Откладывая детальное изложение методики построения геометрии на \mathfrak{B} до раздела 3 (случай простого материала) и второй части работы ([72]; случаи среды второго градиента и микроструктуры), рассмотрим в общих чертах структуру полученной неевклидовой формы и отображений из нее в актуальные формы.

11°. Геометрия над материальным многообразием. В результате синтеза неевклидовой отсчетной формы материальное многообразие \mathfrak{B} как структура пополняется новыми элементами:

$$S_R = (\mathfrak{B}, G, \mu, \nabla). \quad (2.15)$$

Здесь G — риманова метрика, μ — форма объема, а ∇ — аффинная связность на \mathfrak{B} . Структура (2.15) является абстрактным представлением глобальной натуральной формы, а поля G , μ и ∇ зависят от

физической природы отсутствия глобального натурального состояния тела в евклидовом физическом пространстве.

12°. Обобщенные деформации. При переходе от формы (2.6) к материальному многообразию \mathfrak{B} каждая деформация $\chi \in \text{Deform}(\mathfrak{B}; \mathcal{S})$ становится отображением $\varkappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{S}$. Хотя с теоретико-множественной точки зрения отображения χ и \varkappa неотличимы друг от друга как отображения между одними и теми же многообразиями, с геометрической точки зрения это — совершенно разные отображения. Действительно, деформация χ переводит точку одного геометрического пространства в точку другого геометрического пространства, в то время как отображение \varkappa переводит точку многообразия в точку геометрического пространства. Назовем отображение \varkappa конфигурацией [76].

Замечание 4. Как правило, в статьях [16; 32; 76] и монографиях [35; 81] по геометрической механике континуума под конфигурацией понимается вложение $\varkappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{E}$ материального многообразия в физическое пространство. Определение, принятое в настоящей работе, не противоречит стандартному определению конфигурации, поскольку область прибытия отображения $\varkappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{S}$ (которая совпадает с множеством значений \mathcal{S}) всегда можно расширить до всего физического пространства, не изменяя функционального закона⁷. Обратное область прибытия отображения $\varkappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{E}$ можно сузить до множества значений \mathcal{S} и получить конфигурацию в новом смысле.

Удобство определения конфигурации как отображения $\varkappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{S}$ заключается в 1) преемственности конфигурации из деформации и 2) возможности непосредственно определить обратное отображение $\varkappa^{-1} : \mathcal{S} \rightarrow \mathfrak{B}$.

Если через $\text{Conf}(\mathfrak{B}; \mathcal{S})$ обозначить множество всех конфигураций из материального многообразия \mathfrak{B} в форму \mathcal{S} , то по построению для него справедливы следующие свойства:

- а) каждая конфигурация $\varkappa \in \text{Conf}(\mathfrak{B}; \mathcal{S})$ является инъективным отображением, образ которого \mathcal{S} — форма в \mathcal{E} ,
- б) композиция двух конфигураций является деформацией, т. е. если $\varkappa_1 \in \text{Conf}(\mathfrak{B}; \mathcal{S}_1)$ и $\varkappa_2 \in \text{Conf}(\mathfrak{B}; \mathcal{S}_2)$ — конфигурации, то справедливо включение $\varkappa_2 \circ \varkappa_1^{-1} \in \text{Deform}(\mathcal{S}_1; \mathcal{S}_2)$,
- в) если $\varkappa \in \text{Conf}(\mathfrak{B}; \mathcal{S}_1)$ — конфигурация, а $\gamma \in \text{Deform}(\mathcal{S}_1; \mathcal{S}_2)$ — деформация, то $\gamma \circ \varkappa \in \text{Conf}(\mathfrak{B}; \mathcal{S}_2)$.

Замечание 5. В отличие от подхода, принятого в настоящем исследовании, Нолл определяет материальное многообразие как отдельную структуру, вложения которой в физическое пространство удовлетворяют аксиомам, подобным свойствам а)–в) [76]. В таком случае удастся предусмотреть возможные топологические особенности материального многообразия, не проверяя их на формах. Вместе с тем тело по-прежнему топологически эквивалентно формам, поэтому подход, используемый в работе, эквивалентен подходу Нолла, отличаясь лишь способом описания.

Переход от материального многообразия к структуре (2.15) неевклидовой отсчетной формы сопровождается переходом от каждой конфигурации $\varkappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{S}$ к отображению $\lambda : \mathfrak{S}_R \rightarrow \mathcal{S}$. Последнее характеризует преобразование неевклидовой отсчетной формы в евклидову актуальную форму и потому в настоящей работе предлагается называть его обобщенной деформацией. С точки зрения теории множеств отображение λ совершенно неотлично от исходной деформации χ , однако, при рассмотрении их как отображений между структурами приходим к совершенно различным геометрическим соответствиям. Связь между деформацией χ , конфигурацией \varkappa и обобщенной деформацией λ иллюстрируется на рис. 2.2.

Вертикальные стрелки слева обозначают, соответственно, процессы стирания евклидовой геометрии и синтезирования неевклидовой геометрии. Вместе с тем справа во всех случаях остается одна и та же актуальная форма \mathcal{S} . В ходе стирания геометрии деформация χ переходит в конфигурацию \varkappa , а в ходе синтезирования геометрии последняя переходит в обобщенную деформацию λ .

⁷Согласно теории множеств, отображение $f : X \rightarrow Y$ определяется как упорядоченная тройка $f = (X, Y, F)$, где $F \subset X \times Y$ — функциональное отношение [82]. Здесь X соответствует области определения отображения, Y — области прибытия отображения, а F — функциональному закону. В рамках такого определения отображение $f = (X, Y, F)$ и отображение $\hat{f} = (X, f(X), F)$, полученное сужением области прибытия исходного отображения до множества значений $f(X)$, различаются.

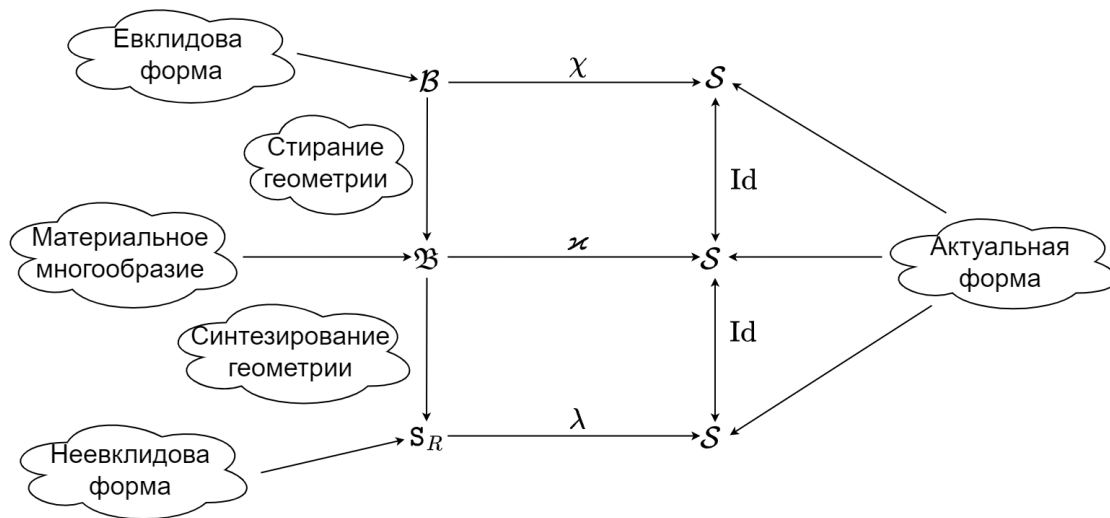


Рис. 2.2. Деформация, конфигурация и обобщенная деформация
 Fig. 2.2. Deformation, configuration, and generalized deformation

3. Синтезирование неевклидовой отсчетной формы для простого материала

3.1. Первый градиент деформации

13°. Метод синтезирования неевклидовой формы. Идея неевклидовой отсчетной формы, изложенная в общих чертах в разд. 2.2, реализована в настоящей статье для простого материала, а в [72] — для сред второго градиента и континуумов с микроструктурой. Несмотря на различное описание кинематики рассмотренных сред, метод синтезирования неевклидовой формы предложен один и тот же: 1) по семейству деформаций определяются кинематические поля — локальные деформации, характеризующие локальный переход в натуральное состояние, 2) для локальных деформаций формулируются условия совместности и 3) условия совместности интерпретируются в дифференциально-геометрических терминах. В рамках полученной интерпретации материальное многообразие наделяется соответствующей аффинной связностью, что завершает синтезирование неевклидовой формы.

14°. Линейное приближение деформации. Несмотря на то что случай простого материала является классическим и разобран в многочисленных работах по геометрической механике континуума [16; 32; 35; 76], он является простейшим примером, на котором можно продемонстрировать основную методику настоящего исследования. Помимо этого способ построения неевклидовой отсчетной формы для тел с расширенной кинематикой использует — наряду со специфическими кинематическими полями, поле локальных деформаций, которое вводится уже для простого материала. В этой связи уместно начать изложение именно с последнего случая.

Предположим, что задана функция

$$\mathcal{S}_R \times \text{End}(\mathcal{V}) \ni (X, \mathbf{F}) \mapsto \widehat{W}_1(X, \mathbf{F}) \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

которая с физической точки зрения является упругим потенциалом, определенным относительно формы \mathcal{S}_R . Если $\gamma \in \text{Deform}(\mathcal{S}_R; \mathcal{S})$ — произвольная деформация, то в соответствии с принципом локализации первого порядка [74] отклик тела в точке $X \in \mathcal{S}_R$ — плотность упругой энергии — определяется соотношением

$$W = \widehat{W}_1(X, \mathbf{F}(X)).$$

Здесь $\mathbf{F}(X) \in \text{End}(\mathcal{V})$, — градиент деформации, т. е. линейное отображение, для которого выполнена формула Тейлора первого порядка:

$$\gamma(X + \mathbf{h}) = \gamma(X) + \mathbf{F}(X)[\mathbf{h}] + \mathcal{o}(\|\mathbf{h}\|), \quad (3.2)$$

где $\mathbf{h} \in \mathcal{V}$ — вектор приращения, удовлетворяющий условию $X + \mathbf{h} \in \mathcal{S}_R$. Из формулы (3.2) вытекает единственность градиента деформации. Действительно, если $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, то

$$\mathbf{F}(X)[\mathbf{v}] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\text{vec}(\gamma(X), \gamma(X + s\mathbf{v}))}{s},$$

т. е. значение градиента деформации совпадает с производной по направлению. Кроме того, в соответствии с теоремой о производной обратного отображения [83] линейный оператор $\mathbf{F}(X)$ обратим в каждой точке $X \in \mathcal{S}_R$ и обратный оператор $\mathbf{F}^{-1}(X)$ является градиентом для обратной деформации γ^{-1} в точке $x = \gamma(X)$. Последнее свойство градиента деформации интенсивно используется в настоящем исследовании.

15°. **Представления градиента деформации.** Разным координатным представлениям деформации соответствуют различные представления ее градиента. В случае, когда деформация представлена в прямоугольных координатах отображением (2.10), градиент $\mathbf{F}(X)$ имеет диадное разложение

$$\mathbf{F}(X) = \left. \frac{\partial x^i}{\partial X^I} \right|_{\text{Coor}(X)} \mathbf{c}_i \otimes \mathbf{c}^I. \quad (3.3)$$

Если с отсчетной формой \mathcal{S}_R ассоциированы криволинейные координаты $(Q^I)_{I=1}^3$, а с актуальной формой связаны криволинейные координаты $(q^i)_{i=1}^3$, так что деформация в паре этих координатных систем имеет представление (2.14), то градиент деформации может быть записан в виде

$$\mathbf{F}(X) = \left. \frac{\partial q^i}{\partial Q^I} \right|_{\sigma_R(X)} \mathbf{e}_i|_{\gamma(X)} \otimes \mathbf{E}^I|_X. \quad (3.4)$$

Здесь $(\mathbf{e}_i)_{i=1}^3$ — поле локальных базисов, порожденное координатами $(q^i)_{i=1}^3$, а $(\mathbf{E}^I)_{I=1}^3$ — поле дуальных базисов, отвечающее полю локальных базисов $(\mathbf{E}_I)_{I=1}^3$, соответствующему координатам $(Q^I)_{I=1}^3$.

Замечание 6. Каждая из систем криволинейных координат $(Q^I)_{I=1}^3$ и $(q^i)_{i=1}^3$ определяет соответствующее представление поля радиус-векторов \mathbf{p} :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{p}}_R &:= \mathbf{p} \circ \sigma_R^{-1} : O_R \rightarrow \mathcal{V}, & \tilde{\mathbf{p}}_R(Q^1, Q^2, Q^3) &= X^I(Q^1, Q^2, Q^3) \mathbf{c}_I, \\ \tilde{\mathbf{p}} &:= \mathbf{p} \circ \sigma^{-1} : O \rightarrow \mathcal{V}, & \tilde{\mathbf{p}}(q^1, q^2, q^3) &= x^i(q^1, q^2, q^3) \mathbf{c}_i, \end{aligned}$$

где $O_R, O \subset \mathbb{R}^3$ — открытые множества, а $\sigma_R : \mathcal{S}_R \rightarrow O_R$ и $\sigma : \mathcal{S} \rightarrow O$ — координатные отображения (2.13). Полям $\tilde{\mathbf{p}}_R$ и $\tilde{\mathbf{p}}$, согласно свойствам (2.12), отвечают поля локальных базисов $(\mathbf{E}_I)_{I=1}^3$ и $(\mathbf{e}_i)_{i=1}^3$, заданные равенствами

$$\mathbf{E}_I = \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}_R}{\partial Q^I} = \frac{\partial X^J}{\partial Q^I} \mathbf{c}_J \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_i = \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}}{\partial q^i} = \frac{\partial x^j}{\partial q^i} \mathbf{c}_j.$$

Наконец, поля дуальных базисов $(\mathbf{E}^I)_{I=1}^3$ и $(\mathbf{e}^i)_{i=1}^3$ определяются поточечно на основе соотношений

$$\langle \mathbf{E}^I, \mathbf{E}_J \rangle = \delta^I_J, \quad I, J = 1, 2, 3 \quad \text{и} \quad \langle \mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta^i_j, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

В явном виде

$$\mathbf{E}^I = \frac{\partial Q^I}{\partial X^J} \mathbf{c}^J \quad \text{и} \quad \mathbf{e}^i = \frac{\partial q^i}{\partial x^j} \mathbf{c}^j.$$

Несмотря на то что разложения (3.3) и (3.4) отвечают общему представлению производного отображения и используют, в действительности, лишь аффинно-топологическую структуру объемлющего пространства (2.3), в дальнейших рассуждениях удобно перейти на стандартный формализм евклидовых тензоров, излагаемый в руководствах по механике континуума [1]. Для этого, используя соответствие между векторами и ковекторами по изоморфизму, порожденному метрикой (2.4) [70], заменим в разложениях дуальные ковекторные базисы на дуальные векторные базисы⁸:

$$\mathbf{F}(X) = \left. \frac{\partial x^i}{\partial X^I} \right|_{\text{Coor}(X)} \mathbf{c}_i \otimes \mathbf{c}^I = \left. \frac{\partial q^i}{\partial Q^I} \right|_{\sigma_R(X)} \mathbf{e}_i|_{\gamma(X)} \otimes \mathbf{E}^I|_X. \quad (3.5)$$

Здесь $(\mathbf{c}^I)_{I=1}^3$ и $(\mathbf{E}^I)_{I=1}^3$ — дуальные базисы, определенные системами равенств

$$\mathbf{c}^I \cdot \mathbf{c}_J = \delta^I_J \quad \text{и} \quad \mathbf{E}^I \cdot \mathbf{E}_J = \delta^I_J, \quad I, J = 1, 2, 3.$$

Разложения такого вида используются в дальнейшем.

3.2. Семейство форм и условие совместности

16°. **Гипотеза локальной разгрузки.** Определение натурального состояния является деликатной проблемой и требует уточнения, по меньшей мере, следующих положений: 1) понятие тестового образца, 2) подготовка тестового образца к определенному начальному состоянию, 3) определяющее соотношение для тестового образца и 4) аналитическое описание натурального состояния. Рассмотрение этих

⁸В таком случае тензорное произведение \otimes понимается следующим образом. Для векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ символ $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ обозначает линейный оператор на \mathcal{V} , определяемый согласно равенству $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}[\mathbf{w}] = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$.

положений требует привлечения тонких термодинамических рассуждений и потому выходит за рамки настоящей работы. Для того чтобы ограничиться аналитическим описанием в смысле классического анализа, предположим, что *a priori* задан тензор второго ранга $N_1 \in \text{End}(\mathcal{V})$, который ассоциируется с откликом тестового образца в натуральном состоянии.

Для формализации идеи локального перехода к натуральному состоянию в работе предлагается следующая гипотеза локальной разгрузки [84]. Предположим, что задана некоторая промежуточная форма \mathcal{S}_R вместе с упругим потенциалом (3.1), и предположим, что каждой точке $X \in \mathcal{S}_R$ этой формы соответствует деформация $\gamma^{(X)} : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}^{(X)}$ в некоторую форму $\mathcal{S}^{(X)}$, такая, что

$$\left. \frac{\partial \widehat{W}_1(X, \mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \right|_{\mathbf{F}=\mathbf{F}^{(X)}(X)} = N_1, \quad (3.6)$$

где $\mathbf{F}^{(X)} = D\gamma^{(X)}$ — градиент $\gamma^{(X)}$. Таким образом, приходим к семейству $\{\gamma^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$ деформаций и соответствующему семейству $\{\mathcal{S}^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$ форм.

17°. Синтезирование локальных деформаций. Для каждой деформации $\gamma^{(X)}$ в произвольной точке $Y \in \mathcal{S}_R$ ее градиент $\mathbf{F}^{(X)}(Y) \in \text{End}(\mathcal{V})$ имеет следующие разложения в соответствии с (3.5):

$$\mathbf{F}^{(X)}(Y) = [\widetilde{\mathbf{F}^{(X)}}]_I^i \Big|_Y \mathbf{c}_i \otimes \mathbf{c}^I = [\mathbf{F}^{(X)}]_I^i \Big|_Y \mathbf{e}_i|_{\gamma^{(X)}(Y)} \otimes \mathbf{E}^I \Big|_Y. \quad (3.7)$$

Синтезируем теперь по семейству $\{\mathbf{F}^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$ градиентов деформации $\mathbf{F}^{(X)} : \mathcal{S}_R \rightarrow \text{End}(\mathcal{V})$ новое поле $\mathbf{H} : \mathcal{S}_R \rightarrow \text{End}(\mathcal{V})$, значение которого в каждой точке $X \in \mathcal{S}_R$ определяется равенством

$$\mathbf{H}(X) := \mathbf{F}^{(X)}(Y) \Big|_{Y=X}. \quad (3.8)$$

Тогда разложения (3.7) переходят в разложения

$$\mathbf{H}(X) = \widetilde{H}_I^i \Big|_{\text{Coor}(X)} \mathbf{c}_i \otimes \mathbf{c}^I = H_I^i \Big|_{\sigma_R(X)} \mathbf{e}_i|_{\gamma^{(X)}(X)} \otimes \mathbf{E}^I \Big|_X, \quad (3.9)$$

где компоненты синтезированы по компонентам исходных тензоров:

$$\widetilde{H}_I^i \Big|_{\text{Coor}(X)} = [\widetilde{\mathbf{F}^{(X)}}]_I^i \Big|_X \quad \text{и} \quad H_I^i \Big|_{\sigma_R(X)} = [\mathbf{F}^{(X)}]_I^i \Big|_X.$$

Назовем тензор (3.8) локальной деформацией в точке X , а поле \mathbf{H} , соответственно, полем локальных деформаций. Предположим далее, что это поле является гладким. По построению, в соответствии с равенством (3.6), для значений поля \mathbf{H} выполнено следующее соотношение:

$$\forall X \in \mathcal{S}_R : \left. \frac{\partial \widehat{W}_1(X, \mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \right|_{\mathbf{F}=\mathbf{H}(X)} = N_1. \quad (3.10)$$

Несмотря на то что второе разложение в (3.9) является наиболее общим, оно обладает следующим недостатком. Поле базисов $X \mapsto (\mathbf{e}_i|_{\gamma^{(X)}(X)})_{i=1}^3$ может не порождаться одной координатной системой, т. е. это поле в общем случае не голономно. Для упрощения дальнейших рассуждений будем в качестве криволинейных координат $(q^i)_{i=1}^3$ выбирать прямоугольные координаты $(x^i)_{i=1}^3$. Тогда придем к разложению

$$\mathbf{H}(X) = H_I^i \Big|_{\sigma_R(X)} \mathbf{c}_i \otimes \mathbf{E}^I \Big|_X, \quad (3.11)$$

для локальной деформации и разложению

$$\mathbf{H}(X) = [\overline{\mathbf{H}}]_i^{-1} \Big|_{\sigma_R(X)} \mathbf{E}_I \Big|_X \otimes \mathbf{c}^i \quad (3.12)$$

для обратного к ней отображения⁹. Здесь

$$H_J^i [\overline{\mathbf{H}}]_j^{-1} = \delta_j^i \quad \text{и} \quad [\overline{\mathbf{H}}]_i^{-1} H_j^i = \delta_j^i. \quad (3.13)$$

Следуя терминологии, предложенной в монографии [35], назовем тензор $\mathbf{P}(X) := \mathbf{H}(X)$ имплантом.

Замечание 7. Столь детальное построение поля \mathbf{H} может показаться излишним. Вместе с тем, если проанализировать тот способ определения \mathbf{H} , который принят в континуальной теории дефектов [32; 38; 85], то возникает следующая проблема. В теории дефектов предполагается, что форма \mathcal{S}_R самонапряженного кристалла состоит из инфинитезимальных объемов, соединенных упругими

⁹Отображение существует, поскольку локальная деформация синтезирована по градиенту деформации, а последний обратим в каждой точке формы.

связями. При разрыве этих связей объемы, предоставленные самим себе, переходят в натуральное состояние. Таким образом, натуральное состояние кристалла представлено континуальной совокупностью разгруженных инфинитезимальных объемов, в то время как локальная деформация переводит инфинитезимальный объем, находящийся в составе формы \mathcal{S}_R , в тот же объем, но в натуральном состоянии. Но определение инфинитезимального объема и тем более совокупности таких объемов в рамках континуального приближения требует деликатных рассуждений [45]. Именно по этой причине в работе предложен иной подход, использующий лишь определенные выше понятия формы и деформации. В таком случае совокупности инфинитезимальных объемов отвечает континуальная совокупность локально натуральных форм $\mathcal{S}^{(X)}$, а поле \mathbf{H} синтезируется по соответствующим деформациям.

18°. Восстановление семейства деформаций. Рассмотрим теперь обратную задачу: предположим, что задано гладкое поле $\mathbf{H} : \mathcal{S}_R \rightarrow \text{End}(\mathcal{V})$ обратимых линейных преобразований, имеющее разложение (3.11) и удовлетворяющее свойству (3.10). Восстановим по нему семейство деформаций $\{\gamma^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$, которое бы его синтезировало.

С этой целью для фиксированной точки $X \in \mathcal{S}_R$ определим отображение $\gamma^{(X)} : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}^{(X)}$, которое в паре координатных систем $(Q^I)_{I=1}^3$ и $(x^i)_{i=1}^3$ имеет представление

$$x^i(Q^1, Q^2, Q^3) := b_X^i + H_I^i|_{\sigma_R(X)} Q^I, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.14)$$

где $(b_X^i)_{i=1}^3$ — фиксированная тройка чисел, своя, для каждого выбора X , а $(Q^I)_{I=1}^3$ — криволинейные координаты переменной точки $Y \in \mathcal{S}_R$. Тогда из линейности представления (3.14) вытекает гладкость отображения $\gamma^{(X)}$, а из обратимости матрицы $[H_I^i|_{\sigma_R(X)}]$ — его обратимость. Следовательно, $\gamma^{(X)}$ — деформация. Помимо этого

$$\left. \frac{\partial x^i}{\partial Q^I} \right|_{\sigma_R(Y)} = H_I^i|_{\sigma_R(X)},$$

что, в частности, дает $\mathbf{F}^{(X)}(X) = \mathbf{H}(X)$. Это означает, что деформация $\gamma^{(X)}$ является искомой. Воспроизведя проделанную процедуру для всех точек $X \in \mathcal{S}_R$, приходим к семейству деформаций $\{\gamma^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$, синтезирующему \mathbf{H} .

Имея в виду полученный результат, каждое гладкое тензорное поле $\mathbf{H} : \mathcal{S}_R \rightarrow \text{End}(\mathcal{V})$, удовлетворяющее свойству (3.10), можно рассматривать как поле локальных деформаций. При необходимости семейство деформаций $\{\gamma^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$ можно восстановить за счет представленной выше процедуры.

19°. Совместность локальных деформаций. Существование глобальной натуральной формы \mathcal{S}_0 эквивалентно следующему свойству гладкого тензорного поля обратимых линейных преобразований \mathbf{H} , удовлетворяющего соотношению (3.10). Назовем поле \mathbf{H} совместным, если существуют форма \mathcal{S}_0 и деформация $\gamma_0 \in \text{Deform}(\mathcal{S}_R; \mathcal{S}_0)$ такая, что $D\gamma_0 = \mathbf{H}$, т. е. $\mathbf{H}(X)$ совпадает в каждой точке $X \in \mathcal{S}_R$ с градиентом деформации $\mathbf{F}_0(X)$. В противном случае назовем поле \mathbf{H} несовместным.

В случае совместности поля \mathbf{H} соотношение (3.10) дает, что

$$\forall X \in \mathcal{S}_R : \left. \frac{\partial \widehat{W}_1(X, \mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \right|_{\mathbf{F}=D_X \gamma_0} = \mathbf{N}_1,$$

и форму \mathcal{S}_0 действительно можно интерпретировать как глобальную натуральную. Таким образом, отсутствие у тела глобального натурального состояния эквивалентно несовместности поля локальных деформаций.

В рамках классической теории потенциала [73] для совместности поля \mathbf{H} необходимо (а в случае односвязности \mathcal{S}_R и достаточно) выполнение равенства

$$\text{curl } \mathbf{H} = \mathbf{0}, \quad (3.15)$$

которое, с учетом разложения (3.11), равносильно следующей системе координатных соотношений:

$$\partial_J H_K^i - \partial_K H_J^i = 0, \quad i, J, K = 1, 2, 3. \quad (3.16)$$

Здесь и далее символ ∂_I является сокращенным обозначением для оператора частной производной $\frac{\partial}{\partial Q^I}$. Следуя Кренеру [38], возьмем равенства (3.16) в качестве основы для синтеза геометрии на материальном многообразии.

3.3. Геометрическая интерпретация условия совместности

20°. Поле Г. С целью получить геометрическую интерпретацию условия совместности поля локальных деформаций \mathbf{H} представим соотношения (3.16) в эквивалентном виде. Свертка их левой части с

компонентами поля $\overset{-1}{\mathbf{H}}$, определенного равенствами (3.12), приводит к следующей совокупности соотношений:

$$[\overset{-1}{\mathbf{H}}]_i^I \partial_J H_K^i - [\overset{-1}{\mathbf{H}}]_i^I \partial_K H_J^i = 0, \quad I, J, K = 1, 2, 3. \quad (3.17)$$

Введем обозначение

$$\Gamma_{JK}^I := [\overset{-1}{\mathbf{H}}]_i^I \partial_J H_K^i, \quad (3.18)$$

тогда формула (3.17) примет компактный вид

$$\Gamma_{JK}^I - \Gamma_{KJ}^I = 0, \quad I, J, K = 1, 2, 3. \quad (3.19)$$

Рассмотрим набор скалярных полей $\Gamma = [\Gamma_{JK}^I]$ более детально.

21°. **Свойства поля Γ .** Для скалярных полей Γ_{JK}^I , определенных равенствами (3.18), справедливо следующее утверждение:

Предложение 1. *Скалярные функции Γ_{JK}^I являются коэффициентами некоторой аффинной связности на многообразии \mathfrak{S}_R , над которым определена форма (2.8).*

Доказательство предложения 1 предварим следующими вспомогательными рассуждениями. При переходе от формы \mathcal{S}_R к многообразию \mathfrak{S}_R криволинейные координаты $(Q^I)_{I=1}^3$, ассоциированные с этой формой, становятся координатами на этом многообразии, порожденными картой $(\mathcal{S}_R, \sigma_R)$. Обратные локальные координаты на многообразии \mathfrak{S}_R можно рассматривать как криволинейные координаты на \mathcal{E} с учетом естественного вложения¹⁰ $\iota_{\mathcal{S}_R}: \mathcal{S}_R \hookrightarrow \mathcal{E}$. Кроме того, используя то же самое вложение, поля, заданные на многообразии \mathfrak{S}_R , можно рассматривать как поля на форме \mathcal{S}_R , и наоборот поля, заданные на форме \mathcal{S}_R , можно рассматривать как поля на многообразии \mathfrak{S}_R . Далее подобные переходы между структурами \mathfrak{S}_R и \mathcal{S}_R для координат и полей в работе явно не оговариваются.

Поскольку компоненты поля локальных деформаций \mathbf{H} отнесены к паре координат $(Q^I)_{I=1}^3$ и $(x^i)_{i=1}^3$, они подчиняются более сложному закону преобразования, чем компоненты тензора второго ранга. Вместе с тем, предполагая прямоугольные координаты $(x^i)_{i=1}^3$ фиксированными, можно по-прежнему иметь дело со стандартным законом преобразования компонент тензора второго ранга. Действительно, предположим, что заданы локальные координаты $(Q^I)_{I=1}^3$ и $(\tilde{Q}^I)_{I=1}^3$ на многообразии \mathfrak{S}_R , районы действия которых имеют непустое пересечение.

Цепное правило дифференцирования, примененное к компонентам градиента деформации $\mathbf{F}^{(X)}$ в точке $Y \in \mathcal{S}_R$, влечет равенство

$$[\widetilde{\mathbf{F}^{(X)}}]_J^i|_Y = \frac{\partial Q^K}{\partial \tilde{Q}^J} \Big|_{\tilde{\sigma}_R(Y)} [\mathbf{F}^{(X)}]_K^i|_Y. \quad (3.20)$$

Здесь и в дальнейшем компоненты полей, отвечающие координатам $(\tilde{Q}^I)_{I=1}^3$, обозначаются тильдой сверху. В полученном соотношении предполагается, что прямоугольные координаты $(x^i)_{i=1}^3$ фиксированы. Полагая затем в формуле (3.20) $Y = X$, приходим к искомому закону преобразования компонент локальной деформации:

$$\tilde{H}_J^i|_{\tilde{\sigma}_R(X)} = \frac{\partial Q^K}{\partial \tilde{Q}^J} \Big|_{\tilde{\sigma}_R(X)} H_K^i|_{\sigma_R(X)}. \quad (3.21)$$

Замечание 8. *Формула (3.21) позволяет установить эквивалентность соотношений (3.15) и (3.16), не привлекая общее представление ротора в криволинейных координатах. Действительно, в прямоугольных координатах $(X^I)_{I=1}^3$ равенство (3.15) равносильно совокупности равенств $A_{JK}^i = 0$, где*

$$A_{JK}^i = \frac{\partial \tilde{H}_K^i}{\partial X^J} - \frac{\partial \tilde{H}_J^i}{\partial X^K},$$

что вытекает из частного представления ротора в прямоугольных координатах [1]. С другой стороны, в силу формулы (3.21), приходим к равенствам

$$\tilde{H}_K^i = H_M^i \frac{\partial Q^M}{\partial X^K} \quad \text{и} \quad \tilde{H}_J^i = H_L^i \frac{\partial Q^L}{\partial X^J},$$

дифференцирование которых дает, соответственно,

$$\frac{\partial \tilde{H}_K^i}{\partial X^J} = H_M^i \frac{\partial^2 Q^M}{\partial X^J \partial X^K} + \frac{\partial Q^M}{\partial X^K} \frac{\partial H_M^i}{\partial X^J} = H_M^i \frac{\partial^2 Q^M}{\partial X^J \partial X^K} + \frac{\partial Q^M}{\partial X^K} \frac{\partial Q^L}{\partial X^J} \frac{\partial H_M^i}{\partial X^L}$$

и

$$\frac{\partial \tilde{H}_J^i}{\partial X^K} = H_M^i \frac{\partial^2 Q^M}{\partial X^K \partial X^J} + \frac{\partial Q^M}{\partial X^J} \frac{\partial H_M^i}{\partial X^K} = H_M^i \frac{\partial^2 Q^M}{\partial X^K \partial X^J} + \frac{\partial Q^M}{\partial X^J} \frac{\partial Q^L}{\partial X^K} \frac{\partial H_M^i}{\partial X^L}.$$

¹⁰Вложение определено как $X \mapsto X$.

Используя свойство перестановочности повторных производных и заменяя соответствующим образом индексы, приходим к соотношению

$$A^i_{JK} = \frac{\partial Q^L}{\partial X^J} \frac{\partial Q^M}{\partial X^K} \left(\frac{\partial H^i_M}{\partial X^L} - \frac{\partial H^i_L}{\partial X^M} \right).$$

Этим доказана равносильность (3.15) и (3.16).

Доказательство предложения 1. Согласно общей теории аффинных связностей [86], достаточно показать, что поля $\tilde{\Gamma}^I_{JK}$, отвечающие координатам $(\tilde{Q}^I)_{I=1}^3$, связаны с полями Γ^I_{JK} , соответствующими координатам $(Q^I)_{I=1}^3$, следующим законом преобразования:

$$\tilde{\Gamma}^I_{JK} = \Gamma^L_{SM} \frac{\partial \tilde{Q}^I}{\partial Q^L} \frac{\partial Q^S}{\partial \tilde{Q}^J} \frac{\partial Q^M}{\partial \tilde{Q}^K} + \frac{\partial \tilde{Q}^I}{\partial Q^L} \frac{\partial^2 Q^L}{\partial \tilde{Q}^J \partial \tilde{Q}^K}. \quad (3.22)$$

Для этого, используя определение (3.18) полей Γ^I_{JK} и закон преобразования (3.21), проделаем следующие выкладки:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^I_{JK} &= [\bar{\mathbf{H}}^1]_i^I \partial_J \tilde{H}^i_K = \\ &= \frac{\partial \tilde{Q}^I}{\partial Q^L} [\bar{\mathbf{H}}^1]_i^L \frac{\partial}{\partial \tilde{Q}^J} \left(\frac{\partial Q^M}{\partial \tilde{Q}^K} H^i_M \right) = \\ &= \frac{\partial \tilde{Q}^I}{\partial Q^L} [\bar{\mathbf{H}}^1]_i^L \frac{\partial Q^S}{\partial \tilde{Q}^J} \frac{\partial H^i_M}{\partial Q^S} \frac{\partial Q^M}{\partial \tilde{Q}^K} + \frac{\partial \tilde{Q}^I}{\partial Q^L} [\bar{\mathbf{H}}^1]_i^L H^i_M \frac{\partial^2 Q^M}{\partial \tilde{Q}^J \partial \tilde{Q}^K}. \end{aligned}$$

Применяя снова определение (3.18), а также вторую из формул (3.13), приходим к формуле (3.22), что завершает доказательство. \square

В настоящей работе аффинная связность, соответствующая полям (3.18), обозначается через Γ . Ее основное свойство представлено в следующем утверждении:

Предложение 2. *Кривизна связности Γ равна нулю, т. е.*

$$\mathfrak{R}(\Gamma) = 0.$$

Доказательство. Компоненты кривизны в координатном репере $(\frac{\partial}{\partial Q^I})_{I=1}^3$ определяются по формуле:

$$\mathfrak{R}^D_{ABC} = \partial_A \Gamma^D_{BC} - \partial_B \Gamma^D_{AC} + \Gamma^E_{BC} \Gamma^D_{AE} - \Gamma^E_{AC} \Gamma^D_{BE}.$$

Достаточно показать, что $\mathfrak{R}^D_{ABC} = 0$. Действительно, согласно определению (3.18) и правилу дифференцирования произведения,

$$\partial_A \Gamma^D_{BC} = \partial_A \left([\bar{\mathbf{H}}^1]_i^D \partial_B H^i_C \right) = \partial_A [\bar{\mathbf{H}}^1]_i^D \partial_B H^i_C + [\bar{\mathbf{H}}^1]_i^D \partial_A \partial_B H^i_C.$$

Аналогичным образом получается выражение

$$\partial_B \Gamma^D_{AC} = \partial_B [\bar{\mathbf{H}}^1]_i^D \partial_A H^i_C + [\bar{\mathbf{H}}^1]_i^D \partial_B \partial_A H^i_C.$$

В силу теоремы Шварца о перестановочности повторных производных [83], тогда приходим к равенству

$$\partial_A \Gamma^D_{BC} - \partial_B \Gamma^D_{AC} = \partial_A [\bar{\mathbf{H}}^1]_i^D \partial_B H^i_C - \partial_B [\bar{\mathbf{H}}^1]_i^D \partial_A H^i_C. \quad (3.23)$$

Далее, используя снова формулу (3.18), приходим к следующему соотношению:

$$\Gamma^E_{BC} \Gamma^D_{AE} - \Gamma^E_{AC} \Gamma^D_{BE} = [\bar{\mathbf{H}}^1]_i^E [\bar{\mathbf{H}}^1]_j^D (\partial_B H^i_C \partial_A H^j_E - \partial_A H^i_C \partial_B H^j_E). \quad (3.24)$$

Получим вспомогательное тождество. Для этого продифференцируем по Q^A второе из тождеств (3.13), предварительно заменив I на D и J на E , а индекс суммирования — на j :

$$H^j_E \partial_A [\bar{\mathbf{H}}^1]_j^D + [\bar{\mathbf{H}}^1]_j^D \partial_A H^j_E = 0,$$

что влечет

$$H^j_E \partial_A [\bar{\mathbf{H}}^1]_j^D = -[\bar{\mathbf{H}}^1]_j^D \partial_A H^j_E. \quad (3.25)$$

Домножая обе части полученного равенства на $[\bar{\mathbf{H}}^1]_i^E$ и производя суммирование по E , приходим, в силу первого из равенств (3.13), к соотношению

$$\partial_A [\bar{\mathbf{H}}^1]_i^D = -[\bar{\mathbf{H}}^1]_i^E [\bar{\mathbf{H}}^1]_j^D \partial_A H^j_E.$$

Наконец, домножая обе части последнего равенства на $\partial_B H_C^i$ и суммируя по i , получаем желаемую формулу:

$$\partial_A [\bar{\mathbf{H}}]_i^D \partial_B H_C^i = -[\bar{\mathbf{H}}]_i^E [\bar{\mathbf{H}}]_j^D \partial_B H_C^i \partial_A H_E^j.$$

Используя ее, можно преобразовать равенство (3.23) к виду:

$$\partial_A \Gamma_{BC}^D - \partial_B \Gamma_{AC}^D = -[\bar{\mathbf{H}}]_i^E [\bar{\mathbf{H}}]_j^D (\partial_B H_C^i \partial_A H_E^j - \partial_A H_C^i \partial_B H_E^j).$$

Сравнивая теперь полученное соотношение с (3.24), приходим к желаемому заключению, что $\mathfrak{R}_{ABC}^D = 0$. \square

Из предложения 2 вытекает, что в случае, когда многообразие \mathfrak{S}_R односвязно, аффинная связность Γ обладает свойством абсолютного параллелизма [87]: параллельный перенос вектора из одной точки многообразия \mathfrak{S}_R в другую точку того же многообразия не зависит от выбора кривой, соединяющей эти точки.

Замечание 9. Используя формулу (3.25), полученную в доказательстве предложения 2, можно прийти к эквивалентному представлению для полей Γ_{JK}^I :

$$\Gamma_{JK}^I = -[\bar{\mathbf{P}}]_K^i \partial_J P_i^I, \quad (3.26)$$

в котором частные производные компонент поля локальных деформаций заменены на частные производные компонент поля имплантов.

22°. Условие совместности в терминах кручения. Таким образом, если через $\mathfrak{T}(\Gamma)$ обозначить кручение связности Γ [86], то условия совместности (3.19) примут окончательную форму:

$$\mathfrak{T}(\Gamma) = 0, \quad (3.27)$$

поскольку левая часть (3.19) есть не что иное, как представление кручения в координатном репере. Этим показано, что поле локальных деформаций \mathbf{H} совместно в том и только в том случае, когда справедливо равенство (3.27).

Замечание 10. Связность Γ , коэффициенты которой определяются по формуле (3.18), известна в литературе как связность Вайценбока [88, 32] и может быть получена иным способом, с помощью метода подвижного репера. Действительно, определим репер $(z_i)_{i=1}^3$ на многообразии \mathfrak{S}_R в соответствии с равенствами

$$z_i = P_i^I \frac{\partial}{\partial Q^I}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Иными словами, репер $(z_i)_{i=1}^3$ получен действием поля (3.12) на исходный репер $(c_i)_{i=1}^3$. Определим теперь связность Γ на \mathfrak{S}_R так, чтобы элементы нового репера были взаимно параллельны, т. е.

$$\Gamma_{z_i} z_j = 0, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Тогда, как можно показать (см., например, в [34]), коэффициентами Γ будут поля (3.18).

Несмотря на геометрическую наглядность этого способа построения связности Γ , нужно по-прежнему доказывать, что равенства (3.27) являются условиями совместности локальных деформаций. По этой причине координатный подход, изложенный в основном тексте статьи, представляется более естественным.

3.4. Неевклидова отсчетная форма

23°. Материальная метрика. Поле локальных деформаций \mathbf{H} позволяет наделять многообразие \mathfrak{S}_R метрикой $\mathbf{G} = G_{IJ} dQ^I \otimes dQ^J$ в соответствии с соотношением

$$\mathbf{G}_X(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mathbf{H}(X)[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{H}(X)[\mathbf{v}], \quad (3.28)$$

определенным в любой точке $X \in \mathfrak{S}_R$ и для любых векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_X \mathfrak{S}_R$. В координатном репере $(\frac{\partial}{\partial Q^I})_{I=1}^3$ компоненты метрики \mathbf{G} имеют вид $G_{IJ} = \delta_{ij} H_i^I H_j^J$.

К метрике (3.28) можно прийти альтернативным путем, используя метод синтеза поля. Действительно, для каждой точки $X \in \mathfrak{S}_R$ определим метрический тензор $\mathbf{G}^{(X)}$ согласно равенству:

$$\mathbf{G}_Y^{(X)}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mathbf{F}^{(X)}(Y)[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{F}^{(X)}(Y)[\mathbf{v}], \quad (3.29)$$

для любой точки $Y \in \mathfrak{S}_R$. Фактически $\mathbf{G}^{(X)}$ является переносом исходной евклидовой метрики (2.4) на многообразии \mathfrak{S}_R . Теперь определим поле $\mathbf{G} : X \mapsto \mathbf{G}^{(X)}|_X$, что, в силу (3.29), приводит к соотношению

$$\mathbf{G}_X(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mathbf{F}^{(X)}(X)[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{F}^{(X)}(X)[\mathbf{v}]. \quad (3.30)$$

Тогда согласно определению (3.8) локальных деформаций, поле, заданное равенством (3.30), совпадает с полем, значения которого определяются формулой (3.28).

Замечание 11. С физической точки зрения поле локальных деформаций переводит инфинитезимальный объем, окружающий точку $X \in S_R$, в натуральное состояние. По этой причине метрика \mathbf{G} , определенная равенством (3.28) или (3.30), возвращает метрические образы элементов длины и угла в натуральном состоянии.

24°. Структура неевклидовой формы. Связность Γ , определенная формулой (3.18), и материальная метрика \mathbf{G} , заданная формулой (3.28) или (3.30), а также форма объема $\mu = dV_{\mathbf{G}}$, порожденная материальной метрикой [71], задают на многообразии \mathfrak{S}_R структуру пространства с неевклидовой связностью:

$$S_R = (\mathfrak{S}_R, \mathbf{G}, dV_{\mathbf{G}}, \Gamma). \quad (3.31)$$

Полученное пространство является искомой неевклидовой отсчетной формой, синтезированной по семейству форм $\{\mathcal{S}^{(X)}\}_{X \in S_R}$. Геометрическая характеристика пространства — тензор кручения $\mathfrak{T}(\Gamma)$ — служит одновременно и мерой несовместности поля локальных деформаций \mathbf{H} . Таким образом, в рамках установленного соответствия между несовместными деформациями и геометрией случая совместных деформаций отвечает пространство нулевого кручения, т. е. пространство евклидовой связности $\Gamma = \nabla|_{S_R}$.

Замечание 12. Процедура установления соответствия между несовместными деформациями и геометрией, восходящая к работам Кренера [38], аналогична процедуре, предложенной Картаном для построения неевклидовой геометрии [89–91]. Действительно, Картан вывел уравнения структуры евклидова пространства, представленные соотношениями с нулевой правой частью. Вводя независимые поля — 2-формы кручения и кривизны, Картан заменил нулевые правые части уравнений структуры на эти поля, что привело к пространствам аффинной связности нового типа. Таким образом, в рамках рассуждений Картана формы кручения и кривизны являются мерами отклонения полученной геометрии от евклидовой.

С другой стороны, условие совместности локальных деформаций имеет вид (3.27) и геометрически характеризует евклидову связность. Определяя антисимметричное тензорное поле $\mathfrak{T}_0 \neq 0$, заменим условие совместности на более общее равенство:

$$\mathfrak{T}(\Gamma) = \mathfrak{T}_0.$$

Тем самым совершен переход к пространству неевклидовой связности и случаю несовместных деформаций.

Замечание 13. Несмотря на то что промежуточная форма S_R (2.8) в общем случае не совпадает с отсчетной формой \mathcal{B} (2.6), выполненных построений достаточно для определения геометрии на материальном многообразии \mathfrak{B} . Действительно, формы \mathcal{B} и S_R связаны некоторой деформацией $\chi_R : \mathcal{B} \rightarrow S_R$, и геометрия из \mathfrak{S}_R может быть перенесена на \mathfrak{B} посредством этого отображения.

Вместе с тем в выборе формы S_R имеется произвол, поэтому могла бы возникнуть ситуация, что геометрия на материальном многообразии зависит от этого выбора. Однако, как показано в работе [34], в действительности такой зависимости нет: две геометрии, перенесенные из различных промежуточных форм на материальное многообразие, имеют одни и те же инварианты аффинной связности.

Замечание 14. В континуальной теории дефектов неевклидово пространство (3.31) используется для формализации глобального натурального состояния кристалла с дислокациями [32; 38; 85]. В таком случае тензор кручения определяет плотность дислокаций $\alpha = \alpha^{AB} \frac{\partial}{\partial Q^A} \otimes \frac{\partial}{\partial Q^B}$ с компонентами [74]

$$\alpha^{AB} = -\frac{1}{2} \epsilon^{ACD} \mathfrak{T}_{CD}^B.$$

Здесь $\epsilon^{ABC} = \frac{e^{ABC}}{\sqrt{\det \mathbf{G}}}$, где $\det \mathbf{G}$ — определитель материальной метрики \mathbf{G} , а e^{ABC} — четность перестановки (A, B, C) . Наравне с кручением \mathfrak{T} , тензор плотности дислокаций α может служить мерой несовместности поля локальных деформаций, поскольку равенство $\mathfrak{T} = 0$ эквивалентно равенству $\alpha = 0$.

Замечание 15. Наряду со связностью Вайценбока Γ можно определить связность Леви-Чивита L , используя материальную метрику (3.28). Коэффициенты связности определяются по классической формуле:

$$L_{AB}^C = \frac{G^{CD}}{2} (\partial_A G_{DB} + \partial_B G_{AD} - \partial_D G_{AB}), \quad (3.32)$$

где $[G^{AB}] = [G_{AB}]^{-1}$ — матрица, обратная к матрице метрических коэффициентов $G_{AB} = G(\frac{\partial}{\partial Q^A}, \frac{\partial}{\partial Q^B})$. В таком случае структура (3.31) заменяется на риманово пространство

$$S_R = (\mathfrak{S}_R, \mathbf{G}, dV_{\mathbf{G}}, L), \quad (3.33)$$

характеризующееся тензором кривизны Римана.

Замечание 16. Для моделирования состояния, вызванного непрерывным распределением точечных дефектов, в работах [33; 85; 92] предложено использовать связность Вейля ∇ , которая определяется согласно условиям:

- а) связность ∇ симметрична, то есть $\mathfrak{T} = 0$,
- б) $\nabla_u \mathbf{G} = \nu(u)\mathbf{G}$, где ν – наперед заданная 1-форма на \mathfrak{S}_R .

В частности, из условия б) следует, что тензор неметричности Ω , определяемый равенством

$$\Omega(u, v, w) := \mathbf{G}(\nabla_u v, w) + \mathbf{G}(v, \nabla_u w) - u[\mathbf{G}(v, w)] \quad (3.34)$$

и характеризующий несовместность связности с заданной метрикой, равен $\Omega = -\nu \otimes \mathbf{G}$.

3.5. Пример синтезирования неевклидовой формы

25°. Семейство деформаций. Для иллюстрации применения метода синтезирования неевклидовой формы рассмотрим модельный пример. Предположим, что промежуточная форма \mathcal{S}_R является полым шаром с внутренним радиусом R^i , внешним радиусом R^e и центром в точке o , т. е.

$$\mathcal{S}_R = \{X \in \mathcal{E} : R^i < \|X - o\| < R^e\}.$$

Используя сферическую симметрию формы \mathcal{S}_R , введем в пространстве \mathcal{E} сферические координаты (r, θ, φ) , связанные с прямоугольными координатами (x^1, x^2, x^3) следующими формулами перехода:

$$x^1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x^2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x^3 = r \cos \theta,$$

где $r > 0$, $\theta \in [0, \pi]$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$. Координаты, отвечающие точкам формы \mathcal{S}_R , обозначим символами (R, Θ, Φ) .

Пусть задано семейство $\{\gamma^{(\rho)}\}_{\rho \in]R^i, R^e[}$ деформаций $\gamma^{(\rho)} : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}^{(\rho)}$, для которого выполнены следующие условия:

- а) для каждого значения $\rho \in]R^i, R^e[$ деформация центрально-симметрична. При этом для всех точек сферы $\mathcal{L}_\rho = \{X \in \mathcal{E} : \|X - o\| = \rho\}$ справедливо свойство:

$$\forall X \in \mathcal{L}_\rho : \left. \frac{\partial \widehat{W}_1(X, \mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \right|_{\mathbf{F}=D_X \gamma^{(\rho)}} = \mathbf{N}_1;$$

- б) в сферических координатах (r, θ, φ) каждая деформация $\gamma^{(\rho)}$ имеет представление

$$\tilde{\gamma}^{(\rho)} = (\omega(\rho)f_0(R), \Theta, \Phi), \quad (3.35)$$

где $\omega, f_0 : [R^i, R^e] \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ – гладкие функции.

Следовательно, семейство $\{\gamma^{(\rho)}\}_{\rho \in]R^i, R^e[}$ является семейством $\{\gamma^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$ разгрузочных деформаций, элементы которого, отвечающие точкам на одной сфере, совпадают.

26°. Синтезирование поля локальных деформаций. С целью определить поле локальных деформаций представим каждую разгрузочную деформацию $\gamma^{(\rho)}$ в виде (2.14), где σ_R по-прежнему отвечает сферическим координатам, а σ , напротив, порождается декартовыми координатами. Учитывая (3.35), приходим к соотношению:

$$\tilde{\gamma}^{(\rho)} = (\omega(\rho)f_0(R) \sin \Theta \cos \Phi, \omega(\rho)f_0(R) \sin \Theta \sin \Phi, \omega(\rho)f_0(R) \cos \Theta). \quad (3.36)$$

Дифференцируя представление (3.36) (с учетом того, что ρ – параметр семейства), получаем матрицу градиента деформации $\mathbf{F}^{(\rho)} = [\mathbf{F}^{(\rho)}]_I^i \mathbf{c}_i \otimes \mathbf{E}^I$:

$$[\mathbf{F}^{(\rho)}]_I^i = \begin{bmatrix} \omega(\rho)f_0'(R) \sin \Theta \cos \Phi & \omega(\rho)f_0(R) \cos \Theta \cos \Phi & -\omega(\rho)f_0(R) \sin \Theta \sin \Phi \\ \omega(\rho)f_0'(R) \sin \Theta \sin \Phi & \omega(\rho)f_0(R) \cos \Theta \sin \Phi & \omega(\rho)f_0(R) \sin \Theta \cos \Phi \\ \omega(\rho)f_0'(R) \cos \Theta & -\omega(\rho)f_0(R) \sin \Theta & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

В соответствии с формулой (3.8) полагаем в (3.37) $R = \rho$, т. е.

$$\mathbf{H}(\rho, \Theta, \Phi) := \mathbf{F}^{(\rho)}(R, \Theta, \Phi) \Big|_{R=\rho}.$$

В дальнейшем удобно придерживаться привычных обозначений, поэтому вместо ρ будем писать снова R . Следовательно, поле локальных деформаций $\mathbf{H} = H_i^j \mathbf{c}_i \otimes \mathbf{E}^j$ представлено матрицей

$$[H_i^j] = \begin{bmatrix} \omega(R)f_0'(R) \sin \Theta \cos \Phi & \omega(R)f_0(R) \cos \Theta \cos \Phi & -\omega(R)f_0(R) \sin \Theta \sin \Phi \\ \omega(R)f_0'(R) \sin \Theta \sin \Phi & \omega(R)f_0(R) \cos \Theta \sin \Phi & \omega(R)f_0(R) \sin \Theta \cos \Phi \\ \omega(R)f_0'(R) \cos \Theta & -\omega(R)f_0(R) \sin \Theta & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

27°. Синтезирование геометрии. Используя поле локальных деформаций с матрицей (3.38), определим материальную метрику в соответствии с (3.28). Ее диадное представление имеет вид

$$G = [\omega(R)f'_0(R)]^2 dR \otimes dR + [\omega(R)f_0(R)]^2 d\Theta \otimes d\Theta + [\omega(R)f_0(R) \sin \Theta]^2 d\Phi \otimes d\Phi. \quad (3.39)$$

Здесь $(dR, d\Theta, d\Phi)$ — координатный корепер, дуальный к координатному реперу $(\frac{\partial}{\partial R}, \frac{\partial}{\partial \Theta}, \frac{\partial}{\partial \Phi})$.

Построим на многообразии \mathfrak{S}_R две геометрии — Римана и Вайценбока. Первая из них порождается метрикой (3.39); соответствующие коэффициенты связности Леви-Чивита определяются по формулам (3.32) и представлены выражениями (приведены лишь те поля, которые отличны от нуля)

$$\begin{aligned} L_{11}^1 &= \frac{f_0''}{f_0'} + \frac{\omega'}{\omega}, & L_{22}^1 &= -\frac{f_0(\omega f_0' + f_0 \omega')}{\omega [f_0']^2}, & L_{33}^1 &= -\frac{f_0 \sin^2 \Theta (\omega f_0' + f_0 \omega')}{\omega [f_0']^2}, \\ L_{12}^2 &= L_{21}^2 = L_{13}^3 = L_{31}^3 = \frac{f_0'}{f_0} + \frac{\omega'}{\omega}, & & & & \\ L_{33}^2 &= -\sin \Theta \cos \Theta, & L_{23}^3 &= L_{32}^3 = \cot \Theta. & & \end{aligned} \quad (3.40)$$

Кривизна полученной связности отлична от нуля, что демонстрируется следующим выражением для скалярной кривизны:

$$\text{Scal} = -\frac{2f_0 f_0' [\omega']^2 - 4\omega (f_0 f_0' \omega'' + \omega' (2[f_0']^2 - f_0 f_0''))}{f_0 \omega^4 [f_0']^3}. \quad (3.41)$$

Формулы (3.39) и (3.40) определяют риманово пространство (3.33) — первый вариант неевклидовой отсчетной формы. Мера отклонения геометрии от евклидовой характеризуется полем (3.41).

Теперь построим связность Вайценбока. Формула (3.18) в случае (3.38) приводит к следующим соотношениям для коэффициентов связности Γ (приведены только ненулевые поля):

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{f_0''}{f_0'} + \frac{\omega'}{\omega}, & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{f_0}{f_0'}, \\ \Gamma_{33}^1 &= -\frac{f_0 \sin^2 \Theta}{f_0'}, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{f_0'}{f_0} + \frac{\omega'}{\omega}, & \Gamma_{21}^2 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{f_0'}{f_0}, \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \Theta \cos \Theta, & \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \cot \Theta. & & \end{aligned} \quad (3.42)$$

Компоненты кручения \mathfrak{T} связности Γ в координатном репере представлены равенствами (приведены только ненулевые поля):

$$\mathfrak{T}_{12}^2 = \mathfrak{T}_{13}^3 = -\mathfrak{T}_{21}^2 = -\mathfrak{T}_{31}^3 = \frac{\omega'}{\omega}. \quad (3.43)$$

Таким образом, соотношения (3.39) и (3.42) приводят к неевклидовой форме (3.31). Меры отклонения этой формы от евклидовой (и одновременно — несовместности локальных деформаций) определяются выражениями (3.43).

Заключение

В статье на примере простого материала продемонстрирован геометрический метод моделирования несовместных деформаций, основанный на представлении мер деформации в терминах кривизны и кручения. Результаты того моделирования согласуются с известными представлениями [32; 33; 38; 85] что в определенном смысле верифицирует их. Во второй части работы [72] этим же методом будут исследованы новые задачи, связанные с расширенной кинематикой.

Благодарности

Автор работы благодарит С.А. Лычева и А.Л. Левитина за обсуждения и критические замечания по содержанию статьи.

Литература

- [1] Gurtin M.E., Fried E., Anand L. The Mechanics and Thermodynamics of Continua. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 718 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511762956>.
- [2] Toupin R.A. Theories of elasticity with couple-stress // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1964. Vol. 17. Pp. 85–112. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00253050>.
- [3] Лычев С.А. Законы сохранения недиссипативной микроморфной термоупругости // Вестник Самарского государственного университета. 2007. № 4(54), С. 225–262. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=9505071>. EDN: <https://elibrary.ru/hzzzon>.

- [4] dell’Isola F., Andreaus U., Placidi L. At the origins and in the vanguard of peridynamics, non-local and higher-gradient continuum mechanics: An underestimated and still topical contribution of Gabrio Piola // *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2015. Vol. 20, Issue 8. Pp. 887–928. DOI: <https://doi.org/10.1177/1081286513509811>.
- [5] dell’Isola F., Della Corte A., Giorgio I. Higher-gradient continua: The legacy of Piola, Mindlin, Sedov and Toupin and some future research perspectives // *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2017. Vol. 22, Issue 4. Pp. 852–872. DOI: <https://doi.org/10.1177/1081286515616034>.
- [6] Voigt W. Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle. II. // *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen*. 1887. Vol. 34. Pp. 53–100. URL: <https://eudml.org/doc/135897>.
- [7] Duhem P. Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique // *Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure, Serie 3*. 1893. Vol. 10. Pp. 183–230. DOI: <https://doi.org/10.24033/asens.389>.
- [8] Cosserat E. Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. Paris: A. Hermann et fils, 1909. 226 p.
- [9] Ericksen J.L. Conservation Laws for Liquid Crystals // *Transactions of The Society of Rheology*. 1961. Vol. 5, No. 1. Pp. 23–34. DOI: <https://doi.org/10.1122/1.548883>.
- [10] Ericksen J.L., Truesdell C. Exact theory of stress and strain in rods and shells // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1957. Vol. 1. Pp. 295–323. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00298012>.
- [11] Toupin R.A. Elastic materials with couple-stresses // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1962. Vol. 11. Pp. 385–414. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00253945>.
- [12] Mindlin R.D., Tiersten H.F. Effects of couple-stresses in linear elasticity // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1962. Vol. 11. Pp. 415–448. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00253946>.
- [13] Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1964. Vol. 16. Pp. 51–78. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00248490>.
- [14] Cross J.J. Mixtures of Fluids and Isotropic Solids // *Archives of Mechanics*. 1973. Vol. 25. Pp. 1024–1039. URL: https://rcin.org.pl/Content/167085/WA727_106772_P.262-Cross-Mixtures.pdf
- [15] Noll W. A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1958. Vol. 2. Pp. 197–226. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00277929>.
- [16] Wang C.-C. On the geometric structures of simple bodies, a mathematical foundation for the theory of continuous distributions of dislocations // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1967. Vol. 27, No. 1. Pp. 33–94. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00276434>.
- [17] Aifantis E.C. On the Microstructural Origin of Certain Inelastic Models // *Journal of Engineering Materials and Technology*. 1984. Vol. 106, Issue 4. Pp. 326–330. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3225725>.
- [18] Triantafyllidis N., Aifantis E.C. A gradient approach to localization of deformation. I. Hyperelastic materials // *Journal of Elasticity*. 1986. Vol. 16. Pp. 225–237. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00040814>.
- [19] Altan S.B., Aifantis E.C. On the structure of the mode III crack-tip in gradient elasticity // *Scripta Metallurgica et Materialia*. 1992. Vol. 26, Issue 2. Pp. 319–324. DOI: [https://doi.org/10.1016/0956-716X\(92\)90194-J](https://doi.org/10.1016/0956-716X(92)90194-J).
- [20] Ru C.Q., Aifantis E.C. A simple approach to solve boundary-value problems in gradient elasticity // *Acta Mechanica*. 1993. Vol. 101. Pp. 59–68. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01175597>.
- [21] Gutkin M.Yu., Aifantis E.C. Screw dislocation in gradient elasticity // *Scripta Materialia*. 1996. Vol. 35, Issue 11. Pp. 1353–1358. DOI: [https://doi.org/10.1016/1359-6462\(96\)00295-3](https://doi.org/10.1016/1359-6462(96)00295-3).
- [22] Gutkin M.Yu., Aifantis E.C. Edge dislocation in gradient elasticity // *Scripta Materialia*. 1997. Vol. 36, Issue 1. Pp. 129–135. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1359-6462\(96\)00352-1](https://doi.org/10.1016/S1359-6462(96)00352-1).
- [23] Gutkin M.Y., Aifantis E.C. Dislocations and disclinations in the gradient theory of elasticity. *Physics of the Solid State*. 1999. Vol. 41, Issue 12, Pp. 1980–1988. DOI: <https://doi.org/10.1134/1.1131139>.
- [24] Kalpakides V., Agiasofitou E. On Material Equations in Second Gradient Electroelasticity // *Journal of elasticity and the physical science of solids*. 2002. Vol. 67. Pp. 205–227. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1024926609083>.
- [25] Lurie S., Solyaev Y. Anti-plane inclusion problem in the second gradient electroelasticity theory // *International Journal of Engineering Science*. 2019. Vol. 144. Article number 103129. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2019.103129>.
- [26] Волков-Богородский Д.Б., Лурье С.А. Решение задачи Эшелби в градиентной теории упругости для многослойных сферических включений // *Известия Российской Академии наук. Сер.: Механика твердого тела*. 2016. № 2. С. 32–50. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=25996915>. EDN: <https://elibrary.ru/vwxdtl>.
- [27] Ma H., Hu G., Wei Y., Liang L. Inclusion problem in second gradient elasticity // *International Journal of Engineering Science*. 2018. Vol. 132. Pp. 60–78. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2018.07.003>.

- [28] Solyaev Y.O., Lurie S.A. Eshelby integral formulas in second gradient elasticity // *Nanoscience and Technology: An International Journal*. 2020. Vol. 11, Issue 2. Pp. 99–107. DOI: <https://doi.org/10.1615/NanoSciTechnolIntJ.2020031434>.
- [29] Eremeyev V.A. Local material symmetry group for first- and second-order strain gradient fluids // *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2021. Vol. 26, Issue 8. Pp. 1173–1190. DOI: <https://doi.org/10.1177/10812865211021640>.
- [30] Eremeyev V.A. Strong Ellipticity and Infinitesimal Stability within Nth-Order Gradient Elasticity // *Mathematics*. 2023. Vol. 11, Issue 4. Article number 1024. DOI: <https://doi.org/10.3390/math11041024>.
- [31] Kondo K. On the analytical and physical foundations of the theory of dislocations and yielding by the differential geometry of continua // *International Journal of Engineering Science*. 1964. Vol. 2, Issue 3. Pp. 219–251. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(64\)90022-9](https://doi.org/10.1016/0020-7225(64)90022-9).
- [32] Yavari A., Goriely A. Riemann–Cartan Geometry of Nonlinear Dislocation Mechanics // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 2012. Vol. 205, No. 1. Pp. 59–118. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00205-012-0500-0>.
- [33] Yavari A., Goriely A. Weyl geometry and the nonlinear mechanics of distributed point defects // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2012. Vol. 468, Issue 2148. Pp. 3902–3922. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.2012.0342>.
- [34] Лычев С.А., Койфман К.Г. Отсчетная форма тел с конечными несовместными деформациями // *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*. 2022. Т. 28, № 3–4. С. 53–87. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-53-87>.
- [35] Epstein M., Elżanowski M. *Material inhomogeneities and their evolution: A geometric approach*. Berlin Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2007. 261 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-72373-8>.
- [36] Epstein M. *The Geometrical Language of Continuum Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 312 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511762673>.
- [37] Lychev S., Koifman K. *Geometry of Incompatible Deformations: Differential Geometry in Continuum Mechanics*. Berlin: De Gruyter, 2019. 388 p. DOI: <https://doi.org/10.1515/9783110563214>.
- [38] Крёнер Э. *Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений*. Москва: Мир, 1965. 103 с. URL: <https://libcats.org/book/789336>.
- [39] Anthony K.H. Die theorie der disklinationen // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1970. Vol. 39. Pp. 43–88. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00281418>.
- [40] Anthony K.H. Die theorie der nichtmetrischen Spannungen in Kristallen // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1971. Vol. 40. Pp. 50–78. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00281530>.
- [41] Лычева Т.Н., Лычев С.А. Эволюция поля распределенных дефектов в кристалле при контактном взаимодействии с системой жестких штампов // *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*. 2022. Т. 28, № 1–2. С. 55–73. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-55-73>.
- [42] Yavari A. A geometric theory of growth mechanics // *Journal of Nonlinear Science*. 2010. Vol. 20, No. 6. Pp. 781–830. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00332-010-9073-y>.
- [43] Лычев С.А., Манжиров А.В. Математическая теория растущих тел. Конечные деформации // *Прикладная математика и механика*. 2013. Т. 77. Вып. 4. С. 585–604. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=20181632>. EDN: <https://elibrary.ru/qzqmwtd>.
- [44] Lychev S. Equilibrium equations for transversely accreted shells // *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2014. Vol. 94, Issue 1–2. Pp. 118–129. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.201200231>.
- [45] Lychev S.A., Koifman K.G. Geometric Aspects of the Theory of Incompatible Deformations. Part I. Uniform Configurations // *Nanomechanics Science and Technology: An International Journal*. 2016. Vol. 7, Issue 3. Pp. 177–233. DOI: <https://doi.org/10.1615/NanomechanicsSciTechnolIntJ.v7.i3.10>.
- [46] Lychev S., Koifman K. Nonlinear evolutionary problem for a laminated inhomogeneous spherical shell // *Acta Mechanica*. 2019. Vol. 230, No. 11. Pp. 3989–4020. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02399-7>.
- [47] Lychev S.A., Kostin G.V., Lycheva T.N., Koifman K.G. Non-Euclidean Geometry and Defected Structure for Bodies with Variable Material Composition // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1250. Article number 012035. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1250/1/012035>.
- [48] Sozio F., Yavari A. Nonlinear mechanics of accretion // *Journal of Nonlinear Science*. 2019. Vol. 29, No. 4. Pp. 1813–1863. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00332-019-09531-w>.
- [49] Бут Д.К., Бычков П.С., Лычев С.А. Теоретическое и экспериментальное исследование изгиба тонкой подложки при электролитическом осаждении // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Сер.: Механика*. 2020. № 1. С. 17–31. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.1.02>.

- [50] Lychev S.A., Kostin G.V., Koifman K.G., Lycheva T.N. Modeling and Optimization of Layer-by-Layer Structures // *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. Vol. 1009. Article number 012014. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1009/1/012014>.
- [51] Лычев С.А., Фекри М. Остаточные напряжения в термоупругом цилиндре, возникающие в результате послойной наплавки // *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*. 2020. Т. 26, № 3. С. 63–90. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-3-63-90>.
- [52] Lychev S.A., Fekry M. Evaluation of residual stresses in additively produced thermoelastic cylinder. Part I. Thermal fields // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2023. Vol. 30, Issue 10. Pp. 1975–1990. DOI: <https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2048325>.
- [53] Lychev S.A., Fekry M. Evaluation of residual stresses in additively produced thermoelastic cylinder. Part II. Residual stresses // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2023. Vol. 30, Issue 10. Pp. 1991–2000. DOI: <https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2048324>.
- [54] Fekry M. Thermal stresses in growing thermoviscoelastic cylinder and their evolution in the course of selective laser melting processing // *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2023. Vol. 103, Issue 2. Article number e202100519. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.202100519>.
- [55] Epstein M., Burton D.A., Tucker R. Relativistic anelasticity // *Classical and Quantum Gravity*. 2006. Vol. 23, Number 10. Pp. 3545–3571. DOI: <https://doi.org/10.1088/0264-9381/23/10/020>.
- [56] Lychev S., Koifman K., Bout D. Finite Incompatible Deformations in Elastic Solids: Relativistic Approach // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2022. Vol. 43. Pp. 1908–1933. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080222100250>.
- [57] Lychev S., Koifman K., Pivovarov N. Incompatible Deformations in Relativistic Elasticity // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023. Vol. 44, No. 6. Pp. 2352–2397. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080223060343>.
- [58] Lychev S.A., Koifman K.G. Material Affine Connections for Growing Solids // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2020. Vol. 41, No. 10. Pp. 2034–2052. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080220100121>.
- [59] Lychev S.A., Koifman K.G. Geometric Aspects of the Theory of Incompatible Deformations. Part II. Strain and Stress Measures // *Nanomechanics Science and Technology: An International Journal*. 2019. Vol. 10, Issue 2. Pp. 97–121. DOI: <https://doi.org/10.1615/NanoSciTechnolIntJ.2018024573>.
- [60] Лычев С.А., Лычева Т.Н., Койфман К.Г. Нелинейная эволюционная задача для самонапряженных слоистых гиперупругих сферических тел // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Сер.: Механика*. 2020. № 1. С. 43–59. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.1.04>.
- [61] Lychev S., Koifman K., Djuzhev N. Incompatible Deformations in Additively Fabricated Solids: Discrete and Continuous Approaches // *Symmetry*. 2021. Vol. 13, Issue 12. Article number 2331. DOI: <https://doi.org/10.3390/sym13122331>.
- [62] Morgan A.J.A. Inhomogeneous materially uniform higher order gross bodies // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1975. Vol. 57. Pp. 189–253. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00280157>.
- [63] Elżanowski M., Epstein M. The symmetry group of second-grade materials // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 1992. Vol. 27, Issue 4. Pp. 635–638. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(92\)90068-I](https://doi.org/10.1016/0020-7462(92)90068-I).
- [64] de León M., Epstein M. On the integrability of second-order G-structures with applications to continuous theories of dislocations // *Reports on Mathematical Physics*. 1993. Vol. 33, Issue 3. Pp. 419–436. DOI: [https://doi.org/10.1016/0034-4877\(93\)90008-3](https://doi.org/10.1016/0034-4877(93)90008-3).
- [65] de León M., Epstein M. The geometry of uniformity in second-grade elasticity // *Acta Mechanica*. 1996. Vol. 114. Pp. 217–224. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01170405>.
- [66] Epstein M., de León M. Geometrical theory of uniform Cosserat media // *Journal of Geometry and Physics*. 1998. Vol. 26, Issues 1–2. Pp. 127–170. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0393-0440\(97\)00042-9](https://doi.org/10.1016/S0393-0440(97)00042-9).
- [67] Bucataru I., Epstein M. Geometrical theory of dislocations in bodies with microstructure // *Journal of Geometry and Physics*. 2004. Vol. 52, Issue 1. Pp. 57–73. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2004.01.006>.
- [68] Маклейн С. Категории для работающего математика. Москва: Физматлит, 2004. 154 с. URL: <https://djvu.online/file/LMm0QFShaD5Lq>.
- [69] Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр I. Аналитическая геометрия. Москва: URSS, 2017. 416 с. URL: <https://www.klex.ru/1mti>.
- [70] Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра. Москва: URSS, 2017. 400 с. URL: <http://alexandr4784.narod.ru/pmmgeo2.html>.
- [71] Lee J.M. Introduction to Smooth Manifolds. New York: Springer, 2012. 708 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5>.

- [72] Койфман К.Г. Отсчетная форма тел с расширенной кинематикой. Часть II. Второй градиент и микроструктура // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2023. Т. 29, № 4. С. 54–76.
- [73] Kellogg O.D. Foundations of Potential Theory. Berlin, Heidelberg: Springer Nature, 1967. 386 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-86748-4>.
- [74] Truesdell C., Noll W. The Non-Linear Field Theories of Mechanics. New York: Springer Science & Business Media, 2004. 602 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-10388-3>.
- [75] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories // In: Flugge, S. (eds) Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie. Encyclopedia of Physics / Handbuch der Physik, vol 2 / 3 / 1. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2.
- [76] Noll W. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1967. Vol. 27, No. 1. Pp. 1–32. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00276433>.
- [77] Eckart C. The thermodynamics of irreversible processes. IV. The theory of elasticity and anelasticity // Physical Review. 1948. Vol. 73, Issue 4. Pp. 373–382. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.73.373>.
- [78] Bilby B., Bullough R., Smith E. Continuous distributions of dislocations: a new application of the methods of non-Riemannian geometry // Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1955. Vol. 231, Issue 1185. Pp. 263–273. DOI: <http://doi.org/10.1098/rspa.1955.0171>.
- [79] Kondo K. Non-Riemannian geometry of imperfect crystals from a macroscopic viewpoint. // In: Kondo K. (Ed.) Memoirs of the Unifying Study of the Basic Problems in Engineering Science by Means of Geometry, 1955. Vol. 1. Pp. 6–17. Division D-I, Gakujutsu Bunken Fukyo-Kai.
- [80] Kondo K. Non-Riemannian and Finslerian approaches to the theory of yielding // International Journal of Engineering Science. 1963. Vol. 1, Issue 1. Pp. 71–88. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(63\)90025-9](https://doi.org/10.1016/0020-7225(63)90025-9).
- [81] Marsden J.E., Hughes T.J. Mathematical foundations of elasticity. New York: Courier Corporation, 1994. 576 p. URL: <https://archive.org/details/mathematicalfoun00mars>.
- [82] Бурбаки Н. Теория множеств. Москва: Мир, 1965. 456 с. URL: <https://djvu.online/file/7e5EmIPGc6YB1>.
- [83] Шварц Л. Анализ. Том 1. Москва: Мир, 1972. 824 с.. URL: <https://klex.ru/14z8>.
- [84] Lychev S.A., Koifman K.G. Contorsion of Material Connection in Growing Solids // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42, No. 8. Pp. 1852–1875. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080221080187>.
- [85] Miri M., Rivier N. Continuum elasticity with topological defects, including dislocations and extra-matter // Journal of Physics A: Mathematical and General. 2002. Vol. 35, Number 7. Pp. 1727–1739. DOI: <https://doi.org/10.1088/0305-4470/35/7/317>.
- [86] Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр V. Риманова геометрия. Москва: Факториал, 1998. 496 с. URL: <http://alexandr4784.narod.ru/pmm52.html>.
- [87] Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр IV. Дифференциальная геометрия. Москва: URSS, 2017. 504 с. URL: <http://alexandr4784.narod.ru/pmm4.html>.
- [88] Fernandez O.E., Bloch A.M. The Weitzenböck Connection and Time Reparameterization in Nonholonomic Mechanics // Journal of Mathematical Physics. 2011. Vol. 52, Issue 1. Article number 012901. DOI: <http://doi.org/10.1063/1.3525798>.
- [89] Карган Э. Пространства аффинной, проективной и конформной связности. Казань: Изд-во Казанского университета, 1962. 210 с. URL: <https://libcats.org/book/444677>.
- [90] Карган Э. Риманова геометрия в ортогональном репере. Москва: Наука, 1960. 207 с.. URL: <https://knigogid.ru/books/1911053-riomanova-geometriya-v-ortogonalnom-repere/toread?ysclid=lp893xl1f8549212671>.
- [91] Карган Э. Геометрия римановых пространств. Москва: Книжный дом «Либроком», 2010. 248 с. URL: <https://reallib.org/reader?file=444675>.
- [92] Dhas B., Srinivasa A., Roy D. A Weyl geometric model for thermo-mechanics of solids with metrical defects // arXiv, 2019. DOI: <http://doi.org/10.48550/arXiv.1904.06956>.



K.G. Koifman

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.
E-mail: koifman.konstantin@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7891-9995>

REFERENCE SHAPE OF BODIES WITH ENHANCED KINEMATICS. PART I. GEOMETRIC METHODS

ABSTRACT

The work develops differential-geometric methods for modeling finite incompatible deformations of hyperelastic solids. They are based on the representation of a body as a smooth manifold, on which a metric and a non-Euclidean connection are synthesized. The resulting geometric space is interpreted as global stress-free shape, and the physical response and material balance equations are formulated relative to it. Within the framework of the geometric approach, deformations are modeled as embeddings of a non-Euclidean shape in physical space. Measures of incompatibility are represented by invariants of the affine connection, namely, curvature, torsion and nonmetricity, and the connection itself is determined by the type of physical process.

This article is the first part of the study. The proposed geometric approach is applied to bodies whose response depends on the first deformation gradient. Compatibility conditions are obtained and their geometric interpretation is proposed.

Key words: hyperelasticity; body with enhanced kinematics; second gradient; microstructure; incompatible deformations; residual stresses; non-Euclidean geometry; material metric; material connection; curvature; torsion; non-metricity.

Citation. Koifman K.G. Reference shape of bodies with enhanced kinematics. Part I. Geometric methods. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 4, pp. 26–53. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-4-26-53>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: author and reviewers declare no conflict of interests.

© Koifman K.G., 2023

Konstantin G. Koifman — tutor in mathematics, Bauman Moscow State Technical University, 5, 2nd Baumanskaya Street, Moscow, 105005, Russian Federation.

References

- [1] Gurtin M.E., Fried E., Anand L. *The Mechanics and Thermodynamics of Continua*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010, 718 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511762956>.
- [2] Toupin R.A. Theories of elasticity with couple-stress. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1964, vol. 17, pp. 85–112. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00253050>.
- [3] Lychev S.A. On conservation laws of micromorphic nondissipative thermoelasticity. *Vestnik of Samara State University*, 2007, no. 4(54), pp. 225–262. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=9505071>. EDN: <https://elibrary.ru/hzzzon>. (In Russ.)
- [4] dell’Isola F., Andraus U., Placidi L. At the origins and in the vanguard of peridynamics, non-local and higher-gradient continuum mechanics: An underestimated and still topical contribution of Gabrio Piola. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2015, vol. 20, issue 8, pp. 887–928. DOI: <https://doi.org/10.1177/1081286513509811>.
- [5] dell’Isola F., Della Corte A., Giorgio I. Higher-gradient continua: The legacy of Piola, Mindlin, Sedov and Toupin and some future research perspectives. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2017, vol. 22, issue 4, pp. 852–872. DOI: <https://doi.org/10.1177/1081286515616034>.
- [6] Voigt W. Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle. II. *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen*, 1887, Vol. 34, pp. 53–100. Available at: <https://eudml.org/doc/135897>.
- [7] Duhem P. Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique. *Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure, Serie 3*, 1893, vol. 10, pp. 183–230. DOI: <https://doi.org/10.24033/asens.389>.
- [8] Cosserat E. Cosserat F. *Théorie des corps déformables*. Paris: A. Hermann et fils, 1909. 226 p.

- [9] Ericksen J.L. Conservation Laws for Liquid Crystals. *Transactions of The Society of Rheology*, 1961, vol. 5, no. 1, pp. 23–34. DOI: <https://doi.org/10.1122/1.548883>.
- [10] Ericksen J.L., Truesdell C. Exact theory of stress and strain in rods and shells. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1957, vol. 1, pp. 295–323. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00298012>.
- [11] Toupin R.A. Elastic materials with couple-stresses. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1962, vol. 11, pp. 385–414. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00253945>.
- [12] Mindlin R.D., Tiersten H.F. Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1962, vol. 11, pp. 415–448. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00253946>.
- [13] Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1964, vol. 16, pp. 51–78. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00248490>.
- [14] Cross J.J. Mixtures of Fluids and Isotropic Solids. *Archives of Mechanics*, 1973, vol. 25, pp. 1024–1039. URL: https://rcin.org.pl/Content/167085/WA727_106772_P.262-Cross-Mixtures.pdf
- [15] Noll W. A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1958, vol. 2, pp. 197–226. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00277929>.
- [16] Wang C.-C. On the geometric structures of simple bodies, a mathematical foundation for the theory of continuous distributions of dislocations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1967, vol. 27, no. 1, pp. 33–94. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00276434>.
- [17] Aifantis E.C. On the Microstructural Origin of Certain Inelastic Models. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 1984, vol. 106, issue 4, pp. 326–330. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3225725>.
- [18] Triantafyllidis N., Aifantis E.C. A gradient approach to localization of deformation. I. Hyperelastic materials. *Journal of Elasticity*, 1986, vol. 16, pp. 225–237. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00040814>.
- [19] Altan S.B., Aifantis E.C. On the structure of the mode III crack-tip in gradient elasticity. *Scripta Metallurgica et Materialia*, 1992, vol. 26, issue 2, pp. 319–324. DOI: [https://doi.org/10.1016/0956-716X\(92\)90194-J](https://doi.org/10.1016/0956-716X(92)90194-J).
- [20] Ru C.Q., Aifantis E.C. A simple approach to solve boundary-value problems in gradient elasticity. *Acta Mechanica*, 1993, vol. 101, pp. 59–68. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01175597>.
- [21] Gutkin M.Yu., Aifantis E.C. Screw dislocation in gradient elasticity. *Scripta Materialia*, 1996, vol. 35, issue 11, pp. 1353–1358. DOI: [https://doi.org/10.1016/1359-6462\(96\)00295-3](https://doi.org/10.1016/1359-6462(96)00295-3).
- [22] Gutkin M.Yu., Aifantis E.C. Edge dislocation in gradient elasticity. *Scripta Materialia*, 1997, vol. 36, issue 1, pp. 129–135. DOI: [https://doi.org/10.1016/S1359-6462\(96\)00352-1](https://doi.org/10.1016/S1359-6462(96)00352-1).
- [23] Gutkin M.Y., Aifantis E.C. Dislocations and disclinations in the gradient theory of elasticity. *Physics of the Solid State*, 1999, vol. 41, issue 12, pp. 1980–1988. DOI: <https://doi.org/10.1134/1.1131139>.
- [24] Kalpakides V., Agiasofitou E. On Material Equations in Second Gradient Electroelasticity. *Journal of elasticity and the physical science of solids*, 2002, vol. 67, pp. 205–227. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1024926609083>.
- [25] Lurie S., Solyaev Y. Anti-plane inclusion problem in the second gradient electroelasticity theory. *International Journal of Engineering Science*, 2019, vol. 144, Article number 103129. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2019.103129>.
- [26] Volkov-Bogorodskii D.B., Lurie S.A. Solution of the Eshelby problem in gradient elasticity for multilayer spherical inclusions. *Mechanics of Solids*, 2016, vol. 51, issue 2, pp. 161–176. DOI: <https://doi.org/10.3103/S0025654416020047>. (in English; original in Russian)
- [27] Ma H., Hu G., Wei Y., Liang L. Inclusion problem in second gradient elasticity. *International Journal of Engineering Science*, 2018, vol. 132, pp. 60–78. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2018.07.003>.
- [28] Solyaev Y.O., Lurie S.A. Eshelby integral formulas in second gradient elasticity. *Nanoscience and Technology: An International Journal*, 2020, vol. 11, issue 2, pp. 99–107. DOI: <https://doi.org/10.1615/NanoSciTechnolIntJ.2020031434>.
- [29] Eremeyev V.A. Local material symmetry group for first- and second-order strain gradient fluids. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2021, vol. 26, issue 8, pp. 1173–1190. DOI: <https://doi.org/10.1177/10812865211021640>.
- [30] Eremeyev V.A. Strong Ellipticity and Infinitesimal Stability within Nth-Order Gradient Elasticity. *Mathematics*, 2023, Vol. 11, Issue 4, Article number 1024. DOI: <https://doi.org/10.3390/math11041024>.
- [31] Kondo K. On the analytical and physical foundations of the theory of dislocations and yielding by the differential geometry of continua. *International Journal of Engineering Science*, 1964, vol. 2, issue 3, pp. 219–251. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(64\)90022-9](https://doi.org/10.1016/0020-7225(64)90022-9).
- [32] Yavari A., Goriely A. Riemann–Cartan Geometry of Nonlinear Dislocation Mechanics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2012, vol. 205, no. 1, pp. 59–118. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00205-012-0500-0>.
- [33] Yavari A., Goriely A. Weyl geometry and the nonlinear mechanics of distributed point defects. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2012, vol. 468, issue 2148, pp. 3902–3922. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.2012.0342>.

- [34] Lychev S.A., Koifman K.G. Reference shape of bodies with finite incompatible deformations. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 3–4, pp. 53–87. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-53-87>. (In Russ.)
- [35] Epstein M., Elżanowski M. Material inhomogeneities and their evolution: A geometric approach. Berlin Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2007, 261 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-72373-8>.
- [36] Epstein M. The Geometrical Language of Continuum Mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 2010, 312 p. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511762673>.
- [37] Lychev S., Koifman K. Geometry of Incompatible Deformations: Differential Geometry in Continuum Mechanics. Berlin: De Gruyter, 2019, 388 p. DOI: <https://doi.org/10.1515/9783110563214>.
- [38] Kröner E. Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1959, vol. 4, no. 4, pp. 18–334. Available at: <https://libcats.org/book/789336>. (In Russ.)
- [39] Anthony K.H. Die theorie der disklinationen. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1970, vol. 39, pp. 43–88. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00281418>.
- [40] Anthony K.H. Die theorie der nichtmetrischen Spannungen in Kristallen. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1971, vol. 40, pp. 50–78. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00281530>.
- [41] Lycheva T.N., Lychev S.A. Evolution of the field of distributed defects in a crystal during contact interaction with a system of rigid stamps. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 1-2, pp. 55–73. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-55-73>. (In Russ.)
- [42] Yavari A. A Geometric Theory of Growth Mechanics. *Journal of Nonlinear Science*, 2010, vol. 20, no. 6, pp. 781–830. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00332-010-9073-y>.
- [43] Lychev S.A., Manzhurov A.V. The mathematical theory of growing bodies. Finite deformations. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, vol. 77, issue 4, pp. 421–432. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2013.11.011>. EDN: <https://elibrary.ru/wqyump>. (In English; original in Russian)
- [44] Lychev S. Equilibrium equations for transversely accreted shells. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2014, vol. 94, issues 1–2, pp. 118–129. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.201200231>.
- [45] Lychev S.A., Koifman K.G. Geometric Aspects of the Theory of Incompatible Deformations. Part I. Uniform Configurations. *Nanomechanics Science and Technology: An International Journal*, 2016, vol. 7, issue 3, pp. 177–233. DOI: <https://doi.org/10.1615/NanomechanicsSciTechnolIntJ.v7.i3.10>.
- [46] Lychev S., Koifman K. Nonlinear evolutionary problem for a laminated inhomogeneous spherical shell. *Acta Mechanica*, 2019, vol. 230, no. 11, pp. 3989–4020. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02399-7>.
- [47] Lychev S.A., Kostin G.V., Lycheva T.N., Koifman K.G. Non-Euclidean Geometry and Defected Structure for Bodies with Variable Material Composition. *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1250, article number 012035. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1250/1/012035>.
- [48] Sozio F., Yavari A. Nonlinear mechanics of accretion. *Journal of Nonlinear Science*, 2019, vol. 29, no. 4, pp. 1813–1863. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00332-019-09531-w>.
- [49] Bout D.K., Bychkov P.S., Lychev S.A. The theoretical and experimental study of the bending of a thin substrate during electrolytic deposition. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2020, no. 1, pp. 17–31. DOI: <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.1.02>. (In Russ.)
- [50] Lychev S.A., Kostin G.V., Koifman K.G., Lycheva T.N. Modeling and Optimization of Layer-by-Layer Structures. *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, vol. 1009, article number 012014. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1009/1/012014>.
- [51] Lychev S.A., Fekry M. Residual stresses in a thermoelastic cylinder resulting from layer-by-layer surfacing. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2020, vol. 26, no. 3, pp. 63–90. DOI: <https://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-3-63-90>. (In Russ.)
- [52] Lychev S.A., Fekry M. Evaluation of residual stresses in additively produced thermoelastic cylinder. Part I. Thermal fields. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2023, vol. 30, issue 10, pp. 1975–1990. DOI: <https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2048325>.
- [53] Lychev S.A., Fekry M. Evaluation of residual stresses in additively produced thermoelastic cylinder. Part II. Residual stresses. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2023, vol. 30, issue 10, pp. 1991–2000. DOI: <https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2048324>.
- [54] Fekry M. Thermal stresses in growing thermoviscoelastic cylinder and their evolution in the course of selective laser melting processing. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2023, vol. 103, issue 2, Article number e202100519. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.202100519>.

- [55] Epstein M., Burton D.A., Tucker R. Relativistic anelasticity. *Classical and Quantum Gravity*, 2006, Vol. 23, no. 10, Pp. 3545–3571. DOI: <https://doi.org/10.1088/0264-9381/23/10/020>.
- [56] Lychev S., Koifman K., Bout D. Finite Incompatible Deformations in Elastic Solids: Relativistic Approach. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2022, vol. 43, pp. 1908–1933. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080222100250>.
- [57] Lychev S., Koifman K., Pivovarov N. Incompatible Deformations in Relativistic Elasticity. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2023, vol. 44, issue 6, pp. 2352–2397. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080223060343>.
- [58] Lychev S.A., Koifman K.G. Material Affine Connections for Growing Solids. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2020, vol. 41, no. 10, pp. 2034–2052. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080220100121>.
- [59] Lychev S.A., Koifman K.G. Geometric Aspects of the Theory of Incompatible Deformations. Part II. Strain and Stress Measures. *Nanomechanics Science and Technology: An International Journal*, 2019, vol. 10, issue 2, pp. 97–121. DOI: <https://doi.org/10.1615/NanoSciTechnolIntJ.2018024573>.
- [60] Lychev S.A., Lycheva T.N., Koifman K.G. The Nonlinear evolutionary problem for self-stressed multilayered hyperelastic spherical bodies. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2020, issue 1, pp. 43–59. DOI: [10.15593/perm.mech/2020.1.04](https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.1.04). (In Russ.)
- [61] Lychev S., Koifman K., Djuzhev N. Incompatible Deformations in Additively Fabricated Solids: Discrete and Continuous Approaches. *Symmetry*, 2021, vol. 13, issue 12, Article number 2331. DOI: <https://doi.org/10.3390/sym13122331>.
- [62] Morgan A.J.A. Inhomogeneous materially uniform higher order gross bodies. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1975, vol. 57, pp. 189–253. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00280157>.
- [63] Elżanowski M., Epstein M. The symmetry group of second-grade materials. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1992, vol. 27, issue 4, pp. 635–638. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(92\)90068-I](https://doi.org/10.1016/0020-7462(92)90068-I).
- [64] de León M., Epstein M. On the integrability of second-order G-structures with applications to continuous theories of dislocations. *Reports on Mathematical Physics*, 1993, vol. 33, issue 3, pp. 419–436. DOI: [https://doi.org/10.1016/0034-4877\(93\)90008-3](https://doi.org/10.1016/0034-4877(93)90008-3).
- [65] de León M., Epstein M. The geometry of uniformity in second-grade elasticity. *Acta Mechanica*, 1996, vol. 114, pp. 217–224. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01170405>.
- [66] Epstein M., de León M. Geometrical theory of uniform Cosserat media. *Journal of Geometry and Physics*, 1998, vol. 26, issues 1–2, pp. 127–170. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0393-0440\(97\)00042-9](https://doi.org/10.1016/S0393-0440(97)00042-9).
- [67] Bucataru I., Epstein M. Geometrical theory of dislocations in bodies with microstructure. *Journal of Geometry and Physics*, 2004, Vol. 52, Issue 1, pp. 57–73. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2004.01.006>.
- [68] Mac Lane S. Categories for the Working Mathematician. Moscow: Fizmatlit, 2004, 154 p. Available at: <https://djvu.online/file/LMm0QFShaD5Lq>. (In Russ.)
- [69] Postnikov M.M. Lectures in geometry. Semester I. Analytic geometry. Moscow: URSS, 2017, 416 p. Available at: <https://www.klex.ru/1mti>. (In Russ.)
- [70] Postnikov M.M. Lectures in geometry. Semester II. Linear algebra. Moscow: URSS, 2017, 400 p. Available at: <http://alexandr4784.narod.ru/pmmgeo2.html>. (In Russ.)
- [71] Lee J.M. Introduction to Smooth Manifolds. New York: Springer, 2012, 708 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5>.
- [72] Koifman K.G. Reference shape of bodies with enhanced kinematics. Part II. Second gradient and microstructure. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriia Vestnik of Samara University. Natural Science Series*. 2023. Vol. 29, № 4. pp. 54–76.
- [73] Kellogg O.D. Foundations of Potential Theory. Berlin, Heidelberg: Springer Nature, 1967, 386 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-86748-4>.
- [74] Truesdell C., Noll W. The Non-Linear Field Theories of Mechanics. New York: Springer Science & Business Media, 2004. 602 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-10388-3>.
- [75] Truesdell C., Toupin R. The Classical Field Theories. In: In: Flugge, S. (eds) Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie. Encyclopedia of Physics / Handbuch der Physik, vol 2 / 3 / 1. Springer, Berlin, Heidelberg. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2.
- [76] Noll W. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1967, vol. 27, no. 1, pp. 1–32. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00276433>.
- [77] Eckart C. The thermodynamics of irreversible processes. IV. The theory of elasticity and anelasticity. *Physical Review*, 1948, vol. 73, issue 4, pp. 373–382. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.73.373>.
- [78] Bilby B., Bullough R., Smith E. Continuous distributions of dislocations: a new application of the methods of non-Riemannian geometry. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1955, vol. 231, issue 1185, pp. 263–273. DOI: <http://doi.org/10.1098/rspa.1955.0171>.

- [79] Kondo K. Non-Riemannian geometry of imperfect crystals from a macroscopic viewpoint. In: Kondo K. (Ed.) *Memoirs of the Unifying Study of the Basic Problems in Engineering Science by Means of Geometry*, 1955. Vol. 1. Pp. 6–17. Division D-I, Gakujutsu Bunken Fukyo-Kai.
- [80] Kondo K. Non-Riemannian and Finslerian approaches to the theory of yielding. *International Journal of Engineering Science*, 1963, vol. 1, issue 1, pp. 71–88. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(63\)90025-9](https://doi.org/10.1016/0020-7225(63)90025-9).
- [81] Marsden J.E., Hughes T.J. *Mathematical foundations of elasticity*. New York: Courier Corporation, 1994. 576 p. URL: <https://archive.org/details/mathematicalfoun00mars>.
- [82] Bourbaki N. *Theory of Sets*. Moscow: Mir, 1965. 456 p. Available at: <https://djvu.online/file/7e5EmIPGc6YB1>. (In Russ.)
- [83] Schwartz L. *Analysis*. Vol. 1. Moscow: Mir, 1972, 824 p. Available at: <https://klex.ru/14z8>. (In Russ.)
- [84] Lychev S.A., Koifman K.G. Contorsion of Material Connection in Growing Solids. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2021, vol. 42, no. 8, pp. 1852–1875. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080221080187>.
- [85] Miri M., Rivier N. Continuum elasticity with topological defects, including dislocations and extra-matter. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2002, vol. 35, number 7, pp. 1727–1739. DOI: <https://doi.org/10.1088/0305-4470/35/7/317>.
- [86] Postnikov M.M. *Lectures in geometry. Semester V: Riemannian geometry*. Moscow: Faktorial, 1998, 496 p. Available at: <http://alexandr4784.narod.ru/pmm52.html>. (In Russ.)
- [87] Postnikov M.M. *Lectures in geometry. Semester IV. Differential geometry*. Moscow: URSS, 2017, 504 p. Available at: <http://alexandr4784.narod.ru/pmm4.html>. (In Russ.)
- [88] Fernandez O.E., Bloch A.M. The Weitzenböck Connection and Time Reparameterization in Nonholonomic Mechanics. *Journal of Mathematical Physics*, 2011, vol. 52, issue 1, Article number 012901. DOI: <http://doi.org/10.1063/1.3525798>.
- [89] Kartan E. *Spaces of affine, projective and conformal connection*. Kazan: Izd-vo Kazanskogo universiteta, 1962, 210 p. Available at: <https://libcats.org/book/444677>. (In Russ.)
- [90] Kartan E. *Riemannian geometry in an orthogonal frame*. Moscow: Nauka, 1960, 207 p. URL: <https://knigogid.ru/books/1911053-rimanova-geometriya-v-ortogonalnom-repere/toread?ysclid=lp893x11f8549212671>. (In Russ.)
- [91] Kartan E. *Geometry of Riemannian spaces*. Moscow: Knizhnyi dom «Librokom», 2010, 248 p. Available at: <https://reallib.org/reader?file=444675>. (In Russ.)
- [92] Dhas B., Srinivasa A., Roy D. A Weyl geometric model for thermo-mechanics of solids with metrical defects. *arXiv*, 2019. DOI: <http://doi.org/10.48550/arXiv.1904.06956>.