Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-3-64-71

УДК 517.574; 517.982.1; 517.55; 517.987.1

Дата: поступления статьи: 03.08.2023
после рецензирования: 06.09.2023
принятия статьи: 30.10.2023

Б.Н. Хабибуллин
Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра Российской Академии наук, Уфа, Российская Федерация
E-mail: khabib-bulat@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1308-4461

СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ОГИБАЮЩИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ НА ОБЛАСТИ[1]

АННОТАЦИЯ

Одна из распространенных задач в различных областях вещественного и комплексного анализа —- вопросы существования и построения для заданной функции огибающей ее снизу или сверху функции из специального класса H. Рассматривается случай, когда H — выпуклый конус всех субгармонических функций на области D из конечномерного евклидова пространства над полем вещественных чисел. Для пары субгармонических функций u и M из этого выпуклого конуса H устанавливаются двойственные необходимые и достаточные условия, при которых найдется субгармоническая функция $h \not\equiv -\infty$, «гасящая рост» функции u в том смысле, что значения суммы $u+h$ в каждой точке из D не больше значения функции M в той же точке. Эти результаты предполагается применить в дальнейшем в вопросах нетривиальности весовых классов голоморфных функций, к описанию нулевых множеств и множеств единственности для этих классов, к проблемам аппроксимации в теории функций и т. д.

Ключевые слова: субгармоническая функция; нижняя огибающая; упорядоченное пространство; векторная решетка; проективный предел; линейное выметание; мера Йенсена; голоморфная функция.

Цитирование. Хабибуллин Б.Н. Субгармонические огибающие для функций на области // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2023. Т. 29, № 3. С. 64–71. DOI: http://doi.org/ 10.18287/2541-7525-2023-29-3-64-71.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Булат Нурмиевич Хабибуллин — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник отдела теории функций и функционального анализа, Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра Российской Академии наук, 450008, г. Уфа, ул. Чернышевского, 112.

1. Формулировка основного результата

Множества $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ соответственно *натуральных, вещественных, комплексных чисел,* $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$ и *расширенная вещественная прямая* $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, где $-\infty := \inf \mathbb{R} = \sup \emptyset$, $+\infty := = \sup \mathbb{R} = \inf \emptyset$ для *пустого множества* $\emptyset$, рассматриваются с их естественными алгебраическими, геометрическими, топологическими структурами.

Евклидово пространство $\mathbb{R}^d$ размерности $d \in \mathbb{N}$ рассматривается с *евклидовой нормой*

$$|x| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_d^2}, \quad (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$$

и *d-мерной мерой Лебега* $\mathfrak{m}_d$.

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FMRS-2022-0124).

Для пары *расширенных вещественных функций* $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ и $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ пишем $f \leqslant g$ *на* D, если $f(x) \leqslant g(x)$ для каждой точки $x \in X$.

Через $C(X)$ обозначаем *векторное пространство над* $\mathbb{R}$ *непрерывных функций* на топологическом пространстве X со значениями в $\mathbb{R}$.

Всюду далее буквой $D \subset \mathbb{R}^d$ обозначаем *область*, т. е. связное открытое подмножество в $\mathbb{R}^d$, а также $\overline{B}_o(r) := \bigl\{x \in \mathbb{R}^d \bigm| |x-o| \leqslant r\bigr\}$ — *шар радиуса* $r > 0$ *с центром* $o \in \mathbb{R}^d$.

Подмножество H векторного пространства над полем $\mathbb{R}$ называется *конусом*, если $tH \subset H$ при всех $0 < t \in \mathbb{R}$. Если дополнительно конус H содержит нулевой вектор, т. е. $tH \subset H$ при всех $0 \leqslant t \in \mathbb{R}$, то H — *конус с вершиной в нуле*. Конус H *выпуклый,* если H — выпуклое подмножество, т. е. имеет место включение $tH + (1-t)H \subset H$ при любых $0 < t < 1$. Таким образом, H — *выпуклый конус с вершиной в нуле*, если $tH \subset H$ при всех $0 \leqslant t \in \mathbb{R}$ и $H + H \subset H$.

Через $\mathsf{Meas}_0^+(D)$ обозначаем *выпуклый конус всех положительных конечных борелевских мер с компактным носителем в* D, $\mathsf{sbh}(D)$ — *выпуклый конус всех субгармонических на* D *функций,* который включает в себя функцию, тождественно равную $-\infty$ на D. Все необходимые здесь сведения о субгармонических функциях можно почерпнуть из [1; 2].

Как и в монографии [3], если интеграл от функции по мере μ существует и принимает значение из $\overline{\mathbb{R}}$, то эту функцию называем интегрируемой по мере μ, или *μ-интегрируемой,* а если этот интеграл еще и конечен, т. е. со значением в $\mathbb{R}$, то эту функцию называем суммируемой по мере μ, или *μ-суммируемой.*

Понятия суммируемости или интегрируемости интегралов, а также равенств $\overset{a.e.}{=}$ и неравенств $\overset{a.e.}{\leqslant}$ почти всюду без указания меры относятся ниже именно к мере Лебега $\mathfrak{m}_d$.

Всякая *постоянная* $c \in \overline{\mathbb{R}}$ часто рассматривается и как *функция, тождественно равная* c. Так, для функции $u\colon D \to \overline{\mathbb{R}}$ запись $u \neq -\infty$ означает, что функция u не тождественная $-\infty$ на D. Через

$$\mathsf{sbh}_*(D) := \bigl\{u \in \mathsf{sbh}(D) \bigm| u \neq -\infty\bigr\} \tag{1.1}$$

обозначаем выпуклый конус с вершиной в нуле всех субгармонических функций на области D, не равных тождественно $-\infty$.

Для расширенной вещественной функции $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}}$ ее *полунепрерывная сверху регуляризация* $f^*\colon D \to \overline{\mathbb{R}}$ определяется как

$$f^*(x) := \limsup_{x' \to x} f(x'), \quad x \in D.$$

Функция $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}}$ *локально ограничена сверху на* D, если

$$\sup_{x \in K} f(x) < +\infty$$

для каждого компакта $K \subset D$. Функция $f\colon D \to \overline{\mathbb{R}}$ *локально интегрируема на* D по мере $\mathfrak{m}_d$, если существует интеграл

$$\int_K f \,\mathrm{d}\mathfrak{m}_d \in \overline{\mathbb{R}}$$

для каждого компакта $K \subset D$, а если все интегралы здесь конечны, т. е. принимают значения из $\mathbb{R}$, то функция f *локально суммируема на* D. Каждая функция $u \in \mathsf{sbh}_*(D)$ локально суммируема на D.

Наше исследование опирается на функционально-аналитические результаты из [4; 5], где достаточно детально изложена и история вопроса с обширной библиографией. Здесь для выпуклых подконусов $H \subset \mathsf{sbh}(D)$ они применяются для двойственного описания условий, при которых для пары субгармонических функций $u, M \in \mathsf{sbh}_*(D)$ и непрерывной функции $m \in C(D)$ найдется субгармоническая функция $h \in \mathsf{sbh}_*(D)$, с которой $u + h \leqslant M + m$ на D. Наши основные результаты можно трактовать и как частный случай решения поставленных в [4, п. 2.3, задача 3; 5, раздел 1.2; п. 1.2.3, задача 3] общих проблем о существовании огибающей из выпуклых конусов.

Теорема 1. *Пусть область $D \subset \mathbb{R}^d$ содержит замкнутый шар $\overline{B}_o(r)$ радиуса $r > 0$ с центром в точке $o \in D$, а также заданы пара субгармонических функций $u, M \in \mathsf{sbh}_*(D)$ на D вместе с непрерывной функцией $m \in C(D)$. Определим класс мер*[2]

$$J_o^r(D) := \left\{\mu \in \mathsf{Meas}_0^+(D) \;\middle|\; \int_{\overline{B}_o(r)} h \,\mathrm{d}\mathfrak{m}_d \leqslant \int_D h \,\mathrm{d}\mu \quad \forall h \in \mathsf{sbh}(D)\right\}. \tag{1.2}$$

Для существования функции $h \in \mathsf{sbh}_*(D)$, с которой выполнены неравенства

$$u(x) + h(x) \leqslant m(x) + M(x) \quad \forall x \in D, \tag{1.3}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовало число $C \in \mathbb{R}$, для которого

$$\int_D u \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_D (m + M) \,\mathrm{d}\mu + C \quad \forall \mu \in J_o^r(D). \tag{1.4}$$

[2]Класс $J_o^r(D)$ в терминах из [4–6] — это класс всех линейных выметаний сужения $\mathfrak{m}_d$ на $\overline{B_o}(r)$ относительно $\mathsf{sbh}(D)$.

Доказательство необходимости в теореме 1. В силу полунепрерывности субгармонических функций u, h и M они μ-интегрируемы по любой борелевской положительной мере $\mu \in \mathsf{Meas}_0^+(D)$ с компактным носителем на D. Интегрирование неравенства (1.3) по положительной мере $\mu \in J_o^r(D)$ с компактным носителем влечет за собой интегральное неравенство

$$\int_D u \,\mathsf{d}\mu + \int_D h \,\mathsf{d}\mu \leqslant \int_D m \,\mathsf{d}\mu + \int_D M \,\mathsf{d}\mu,$$

откуда по определению (1.2) класса $J_o^r(D)$ получаем

$$\int_D u \,\mathsf{d}\mu + \int_{\overline{B}_o(r)} h \,\mathsf{d}\mathfrak{m}_d \leqslant \int_D m \,\mathsf{d}\mu + \int_D M \,\mathsf{d}\mu \quad \text{для всех } \mu \in J_o^r(D). \tag{1.5}$$

Каждая субгармоническая на D функция h локально $\mathfrak{m}_d$-суммируема [1], ввиду чего

$$c := \int_{\overline{B}_o(r)} h \,\mathsf{d}\mathfrak{m}_d \in \mathbb{R},$$

где число $c \in \mathbb{R}$ не зависит от меры $\mu \in J_o^r(D)$. Последнее вместе с (1.5) влечет за собой неравенство

$$\int_D u \,\mathsf{d}\mu \leqslant \int_D (m+M) \,\mathsf{d}\mu - c \quad \text{для всех } \mu \in J_o^r(D).$$

Положив здесь $C := -c \in \mathbb{R}$, получаем требуемое (1.4).

Необходимость в теореме 1 доказана.

Доказательство достаточности в теореме 1 потребует определенной подготовки и представлено в последнем разделе 3. Для этого потребуется один общий результат по двойственному описанию нижней огибающей относительно выпуклого конуса — теорема A, приведенная ниже в разделе 2.

Наиболее важен в теореме 1 для применений к голоморфным функциям в духе [4; 5] уже случай, когда $m = 0$. Случай нулевой функции $M = 0$, т. е. единственной непрерывной функции $m \in C(D)$ в правой части (1.3), ранее был полностью разобран в [4, следствие 8.1; 5, следствие 3.2.1; 6, теорема 7.2]. Результат теоремы 1 перекликается с исследованиями по двойственному описанию нижних огибающих из работ [9–11] и многих последующих, если рассматривать нижнюю субгармоническую огибающую для функции $M + m - u$ в предположении локальной ограниченности функции u снизу, поскольку в этих работах всегда рассматривались нижние субгармонические огибающие исключительно для локально ограниченных сверху функций. Но в наиболее актуальном для дальнейших применений варианте $u = \ln|f|$, где f — *голоморфная на области* $D \subset \mathbb{C}$ *функция хотя бы с одним корнем,* функция $\ln|f|$ не ограничена снизу в окрестностях корней.

2. Двойственное описание огибающей относительно выпуклого конуса в проективном пределе векторных решеток

Упорядоченное векторное пространство $(X, \leqslant)$ над $\mathbb{R}$ с отношением порядка $\leqslant$, рефлексивным, антисимметричным и транзитивным, называется *векторной решеткой,* если для любого *конечного* $F \subset X$ существует *точная верхняя грань* в X, обозначаемая далее как $X\text{-}\sup F \in X$ (подробнее в [7; 8]).

Множество всех функций $f\colon X \to Y$, действующих из X в Y с областью определения на всем X, обозначаем далее через Y^X. Для векторных решеток X и Y через $\mathsf{lin}^+ Y^X$ обозначаем *выпуклый конус линейных положительных,* или *возрастающих, функций* $l\colon X \to Y$. Другими словами, $l \in \mathsf{lin}^+ Y^X$, если для любого положительного в X вектора x вектор $l(x)$ положительный в Y.

Пусть $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ — последовательность *векторных решеток* X_n с отношениями порядка соответственно $\leqslant_n$, т. е. последовательность пар $(X_n, \leqslant_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Ей соответствует произведение

$$\prod X_n := \prod_{n=0}^{\infty} X_n,$$

для которого при $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \prod X_n$ полагаем $\mathsf{pr}_n x = x_n \in X_n$ — *проекция* вектора $x \in \prod X_n$ на пространство X_n. По определению $x \leqslant x'$ в $\prod X_n$, если $\mathsf{pr}_n x \leqslant_n \mathsf{pr}_n x'$ для каждого $n \in \mathbb{N}_0$.

Пусть $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ — последовательность линейных положительных функций $p_n \in \mathsf{lin}^+ X_n^{X_{n+1}}$ из X_{n+1} в X_n, $n \in \mathbb{N}_0$, для которой предполагаем *сохранение точной верхней грани для конечных подмножеств,* а именно:

$$X_n\text{-}\sup p_n(F_{n+1}) = p_n\big(X_{n+1}\text{-}\sup F_{n+1}\big)$$

для каждого конечного $F_{n+1} \subset X_{n+1}$. Тогда следующее подпространство в произведении $\prod X_n$, обозначаемое как

$$X := \operatorname{pr}\lim X_n p_n := \Big\{ x \in \prod X_n \;\Big|\; \operatorname{pr}_n x = p_n(\operatorname{pr}_{n+1} x) \; \forall n \in \mathbb{N}_0 \Big\},$$

с тем же отношением порядка $\leqslant$, что и на $\prod X_n$, — векторная решетка, называемая *проективным пределом последовательности* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *векторных решеток по* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Не умаляя общности, можно считать [4, предложение 3.1; 5, предложение 2.1.1], что

$$\operatorname{pr}_n X := \big\{ \operatorname{pr}_n x \;\big|\; x \in X \big\} = X_n \quad \text{для любого } n \in \mathbb{N}_0,$$

т. е. проекции pr_n из проективного предела $X = \operatorname{pr}\lim X_n p_n$ на X_n *сюръективны.*

Подмножество $B \subset X$ *ограничено снизу (сверху) в* X, если существует вектор $x \in X$, для которого $x \leqslant b$ (соответственно $b \leqslant x$) для всех $b \in B$ и B *ограничено в* X, если B ограничено и снизу, и сверху.

Теорема A [4, теорема 2, следствия 6.1 и 3.1; 5, теорема 2.4.1, следствия 2.4.1 и 2.1.1]. *Пусть* $H \subset X := \operatorname{pr}\lim X_n p_n$ *— выпуклый конус с вершиной в нуле, а для любой ограниченной в* X *последовательности* $\big(h^{(k)}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ *векторов* $h^{(k)} \in H$ *существует принадлежащий* H *верхний предел*

$$\limsup_{k\to\infty} h^{(k)} := \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant n} h^{(k)} \in H. \tag{2.1}$$

Пусть $S \subset X$ *— векторное подпространство, содержащее* H, *и при каждом* $n \in \mathbb{N}_0$ *для любого* $s_n \in \operatorname{pr}_n S$ *найдется такое* $h_n \in \operatorname{pr}_n H$, *что* $h_n \leqslant_n s_n$.

Пусть выбрана линейная положительная функция $q_0 \in \operatorname{lin}^+\mathbb{R}^{X_0}$ *на* X_0, *и для суперпозиции*

$$q := q_0 \circ \operatorname{pr}_0 \in \operatorname{lin}^+\mathbb{R}^X \tag{2.2}$$

при любой убывающей в X *последовательности* $(h^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ *с* $h^{(k)} \in H$ *при условии конечности*

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} q(h^{(k)}) \in \mathbb{R} \tag{2.3}$$

эта последовательность $(h^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ *ограничена снизу в* X *и*

$$q\big(\inf_{k\in\mathbb{N}} h^{(k)}\big) \geqslant \inf_{k\in\mathbb{N}} q(h^{(k)}). \tag{2.4}$$

Тогда для каждого $s \in S$ *величина*

$$\sup\big\{ q(h) \;\big|\; H \ni h \leqslant s \big\} \in \overline{\mathbb{R}} \tag{2.5}$$

равна величине

$$\inf\Big\{ (l_n \circ \operatorname{pr}_n)(s) \;\Big|\; n \in \mathbb{N}_0, l_n \in \operatorname{lin}^+\mathbb{R}^{\operatorname{pr}_n S}, q(h) \leqslant (l_n \circ \operatorname{pr}_n)(h) \; \forall h \in H \Big\} \in \overline{\mathbb{R}}. \tag{2.6}$$

В частности, если при заданном $s \in S$ *величина* (2.6) *не равна* $-\infty$, *то не равна* $-\infty$ *величина* (2.5) *и, следовательно, найдется вектор* $h \in H$, *огибающий снизу* s *в том смысле, что* $h \leqslant s$.

3. Доказательство достаточности в теореме 1

Сведем рассмотрение достаточности в теореме 1 к теореме A. Для этого выберем *исчерпание области* $D \subset \mathbb{R}^d$ последовательностью $(D_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ областей $D_n \subset \mathbb{R}^d$, для которого $\overline{B}_o(r) \subset D_0$, *замыкание* $\operatorname{clos} D_n$ области D_n содержится в области D_{n+1} при каждом $n \in \mathbb{N}_0$, т. е.

$$D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} D_n, \quad \overline{B}_o(r) \subset \operatorname{clos} D_n \subset D_{n+1} \quad \text{при всех } n \in \mathbb{N}_0.$$

Для $n \in \mathbb{N}_0$ рассмотрим пространство $X_n := L^1(\operatorname{clos} D_n)$ суммируемых на $\operatorname{clos} D_n$ по $\mathfrak{m}_d$ функций с отношением поточечного предпорядка $\leqslant_n^{a.e.}$, факторизацию которого по отношению $=^{a.e.}$ обозначим через X_n, где $\leqslant_n^{a.e.}$ уже отношение порядка. В качестве линейных положительных функций $p_n \in \operatorname{lin}^+ X_n^{X_{n+1}}$ выберем *сужения «функций» из* X_{n+1} *на* $\operatorname{clos} D_{n+1}$, которые становятся уже векторами из X_n. Проективный предел $\operatorname{pr}\lim X_n p_n$ здесь — это факторизованное по отношению $=^{a.e.}$ пространство локально суммируемых на D по $\mathfrak{m}_d$ функций с отношением порядка $\leqslant^{a.e.}$, которое обозначаем через $L^1_{\mathrm{loc}}(D)$. В качестве выпуклого конуса $H \subset L^1_{\mathrm{loc}}(D)$ выберем выпуклый конус

$$H := \operatorname{sbh}_*(D) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(D). \tag{3.1}$$

Полунепрерывная сверху регуляризация верхнего предела последовательности субгармонических функций на области, если этот верхний предел не равен $-\infty$, с одной стороны, дает субгармоническую функцию, а с другой — отличается от верхнего предела разве что на множестве нулевой $\mathfrak{m}_d$-меры, и даже полярном [1; 2]. Поэтому для этого конуса $H = \mathsf{sbh}_*(D)$ выполнено условие теоремы A, завершающееся равенством и принадлежностью к H из соотношений (2.1). Положим

$$S := C(D) + H - H = C(D) + \mathsf{sbh}_*(D) - \mathsf{sbh}_*(D) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(D) \tag{3.2}$$

— векторное подпространство в $L^1_{\mathrm{loc}}(D)$. Пусть $s_n \in \mathsf{pr}_n S$, т. е. $s_n = g_n + h_n - h'_n$, где g_n — непрерывная функция из $C(\operatorname{\mathsf{clos}} D_n)$, а функции $h_n \in \mathsf{pr}_n H$ и $h'_n \in \mathsf{pr}_n H$ — сужения на $\operatorname{\mathsf{clos}} D_n$ функций из выпуклого конуса $H = \mathsf{sbh}_*(D)$ из (3.1). Тогда существуют *положительные числа* c и c', для которых $g_n \geqslant -c$ на $\operatorname{\mathsf{clos}} D_n$ и $h'_n \leqslant_n c'$ на $\operatorname{\mathsf{clos}} D_n$. Следовательно, $h_n - c - c' \leqslant_n s_n$, где $h_n \in \mathsf{pr}_n H$, а также постоянная $-c - c' \in \mathbb{R}$ принадлежит $\mathsf{pr}_n H$, поскольку каждая постоянная — субгармоническая функция. Таким образом, выполнены условия теоремы A для выбранного в (3.2) подпространства $S \subset L^1_{\mathrm{loc}}(D)$.

В качестве линейной положительной функции $q_0 \in \mathsf{lin}^+ \mathbb{R}^{X_0}$ в теореме A выберем сужение меры $\mathfrak{m}_d$ на $\overline{B}_o(r)$ в том смысле, что

$$q_0(f_0) := \int_{\overline{B}_o(r)} f_0 \, d\mathfrak{m}_d \in \mathbb{R} \quad \text{для всех } f_0 \in X_0 = \mathsf{pr}_0 L^1_{\mathrm{loc}}(D) = L^1(\operatorname{\mathsf{clos}} D). \tag{3.3}$$

При таком выборе q_0 линейная положительная функция q, определенная в (2.2), действует по правилу

$$q(f) = \int_{\overline{B}_o(r)} f \, d\mathfrak{m}_d \in \mathbb{R} \quad \text{для всех } f \in L^1_{\mathrm{loc}}(D). \tag{3.4}$$

Функция $u\colon D \to \overline{\mathbb{R}}$ *почти субгармоническая* на D, если она почти всюду совпадает с некоторой субгармонической функцией на D [12]. Для *произвольной убывающей почти всюду последовательности* $(h^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ почти субгармонических на D функций $h^{(k)}$ условие (2.3) согласно (3.4) означает, что

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \int_{\overline{B}_o(r)} h^{(k)} \, d\mathfrak{m}_d = \inf_{k\in\mathbb{N}} q(h^{(k)}) \in \mathbb{R}, \tag{3.5}$$

т. е. точная нижняя грань левой части (3.5) *конечна.* Отсюда предел этой последовательности дает почти субгармоническую функцию на D, т. е. это верно для убывающей последовательности $(h^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ из конуса $H = \mathsf{sbh}_*(D)$. Верхний предел (2.1) убывающей последовательности — это точная нижняя грань этой последовательности. Поэтому для последовательностей $(h^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ при условии (3.5) получаем

$$-\infty \neq \inf_{k\in\mathbb{N}} h^{(k)} \in H = \mathsf{sbh}_*(D).$$

В частности, при условии (3.5) убывающая последовательность $(h^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ из H, очевидно, ограниченная сверху функцией $h^{(1)}$, ограничена и снизу функцией

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} h^{(k)} \in H.$$

При этом можем считать все функции $h^{(k)}$ полунепрерывными сверху. Для убывающей последовательности таких функций $\inf_{k\in\mathbb{N}}$ можно внести под знак интеграла:

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \int_{\overline{B}_o(r)} h^{(k)} \, d\mathfrak{m}_d = \int_{\overline{B}_o(r)} \inf_{k\in\mathbb{N}} h^{(k)} \, d\mathfrak{m}_d.$$

Согласно (3.5) это означает выполнение равенства

$$q\bigl(\inf_{k\in\mathbb{N}} h^{(k)}\bigr) = \inf_{k\in\mathbb{N}} q(h^{(k)}) \quad \text{для } q := q_0 \circ \mathsf{pr}_0,$$

что даже сильнее соответствующего неравенства (2.4). Тем самым выполнены все требуемые условия теоремы A и можем приступить к трактовке равных друг другу величин (2.5) и (2.6) для проективного предела векторных решеток $L^1_{\mathrm{loc}}(D)$ и конуса (3.1) при условии (1.4) теоремы 1. Теперь, если из условия (1.4) теоремы 1 выведем, что величина (2.6) с учетом (3.2) и (3.1) для функции

$$s := m + M - u \in S := C(D) + H - H = C(D) + \mathsf{sbh}_*(D) - \mathsf{sbh}_*(D) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(D), \tag{3.6}$$

не равна $-\infty$, то по заключительной части теоремы A это будет означать, что найдется некоторая функция $h \in H = \mathsf{sbh}_*(D)$, для которой $h \leqslant^{a.e.} s = m + M - u$ на D, или, в эквивалентной форме, $u + h \leqslant^{a.e.} m + M$ на D. Отсюда в силу субгармоничности функций u, h, M [1],[2] и непрерывности функции m легко следует, что $u + h \leqslant m + M$ *всюду на* D, что и дает требуемое неравенство (1.3).

Осталось показать, что при условии (1.4) теоремы 1, записанном в равносильной форме как

$$\inf_{\mu\in J^r_o(D)} \left(\int_D (m+M) \, d\mu - \int_D u \, d\mu \right) > -\infty, \tag{3.7}$$

величина (2.6) не равна $-\infty$.

Точную нижнюю грань в (2.6) для функции $s := m + M - u$ из (3.6) можно записать как

$$\inf\Big\{(l_n \circ \mathsf{pr}_n)(m+M) - (l_n \circ \mathsf{pr}_n)(u) \;\Big|\; n \in \mathbb{N}_0, l_n \in \mathsf{lin}^+\mathbb{R}^{\mathsf{pr}_n S}, q(h) \leqslant (l_n \circ \mathsf{pr}_n)(h), h \in H\Big\}. \tag{3.8}$$

При каждом фиксированном $n \in \mathbb{N}_0$ здесь l_n пробегают часть $\mathsf{lin}^+\mathbb{R}^{\mathsf{pr}_n S}$ для подпространства $S = C(D) + H - H$ из (3.2). Тогда обязательно $l_n \in \mathsf{lin}^+\mathbb{R}^{\mathsf{pr}_n C(D)} = \mathsf{lin}^+\mathbb{R}^{C(\mathsf{clos}\, D_n)}$, откуда по теореме Рисса l_n на $C(\mathsf{clos}\, D_n)$ реализуется на пространстве $C(\mathsf{clos}\, D_n)$ как некоторая положительная конечная мера Бореля μ на D с компактным носителем в $\mathsf{clos}\, D_n$. Требование из (2.6) вида $q(h) \leqslant (l_n \circ \mathsf{pr}_n)(h)$ при всех $h \in H$ для $q = q_0 \circ \mathsf{pr}_0$ согласно (3.3) в терминах меры μ можно записать как требование

$$\int_{\overline{B}_o(r)} h \,\mathrm{d}\mathfrak{m}_d \leqslant \int_D h \,\mathrm{d}\mu \quad \text{при всех } h \in H \cap C(D) \tag{3.9}$$

из определения класса $J_o^r(D)$ в (1.2), поскольку мера $\mu \geqslant 0$ с компактным носителем в D продолжается однозначно на все субгармонические функции, которые становятся μ-интегрируемыми ввиду возможности представить их как предел убывающей последовательности непрерывных субгармонических на D функций. Это, в частности, влечет за собой конечность интегралов

$$\int_D h \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R} \quad \text{для всех } h \in H = \mathsf{sbh}_*(D).$$

Следовательно, полученные таким образом меры $\mu \in \mathsf{Meas}_0^+(D)$, удовлетворяющие (3.9), корректно определены и принимают конечные значения на выпуклом конусе

$$C(D) + H = C(D) + \mathsf{sbh}_*(D) \supset \mathsf{sbh}_*(D).$$

В частности, функции из $C(D) + H$ суммируемы по мерам $\mu \in \mathsf{Meas}_0^+(D)$, удовлетворяющим (3.9), а неравенство (3.9) верно для всех функций $h \in \mathsf{sbh}_*(D)$. Более того, это означает, что действие на $C(D) + H$ функций $l_n \in \mathsf{lin}^+\mathbb{R}^{\mathsf{pr}_n S}$, удовлетворяющих неравенству $q(h) \leqslant (l_n \circ \mathsf{pr}_n)(h)$ для всех $h \in H$, при рассматриваемых конкретных выборах S как в (3.2), проекций pr_n как сужений на $\mathsf{clos} D_n$ и q как в (3.4), может быть реализовано в виде меры $\mu \in \mathsf{Meas}_0^+(D)$ с носителем в $\mathsf{clos}\, D_n$, удовлетворяющей (3.9), но уже при всех $h \in H = \mathsf{sbh}\,(D)$. Другими словами, класс таких мер в действиях на $C(D) + H$ не уже класса функций $l_n \in \mathsf{lin}^+\mathbb{R}^{\mathsf{pr}_n S}$, участвующих в определении точной нижней грани (3.8). Отсюда сразу следует, что точная нижняя грань в (3.8) не меньше точной нижней грани в (3.7), которая не равна $-\infty$. Следовательно, и точная нижняя грань в (3.8) не равна $-\infty$, что завершает доказательство достаточности в теореме 1.

Литература

[1] Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. Москва: Мир, 1980. 304 с. URL: https://reallib.org/reader?file=470623&ysclid=lnu0g73fzc327282140.

[2] Hörmander L. Notions of Convexity. Boston: Birkhäser, 1994. 416 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4585-4.

[3] Эванс Л.К., Гариепи К.Ф. Теория меры и тонкие свойства функции. Новосибирск: Научная книга (ИДМИ), 2002. 215 с. URL: https://djvu.online/file/NMAz58Vqw6Mi0?ysclid=lnu2ktxq8v26436524.

[4] Хабибуллин Б. Н., Розит А. П., Хабибуллина Э. Б. Порядковые версии теоремы Хана–Банаха и огибающие. II. Применения в теории функций // Комплексный анализ. Математическая физика. Итоги науки и техн. Сер.: Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. Москва: ВИНИТИ РАН, 2019. Т. 162. С. 93–135. URL: https://www.mathnet.ru/rus/into445.

[5] Хабибуллин Б. Н. Огибающие в теории функций. Уфа: РИЦ БашГУ, 2021. 140 с. URL: https://elib.bashedu.ru/dl/local/HabibullinBN_Ogib.v teor.funkci_mon_2021.pdf.

[6] Хабибуллин Б. Н. Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. II // Известия Российской Академии наук. Сер.: Математическая. 2001. Т. 65, № 5. С. 167–190. DOI: https://doi.org/10.4213/im361.

[7] Кутателадзе С. С., Рубинов А. М. Двойственность Минковского и ее приложения. Новосибирск: Наука, 1976. 254 с. URL: https://reallib.org/reader?file=443532&ysclid=lnu44io64k482315117.

[8] Акилов Г. П., Кутателадзе С. С. Упорядоченные векторные пространства. Новосибирск: Наука, 1978. 368 с. URL: https://reallib.org/reader?file=579705&ysclid=lnu4722y87509586531.

[9] Bu S., Schachermayer W. Approximation of Jensen Measures by Image Measures under Holomorphic Functions and Applications // Transactions of the American Mathematical Society. 1992. Vol. 331, Issue 2. Pp. 585–608. DOI: http://dx.doi.org/10.2307/2154129.

[10] Poletsky E. A. Disk envelopes of functions, II // Journal of Functional Analysis. 1999. Vol. 163, Issue 1. Pp. 111–132. DOI: https://doi.org/10.1006/jfan.1998.3378.

[11] Cole B. J., Ransford T. J. Subharmonicity without Upper Semicontinuity // Journal of Functional Analysis. 1997. Vol. 147. Issue 2. Pp. 420–442. DOI: https://doi.org/10.1006/jfan.1996.3070.

[12] Arsove M. G. Functions representable as differences of subharmonic functions // Transactions of the American Mathematical Society. 1953. Vol. 75. Pp. 327–365. DOI: https://doi.org/10.2307/1990736.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-3-64-71

Submited: 03.08.2023
Revised: 06.09.2023
Accepted: 30.10.2023

B.N. Khabibullin
Institute of Mathematics with Computing Centre,
Ufa Federal Research Center
of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russian Federation
E-mail: khabib-bulat@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1308-4461

SUBHARMONIC ENVELOPES FOR FUNCTIONS ON DOMAINS[3]

ABSTRACT

One of the most common problems in various fields of real and complex analysis is the questions of the existence and construction for a given function of an envelope from below or from above of a function from a special class H. We consider a case when H is the convex cone of all subharmonic functions on the domain D of a finite-dimensional Euclidean space over the field of real numbers. For a pair of subharmonic functions u and M from this convex cone H, dual necessary and sufficient conditions are established under which there is a subharmonic function $h \not\equiv -\infty$, "dampening the growth" of the function u in the sense that the values of the sum of $u + h$ at each point of D is not greater than the value of the function M at the same point. These results are supposed to be applied in the future to questions of non-triviality of weight classes of holomorphic functions, to the description of zero sets and uniqueness sets for such classes, to approximation problems of the function theory, etc.

Key words: subharmonic function; lower envelope; ordered space; vector lattice; projective limit; linear balayage; Jensen measure; holomorphic function.

Citation. Khabibullin B.N. Subharmonic envelopes for functions on domains. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 3, pp. 64–71. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-3-64-71. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: author and reviewers declare no conflict of interests.

Bulat N. Khabibullin — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, chief researcher of the Department of Theory of Functions and Functional Analysis, Institute of Mathematics with Computing Center, Ufa Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences, 112, Chernyshevsky Street, Ufa, 450008, Russian Federation.

References

[1] Hayman W.K., Kennedy P.B. Subharmonic functions. Volume 1. Moscow: Mir, 1994, 304 p. (In Russ.)

[2] Hörmander L. Notions of Convexity. Boston: Birkhäser, 1994. 416 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4585-4.

[3] Evans L.C., Gariepy R.F. Measure Theory and Fine Properties of Functions. Novosibirsk: Nauchnaya kniga (IDMI), 2002, 215 p. Available at: https://djvu.online/file/NMAz58Vqw6Mi0?ysclid=lnu2ktxq8v26436524. (In Russ.)

[3]The work was carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (scientific topic code FMRS-2022-0124)

[4] Khabibullin B.N., Rozit A.P., Khabibullina E.B. Order versions of the Hahn-Banach theorem and envelopes. II. Applications to the function theory, In: *Complex Analysis. Mathematical Physics, Itogi Nauki i Tekhniki, Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz.*. Moscow: VINITI RAN, 2019, vol. 162, pp. 93–135. Available at: https://www.mathnet.ru/rus/into445. (In Russ.)

[5] Khabibullin B.N. Envelopes in the function theory. Ufa: RITs BashGU, 2021, 140 p. Available at: https://elib.bashedu.ru/dl/local/HabibullinBN_Ogib.v teor.funkci_mon_2021.pdf. (In Russ.)

[6] Khabibullin B.N. Dual representation of superlinear functionals and its applications in function theory. II. *Izvestiya: Mathematics*, 2001, vol. 65, issue 5, pp. 1017–1039. DOI: https://doi.org/10.1070/IM2001v065n05ABEH000361. (In English; original in Russian)

[7] Kutateladze S.S., Rubinov A.M. Minkowski duality and its applications. Novosibirsk: Nauka, 1976, 254 p. Available at: https://reallib.org/reader?file=443532&ysclid=lnu44io64k482315117. (In Russ.)

[8] Akilov G.P., Kutateladze S.S. Ordered vector spaces. Novosibirsk: Nauka, 1978, 368 p. Available at: https://reallib.org/reader?file=579705&ysclid=lnu4722y87509586531. (In Russ.)

[9] Bu S., Schachermayer W. Approximation of Jensen measures by image measures under holomorphic functions and applications. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1992, vol. 331, issue 2, pp. 585–608. DOI: http://dx.doi.org/10.2307/2154129.

[10] Poletsky E.A. Disk envelopes of functions, II. *Journal of Functional Analysis*, 1999, vol. 163, issue 1, pp. 111–132. DOI: https://doi.org/10.1006/jfan.1998.3378.

[11] Cole B.J., Ransford T.J. Subharmonicity without Upper Semicontinuity. *Journal of Functional Analysis*, 1997, vol. 147, issue 2, pp. 420–442. DOI: https://doi.org/10.1006/jfan.1996.3070.

[12] Arsove M.G. Functions representable as differences of subharmonic functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1953, vol. 75, pp. 327–365. DOI: https://doi.org/10.2307/1990736.