 Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-3-37-56

УДК 517.588; 517.589

Дата: поступления статьи: 12.07.2023
после рецензирования: 15.08.2023
принятия статьи: 30.10.2023

С.В. Подклетнова
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: podkletnova.sv@ssau.ru. ORCID: https://orcid.org/0009-0005-7849-2513

РЕКУРРЕНТНЫЕ ТОЖДЕСТВА ДЛЯ ДВУХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ТИПА

АННОТАЦИЯ

В статье представлены вывод и доказательства тождеств типа тождеств Гаусса для двух известных функций гипергеометрического типа. Для вывода и обоснования формул используются представление функций в виде ряда, а также интегральное представление рассматриваемых функций. Используются определение и свойства гамма- и бета-функций, гипергеометрической функции Гаусса, а также известные тождества для них. Гипергеометрические функции широко используются при решении различных типов дифференциальных уравнений. Наличие тождеств, связывающих функции, участвующих в результирующих формулах решений, значительно упрощает как итоговые формулы, так и промежуточные вычисления во многих задачах, связанных с решением уравнений гиперболического, эллиптического и смешанного типов.

Ключевые слова: специальные функции; гамма-функция; бета-функция; функция Гаусса; тождество; гипергеометрическая функция; формула; решение.

Цитирование. Подклетнова С.В. Рекуррентные тождества для двух специальных функций гипергеометрического типа // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2023. Т. 29, № 3. С. 37–56. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-3-37-56.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Светлана Владимировна Подклетнова — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

1. Предварительные сведения

Рассмотрим некоторые функции и их свойства, которые понадобятся в этой статье.

Определение 1. Функция вида $\int\limits_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$, где $a>0$, называется гамма-функцией от параметра a или эйлеровым интегралом второго рода [1; 4; 7]:

$$\Gamma(a)=\int\limits_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx. \tag{1.1}$$

В настоящей статье мы будем использовать известное свойство эйлерова интеграла второго рода, называемое первым функциональным уравнением [1; 4; 7]:

$$\Gamma\left(a+1\right)=a\cdot\Gamma\left(a\right). \tag{1.2}$$

Определение 2. Интеграл вида $\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$, где $a>0$, $b>0$, называется бета-функцией или эйлеровым интегралом первого рода [1; 4; 7]:

$$\mathrm{B}\left(a,b\right)=\int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx. \tag{1.3}$$

Ниже нами будут использованы следующие свойства бета-функции [1; 4; 7]:

$$\mathrm{B}\left(a+1,b\right)=\frac{a}{a+b}\mathrm{B}\left(a,b\right). \tag{1.4}$$

$$\mathrm{B}\left(a,b+1\right)=\frac{b}{a+b}\mathrm{B}\left(a,b\right). \tag{1.5}$$

а также формула связи бета- и гамма-функций [1; 4; 7]:

$$\mathrm{B}\left(a,b\right)=\frac{\Gamma\left(a\right)\cdot\Gamma\left(b\right)}{\Gamma\left(a+b\right)}, a>0, b>0. \tag{1.6}$$

Определение 3. Функция

$$F\left(a,b;c;z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n\cdot(b)_n}{(c)_n\cdot n!}\cdot z^n, \tag{1.7}$$

где $|z|<1$, параметры a, b и c принадлежат пространству действительных чисел, параметр c отличен от нуля и целых отрицательных чисел, называется гипергеометрической функцией Гаусса [1; 4; 6].

Здесь

$$(\alpha)_n=\alpha\cdot(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n-1) \tag{1.8}$$

является символом Похгаммера [5] или убывающим факториалом,

$$n!=1\cdot2\cdot\ldots\cdot n. \tag{1.9}$$

Ниже нам понадобятся следующие рекуррентные формулы Гаусса, связывающие значения гипергеометрической функции Гаусса с различными параметрами [4]:

1. $\gamma\left[\gamma-1-\left(2\gamma-\alpha-\beta-1\right)z\right]F\left(\alpha,\beta;\gamma;z\right)+\left(\gamma-\alpha\right)\left(\gamma-\beta\right)zF\left(\alpha,\beta;\gamma+1;z\right)+$
$+\gamma\left(\gamma-1\right)\left(z-1\right)F\left(\alpha,\beta;\gamma-1;z\right)=0.$
2. $\left(2\alpha-\gamma-\alpha z+\beta z\right)F\left(\alpha,\beta;\gamma;z\right)+\left(\gamma-\alpha\right)F\left(\alpha-1,\beta;\gamma;z\right)+\alpha\left(z-1\right)F\left(\alpha+1,\beta;\gamma;z\right)=0.$
3. $\left(2\beta-\gamma-\beta z+\alpha z\right)F\left(\alpha,\beta;\gamma;z\right)+\left(\gamma-\beta\right)F\left(\alpha,\beta-1;\gamma;z\right)+\beta\left(z-1\right)F\left(\alpha,\beta+1;\gamma;z\right)=0.$
4. $\gamma F\left(\alpha,\beta-1;\gamma;z\right)-\gamma F\left(\alpha-1,\beta;\gamma;z\right)+\left(\alpha-\beta\right)zF\left(\alpha,\beta;\gamma+1;z\right)=0.$
5. $\gamma\left(\alpha-\beta\right)F\left(\alpha,\beta;\gamma;z\right)-\alpha\left(\gamma-\beta\right)F\left(\alpha+1,\beta;\gamma+1;z\right)+\beta\left(\gamma-\alpha\right)F\left(\alpha,\beta+1;\gamma+1;z\right)=0.$
6. $\gamma\left(\gamma+1\right)F\left(\alpha,\beta;\gamma;z\right)-\gamma\left(\gamma+1\right)F\left(\alpha,\beta;\gamma+1;z\right)-\alpha\beta zF\left(\alpha+1,\beta+1;\gamma+2;z\right)=0.$
7. $\gamma F\left(\alpha,\beta;\gamma;z\right)-\left(\gamma-\alpha\right)F\left(\alpha,\beta+1;\gamma+1;z\right)-\alpha\left(1-z\right)F\left(\alpha+1,\beta+1;\gamma+1;z\right)=0.$
8. $\gamma F\left(\alpha,\beta;\gamma;z\right)+\left(\beta-\gamma\right)F\left(\alpha+1,\beta;\gamma+1;z\right)-\beta\left(1-z\right)F\left(\alpha+1,\beta+1;\gamma+1;z\right)=0.$
9. $\gamma\left(\gamma-\beta z-\alpha\right)F\left(\alpha,\beta;\gamma;z\right)-\gamma\left(\gamma-\alpha\right)F\left(\alpha-1,\beta;\gamma;z\right)+\alpha\beta z\left(1-z\right)F\left(\alpha+1,\beta+1;\gamma+1;z\right)=0.$
10. $\gamma\left(\gamma-\alpha z-\beta\right)F\left(\alpha,\beta;\gamma;z\right)-\gamma\left(\gamma-\beta\right)F\left(\alpha,\beta-1;\gamma;z\right)+\alpha\beta z\left(1-z\right)F\left(\alpha+1,\beta+1;\gamma+1;z\right)=0.$
11. $\gamma F\left(\alpha,\beta;\gamma;z\right)-\gamma F\left(\alpha,\beta+1;\gamma;z\right)+\alpha z\left(1-z\right)F\left(\alpha+1,\beta+1;\gamma+1;z\right)=0.$
12. $\gamma F\left(\alpha,\beta;\gamma;z\right)-\gamma F\left(\alpha+1,\beta;\gamma;z\right)+\beta z\left(1-z\right)F\left(\alpha+1,\beta+1;\gamma+1;z\right)=0.$
13. $\gamma\left[\alpha-\left(\gamma-\beta\right)z\right]F\left(\alpha,\beta;\gamma;z\right)-\alpha\gamma\left(1-z\right)F\left(\alpha+1,\beta;\gamma;z\right)+\left(\gamma-\alpha\right)\left(\gamma-\beta\right)zF\left(\alpha,\beta;\gamma+1;z\right)=0.$

14. $\gamma\left[\beta-(\gamma-\alpha)z\right]F(\alpha,\beta;\gamma;z)-\beta\gamma(1-z)F(\alpha,\beta+1;\gamma;z)+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)zF(\alpha,\beta;\gamma+1;z)=0.$

15. $\gamma(\gamma+1)F(\alpha,\beta;\gamma;z)-\gamma(\gamma+1)F(\alpha,\beta+1;\gamma+1;z)+\alpha(\gamma-\beta)zF(\alpha+1,\beta+1;\gamma+2;z)=0.$

16. $\gamma(\gamma+1)F(\alpha,\beta;\gamma;z)-\gamma(\gamma+1)F(\alpha+1,\beta;\gamma+1;z)+\beta(\gamma-\alpha)zF(\alpha+1,\beta+1;\gamma+2;z)=0.$

17. $\gamma F(\alpha,\beta;\gamma;z)-(\gamma-\beta)F(\alpha,\beta;\gamma+1;z)-\beta F(\alpha,\beta+1;\gamma+1;z)=0.$

18. $\gamma F(\alpha,\beta;\gamma;z)-(\gamma-\alpha)F(\alpha,\beta;\gamma+1;z)-\alpha F(\alpha+1,\beta;\gamma+1;z)=0.$

Определение 4. Функция

$$ {}_3F_2(a,b,c;d,e;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n\cdot(b)_n(c)_n}{(d)_n(e)_n\cdot n!}\cdot z^n, \tag{1.10}$$

где $|z|<1$, параметры a, b, c, d и e принадлежат пространству действительных чисел, причём параметры d и e отличны от нуля и целых отрицательных чисел, называется функцией ${}_3F_2$ или функцией Клаузена [4; 6; 10]. Заметим, что функция ${}_3F_2$ широко применима при исследовании уравнений движения в практических задачах [5].

Определение 5. Функция вида $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n\left(\beta'\right)_m(\delta)_n}{(\gamma)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^ny^m$, где $|x|<1,\ y<1$, параметры α, β, β', δ, γ и δ' принадлежат пространству действительных чисел, а параметры γ и δ' отличны от нуля и целых отрицательных чисел, называется гипергеометрической функцией R_1 двух аргументов [3]:

$$R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^ny^m. \tag{1.11}$$

Указанная функция появляется в результате решения некоторых краевых задач.

Функция R_1 связана с гипергеометрической функцией Гаусса соотношением [3]:

$$R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n(\delta)_n}{(\gamma)_n(\delta')_n n!}x^nF(\alpha+n,\beta';\gamma+n;y). \tag{1.12}$$

Если $\gamma>\alpha>0$, то справедливо интегральное выражение [3]:

$$R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)=\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\gamma-\alpha)}\int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-yt)^{-\beta'}F(\beta,\delta;\delta';xt)\,dt. \tag{1.13}$$

Функции Клаузена и R_1 связывает формула [3]:

$$R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,1)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta')}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta')}\,{}_3F_2(\alpha,\beta,\delta;\delta',\gamma-\beta';x), \tag{1.14}$$

справедливая при $\gamma-\alpha-\beta'>0$.

2. Рекуррентные тождества для функции R_1

Суть решения задачи покажем на нескольких примерах. Для вывода первой части тождеств для функции R_1 была использована формула (1.12). Возьмём, например, последнюю из рекуррентных формул Гаусса:

$$cF(a,b;c;z)-(c-a)F(a,b;c+1;z)-aF(a+1,b;c+1;z)=0.$$

Чтобы привести гипергеометрические функции, участвующие в этой формуле, к тому виду, который функция Гаусса имеет в (1.12), обозначим

$$a=\alpha+n, b=\beta', c=\gamma+n, z=y. \tag{2.1}$$

Будем иметь:

$$(\gamma+n)F(\alpha+n,\beta';\gamma+n;y)-(\gamma-\alpha)F(\alpha+n,\beta';\gamma+n+1;y)-$$
$$-(\alpha+n)F(\alpha+n+1,\beta';\gamma+n+1;y)=0.$$

Умножим обе части полученного равенства на

$$\frac{1}{\gamma+n}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n(\delta)_n}{(\gamma)_n(\delta')_n n!}x^n \tag{2.2}$$

и просуммируем по n от нуля до бесконечности. В результате придем к следующему равенству:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n(\delta)_n}{(\gamma)_n(\delta')_n n!}x^n F(\alpha+n,\beta';\gamma+n;y)-$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\gamma-\alpha}{\gamma+n}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n(\delta)_n}{(\gamma)_n(\delta')_n n!}x^n F(\alpha+n,\beta';\gamma+n+1;y)-$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha+n}{\gamma+n}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n(\delta)_n}{(\gamma)_n(\delta')_n n!}x^n F(\alpha+n+1,\beta';\gamma+n+1;y)=0.$$

Воспользовавшись представлением (1.7), перепишем все функции Гаусса в последнем равенстве через суммы ряда. Получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n(\delta)_n}{(\gamma)_n(\delta')_n n!}x^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha+n)_m(\beta')_m}{(\gamma+n)_m m!}y^m-$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\gamma-\alpha}{\gamma+n}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n(\delta)_n}{(\gamma)_n(\delta')_n n!}x^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha+n)_m(\beta')_m}{(\gamma+n+1)_m m!}y^m-$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha+n}{\gamma+n}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n(\delta)_n}{(\gamma)_n(\delta')_n n!}x^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha+n+1)_m(\beta')_m}{(\gamma+n+1)_m m!}y^m=0.$$

Или

$$\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\alpha+n)_m(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma)_n(\gamma+n)_m(\delta')_n n!m!}x^n y^m-$$
$$-(\gamma-\alpha)\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\alpha+n)_m(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma)_n(\gamma+n)(\gamma+n+1)_m(\delta')_n n!m!}x^n y^m- \tag{2.3}$$
$$-\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\alpha+n)(\alpha+n+1)_m(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma)_n(\gamma+n)(\gamma+n+1)_m(\delta')_n n!m!}x^n y^m=0.$$

Отметим, что, согласуясь с формулой (1.8), можно упростить:

$$(\alpha)_n(\alpha+n)_m=\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)(\alpha+n)(\alpha+n+1)\ldots(\alpha+n+m-1)=(\alpha)_{n+m}, \tag{2.4}$$

$$(\alpha)_n(\alpha+n)(\alpha+n+1)_m=$$
$$=\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)(\alpha+n)(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)\ldots(\alpha+n+m)= \tag{2.5}$$
$$=\alpha(\alpha+1)_{n+m},$$

$$(\gamma)_n(\gamma+n)_m=\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)(\gamma+n)(\gamma+n+1)\ldots(\gamma+n+m-1)=(\gamma)_{n+m}, \tag{2.6}$$

$$(\gamma)_n(\gamma+n)(\gamma+n+1)_m=$$
$$=\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)(\gamma+n)(\gamma+n+1)(\gamma+n+2)\ldots(\gamma+n+m)= \tag{2.7}$$
$$=\gamma(\gamma+1)_{n+m}.$$

Подставим полученные выражения в равенство (2.3):

$$\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^n y^m-\frac{\gamma-\alpha}{\gamma}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma+1)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^n y^m-$$
$$-\frac{\alpha}{\gamma}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)_{n+m}(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma+1)_n(\delta')_n n!m!}x^n y^m=0.$$

Умножим обе части на γ и воспользуемся формулой (1.11), чтобы записать суммы, стоящие в левой части тождества, через функцию R_1. Получим рекуррентное тождество:

$$\gamma R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-$$
$$-(\gamma-\alpha)R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)- \tag{2.8}$$
$$-\alpha R_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)=0.$$

Чтобы проверить справедливость тождества (2.8), разложим каждую гипергеометрическую функцию в ряд по формуле (1.11):

$$\gamma\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^ny^m-(\gamma-\alpha)\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma+1)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^ny^m-$$

$$-\alpha\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)_{n+m}(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma+1)_n(\delta')_n n!m!}x^ny^m=0.$$

Отсюда

$$\sum_{n,m=0}^{\infty}\left(\frac{\gamma(\alpha)_{n+m}}{(\gamma)_{n+m}}-(\gamma-\alpha)\frac{(\alpha)_{n+m}}{(\gamma+1)_{n+m}}-\frac{\alpha(\alpha+1)_{n+m}}{(\gamma+1)_n}\right)\frac{(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n x^ny^m}{(\delta')_n n!m!}=0.$$

Левая часть уравнения равна нулю только в том случае, когда равно нулю каждое из выражений, стоящих в скобках при любых допустимых значениях n и m, то есть

$$\frac{\gamma(\alpha)_{n+m}}{(\gamma)_{n+m}}-(\gamma-\alpha)\frac{(\alpha)_{n+m}}{(\gamma+1)_{n+m}}-\frac{\alpha(\alpha+1)_{n+m}}{(\gamma+1)_n}=0.$$

Распишем все символы Похгаммера в левой части по формуле (1.8):

$$\frac{\gamma\alpha\,(\alpha+1)\,(\alpha+2)\,...\,(\alpha+n+m-1)}{\gamma\,(\gamma+1)\,(\gamma+2)\,...\,(\gamma+n+m-1)}-$$

$$-(\gamma-\alpha)\frac{\alpha\,(\alpha+1)\,(\alpha+2)\,...\,(\alpha+n+m-1)}{(\gamma+1)\,(\gamma+2)\,...\,(\gamma+n+m-1)\,(\gamma+n+m)}-$$

$$-\frac{\alpha\,(\alpha+1)\,(\alpha+2)\,...\,(\alpha+n+m-1)\,(\alpha+n+m)}{(\gamma+1)\,(\gamma+2)\,...\,(\gamma+n+m-1)\,(\gamma+n+m)}=0.$$

В первом слагаемом сократим общий множитель γ в числителе и знаменателе, затем вынесем за скобку общие множители в левой сумме:

$$\frac{\alpha\,(\alpha+1)\,(\alpha+2)\,...\,(\alpha+n+m-1)}{(\gamma+1)\,(\gamma+2)\,...\,(\gamma+n+m-1)}\left(1-\frac{\gamma-\alpha}{(\gamma+n+m)}-\frac{\alpha+n+m}{(\gamma+n+m)}\right)=0.$$

Очевидно, для того чтобы полученное тождество было справедливо, необходимо, чтобы выражение в скобках было тождественным нулем. Чтобы это проверить, приведем его к общему знаменателю и упростим полученный числитель:

$$\frac{\gamma+n+m-\gamma+\alpha-\alpha-n-m}{(\gamma+n+m)}=0.$$

Как видим, при любых допустимых значениях n, m и γ (напомним, что по определению функции R_1 параметр γ отличен от нуля и целых отрицательных чисел) последнее равенство, а значит и тождество (1.8), верно.

Вывод этого тождества достаточно прост, поскольку множители при функциях Гаусса в использованном рекуррентном тождестве не содержат независимой переменной. Попробуем теперь произвести те же действия, например, с четырнадцатым тождеством. Так же, как и раньше, воспользуемся обозначениями (2.1), умножим обе части тождества на (2.2) и просуммируем от нуля до бесконечности, затем представим функции Гаусса в виде рядов. В результате всех этих действий придём к следующему равенству:

$$[\beta'-(\gamma-\alpha)\,y]\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\alpha+n)_m(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma)_n(\gamma+n)_m(\delta')_n n!}x^ny^m-$$

$$-\beta'\,(1-y)\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\alpha+n)_m(\beta)_n(\beta'+1)_m(\delta)_n}{(\gamma)_n(\gamma+n)_m(\delta')_n n!}x^ny^m+ \tag{2.9}$$

$$+(\gamma-\alpha)\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\alpha+n)_m(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma)_n\,(\gamma+n)\,(\gamma+n+1)_m(\delta')_n n!}x^ny^m\,(\gamma+n-\beta')\,y=0.$$

Первые две суммы легко преобразуются с помощью формул (1.8) и (1.11). Рассмотрим отдельно последнее слагаемое из (2.5). Обозначим его через S и разобьем на две части следующим образом:

$$S=(\gamma-\alpha)\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\alpha+n)_m(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma)_n\,(\gamma+n)\,(\gamma+n+1)_m(\delta')_n n!m!}x^ny^m\,(\gamma+n-\beta')\,y=$$

$$=(\gamma-\alpha)\,(\gamma-\beta')\,y\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\alpha+n)_m(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma)_n\,(\gamma+n)\,(\gamma+n+1)_m(\delta')_n n!m!}x^ny^m+$$

$$+(\gamma-\alpha)\,y\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\alpha+n)_m(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n n}{(\gamma)_n\,(\gamma+n)\,(\gamma+n+1)_m(\delta')_n n!m!}x^ny^m.$$

Применим формулы (1.4) и (1.7), во второй сумме распишем суммирование по n:

$$S=\frac{(\gamma-\alpha)\,(\gamma-\beta')\,y}{\gamma}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma+1)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^ny^m+$$

$$+\frac{(\gamma-\alpha)\,y}{\gamma}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\beta')_m}{m!}y^m\left(0+\frac{(\alpha)_{1+m}(\beta)_1(\delta)_1}{(\gamma+1)_{1+m}(\delta')_1}x+\right.$$

$$\left.+\frac{(\alpha)_{2+m}(\beta)_2(\delta)_2 2}{(\gamma+1)_{2+m}(\delta')_2 2!}x^2+...+\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\delta)_n n}{(\gamma+1)_{n+m}(\delta')_n n!}x^n+...\right).$$

В первом слагаемом заменим сумму на соответствующее значение функции R_1 по формуле (1.11), во втором слагаемом вынесем за скобку, стоящую под знаком суммы, множитель $\frac{\alpha\beta\delta}{(\gamma+1)\delta'}x$, а затем произведем его упрощение:

$$S=\frac{(\gamma-\alpha)\,(\gamma-\beta')}{\gamma}yR_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)+$$

$$+(\gamma-\alpha)\,y\frac{\alpha\beta\delta}{\gamma\,(\gamma+1)\,\delta'}x\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)_m(\beta')_m}{(\gamma+2)_m m!}y^m\left(1+\frac{(\alpha+m+1)_1(\beta+1)_1(\delta+1)_1}{(\gamma+m+2)_1(\delta'+1)_1 1!}x+...+\right.$$

$$\left.+\frac{(\alpha+m+1)_{n-1}(\beta+1)_{n-1}(\delta+1)_{n-1}}{(\gamma+m+2)_{n-1}(\delta'+1)_{n-1}\,(n-1)!}x^{n-1}+\frac{(\alpha+m+1)_n(\beta+1)_n(\delta+1)_n}{(\gamma+m+2)_n(\delta'+1)_n n!}x^n+...\right)=$$

$$=\frac{(\gamma-\alpha)\,(\gamma-\beta')}{\gamma}yR_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)+$$

$$\frac{\alpha\beta\delta\,(\gamma-\alpha)}{\gamma\,(\gamma+1)\,\delta'}xy\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)_m(\beta')_m}{(\gamma+2)_m m!}y^m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+m+1)_n(\beta+1)_n(\delta+1)_n}{(\gamma+m+2)_n(\delta'+1)_n n!}x^n=$$

$$=\frac{(\gamma-\alpha)\,(\gamma-\beta')}{\gamma}yR_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)+$$

$$\frac{\alpha\beta\delta\,(\gamma-\alpha)}{\gamma\,(\gamma+1)\,\delta'}xy\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)_{n+m}(\beta+1)_n(\beta')_m(\delta+1)_n}{(\gamma+2)_{n+m}(\delta'+1)_n n!m!}x^ny^m=$$

$$=\frac{(\gamma-\alpha)\,(\gamma-\beta')}{\gamma}yR_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)+$$

$$\frac{\alpha\beta\delta\,(\gamma-\alpha)}{\gamma\,(\gamma+1)\,\delta'}xyR_1\,(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+2,\delta'+1;x,y)\,.$$

Подставив полученное выражение в формулу (2.9), умножим обе части на $(\gamma+1)\,\delta'$ и придем к рекуррентному тождеству:

$$\begin{gathered}\gamma\,(\gamma+1)\,\delta'\,[\beta'-(\gamma-\alpha)\,y]\,R_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-\\ -\gamma\beta'\delta'\,(\gamma+1)\,(1-y)\,R_1\,(\alpha,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma,\delta';x,y)+\\ +(\gamma-\alpha)\,(\gamma-\beta')\,(\gamma+1)\,\delta' yR_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)+\\ +\alpha\beta\delta\,(\gamma-\alpha)\,xyR_1\,(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+2,\delta'+1;x,y)=0.\end{gathered}\tag{2.10}$$

Приведём доказательство полученного тождества. Для этого так же, как и в предыдущем случае, используя формулу (1.11), представим все участвующие в тождестве функции R_1 в форме бесконечных гипергеометрических рядов:

$$\gamma\left(\gamma+1\right)\delta'\left[\beta'-\left(\gamma-\alpha\right)y\right]\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^n y^m-$$

$$-\gamma\beta'\delta'\left(\gamma+1\right)\left(1-y\right)\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta'+1)_m(\delta)_n}{(\gamma)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^n y^m+$$

$$+\left(\gamma-\alpha\right)\left(\gamma-\beta'\right)\left(\gamma+1\right)\delta' y\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma+1)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^n y^m+$$

$$+\alpha\beta\delta\left(\gamma-\alpha\right)xy\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)_{n+m}(\beta+1)_n(\beta')_m(\delta+1)_n}{(\gamma+2)_{n+m}(\delta'+1)_n n!m!}x^n y^m=0.$$

Запишем выражение, стоящее слева так, чтобы было понятно, в каких степенях находятся независимые переменные x и y:

$$\gamma\left(\gamma+1\right)\beta'\delta'\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^n y^m-$$

$$-\gamma\left(\gamma+1\right)\delta'\left(\gamma-\alpha\right)\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^n y^{m+1}-$$

$$-\gamma\beta'\delta'\left(\gamma+1\right)\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta'+1)_m(\delta)_n}{(\gamma)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^n y^m+$$

$$+\gamma\beta'\delta'\left(\gamma+1\right)\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta'+1)_m(\delta)_n}{(\gamma)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^n y^{m+1}+$$

$$+\left(\gamma-\alpha\right)\left(\gamma-\beta'\right)\left(\gamma+1\right)\delta'\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma+1)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^n y^{m+1}+$$

$$+\alpha\beta\delta\left(\gamma-\alpha\right)\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)_{n+m}(\beta+1)_n(\beta')_m(\delta+1)_n}{(\gamma+2)_{n+m}(\delta'+1)_n n!m!}x^{n+1} y^{m+1}=0.$$

Во втором, четвёртом и пятом слагаемых положим $k=m+1$, в шестом слагаемом $k=m+1$, $l=n+1$:

$$\gamma\left(\gamma+1\right)\beta'\delta'\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^n y^m-$$

$$-\gamma\left(\gamma+1\right)\delta'\left(\gamma-\alpha\right)\sum_{\substack{n=0\\k=1}}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+k-1}(\beta)_n(\beta')_{k-1}(\delta)_n}{(\gamma)_{n+k-1}(\delta')_n n!\,(k-1)!}x^n y^k-$$

$$-\gamma\beta'\delta'\left(\gamma+1\right)\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta'+1)_m(\delta)_n}{(\gamma)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^n y^m+$$

$$+\gamma\beta'\delta'\left(\gamma+1\right)\sum_{\substack{n=0\\k=1}}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+k-1}(\beta)_n(\beta'+1)_{k-1}(\delta)_n}{(\gamma)_{n+k-1}(\delta')_n n!\,(k-1)!}x^n y^k+$$

$$+\left(\gamma-\alpha\right)\left(\gamma-\beta'\right)\left(\gamma+1\right)\delta'\sum_{\substack{n=0\\k=1}}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+k-1}(\beta)_n(\beta')_{k-1}(\delta)_n}{(\gamma+1)_{n+k-1}(\delta')_n n!\,(k-1)!}x^n y^k+$$

$$+\alpha\beta\delta\left(\gamma-\alpha\right)\sum_{l,k=1}^{\infty}\frac{(\alpha+1)_{l+k-2}(\beta+1)_{l-1}(\beta')_{k-1}(\delta+1)_{l-1}}{(\gamma+2)_{l+k-2}(\delta'+1)_{l-1}\,(l-1)!\,(k-1)!}x^l y^k=0.$$

Положим теперь $l = n$, $k = m$ и перепишем суммы так, чтобы и n, и m в символе суммирования начинались с единицы:

$$\gamma(\gamma+1)\beta'\delta'\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n(\delta)_n}{(\gamma)_n(\delta')_n n!}x^n+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\beta')_m}{(\gamma)_m m!}y^m+\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta')_m(\delta)_n}{(\gamma)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^n y^m\right)-$$

$$-\gamma(\gamma+1)\delta'(\gamma-\alpha)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m-1}(\beta')_{m-1}}{(\gamma)_{m-1}(m-1)!}y^m+\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m-1}(\beta)_n(\beta')_{m-1}(\delta)_n}{(\gamma)_{n+m-1}(\delta')_n n!(m-1)!}x^n y^m\right)-$$

$$-\gamma\beta'\delta'(\gamma+1)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n(\delta)_n}{(\gamma)_n(\delta')_n n!}x^n+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\beta'+1)_m}{(\gamma)_m m!}y^m+\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m}(\beta)_n(\beta'+1)_m(\delta)_n}{(\gamma)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^n y^m\right)+$$

$$+\gamma\beta'\delta'(\gamma+1)\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m-1}(\beta'+1)_{m-1}}{(\gamma)_{m-1}(m-1)!}y^m+\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m-1}(\beta)_n(\beta'+1)_{m-1}(\delta)_n}{(\gamma)_{n+m-1}(\delta')_n n!(m-1)!}x^n y^m\right)+$$

$$+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta')(\gamma+1)\delta'\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m-1}(\beta')_{m-1}}{(\gamma+1)_{m-1}(m-1)!}y^m+\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m-1}(\beta)_n(\beta')_{m-1}(\delta)_n}{(\gamma+1)_{n+m-1}(\delta')_n n!(m-1)!}x^n y^m\right)+$$

$$+\alpha\beta\delta(\gamma-\alpha)\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{(\alpha+1)_{n+m-2}(\beta+1)_{n-1}(\beta')_{m-1}(\delta+1)_{n-1}}{(\gamma+2)_{n+m-2}(\delta'+1)_{n-1}(n-1)!(m-1)!}x^n y^m=0.$$

Сгруппируем соответствующие суммы и вынесем за скобки общие множители:

$$(\gamma(\gamma+1)\beta'\delta'-\gamma\beta'\delta'(\gamma+1))\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n(\delta)_n}{(\gamma)_n(\delta')_n n!}x^n+$$

$$+\delta'\gamma(\gamma+1)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m-1}(\beta')_{m-1}}{(\gamma)_m m!}y^m\left[\beta'(\alpha+m-1)(\beta'+m-1)-(\gamma-\alpha)(\gamma+m-1)m-\right.$$

$$\left.-(\alpha+m-1)(\beta'+m-1)(\beta'+m)+(\beta'+m-1)(\gamma+m-1)m+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta')\right]+$$

$$+\gamma\delta'(\gamma+1)\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_{n+m-1}(\beta)_n(\beta')_{m-1}(\delta)_n}{(\gamma)_{n+m}(\delta')_n n!m!}x^n y^m\left[\beta'(\alpha+n+m-1)(\beta'+m-1)-\right.$$

$$-(\gamma-\alpha)(\gamma+n+m-1)m-(\alpha+n+m-1)(\beta'+m-1)(\beta'+m)+$$

$$\left.+(\beta'+m-1)(\gamma+n+m-1)m+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta')m+(\gamma-\alpha)nm\right]=0.$$

Упростив выражения в скобках, получим тождественный нуль при выполнении заданных на параметры условий, а именно того, что α, β, β', δ, γ и δ' принадлежат пространству действительных чисел, а параметры γ и δ' отличны от нуля и целых отрицательных чисел. Таким образом, выполнение тождества (2.10) доказано.

Подобным образом из восемнадцати тождеств Гаусса получаем следующие восемнадцать рекуррентных формул для функции R_1, справедливых для действительных параметров α, β, β', δ, γ, δ' и отличных от нуля и целых отрицательных числах γ и δ', в первой формуле $\gamma \neq 1$:

1. $\gamma\delta'(\gamma+1)[\gamma-1-(2\gamma-\alpha-\beta'-1)y]R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)+$
$+\alpha\beta\delta(\gamma+1)x(1-y)R_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y)+$
$+\delta'(\gamma+1)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta')yR_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)+$
$+\alpha\beta\delta(\gamma-\alpha)xyR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+2,\delta'+1;x,y)+$
$+\gamma\delta'\left(\gamma^2-1\right)(y-1)R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma-1,\delta';x,y)=0.$

2. $\gamma\delta'[2\alpha-\gamma-(\alpha-\beta')y]R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)+$
$+\alpha\beta\delta x(1-y)R_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y)+$
$+\gamma\delta'(\gamma-\alpha)R_1(\alpha-1,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)+$
$+\beta\delta(\gamma-\alpha)xR_1(\alpha,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y)-$
$-\alpha\gamma\delta'(1-y)R_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)=0.$

3. $\gamma\delta'[2\beta'-\gamma+(\alpha-\beta')y]R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-\alpha\beta\delta x(1-y)R_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y)+$
$+\gamma\delta'(\gamma-\beta')R_1(\alpha,\beta,\beta'-1,\delta;\gamma,\delta';x,y)+$
$+\alpha\beta\delta xR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta'-1,\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y)-$
$-\beta'\gamma\delta'(1-y)R_1(\alpha,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma,\delta';x,y)=0.$

4. $\gamma(\gamma+1)\delta' R_1(\alpha,\beta,\beta'-1,\delta;\gamma,\delta';x,y) -$
$-\gamma(\gamma+1)\delta' R_1(\alpha-1,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) -$
$-\beta\delta(\gamma+1)xR_1(\alpha,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y) +$
$+(\alpha-\beta')(\gamma+1)\delta' yR_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y) +$
$+\alpha\beta\delta xyR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+2,\delta'+1;x,y) = 0.$

5. $\gamma(\gamma+1)(\alpha-\beta')\delta' R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) +$
$+\alpha\beta\delta(\gamma+1)xR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y) -$
$-\alpha(\gamma+1)(\gamma-\beta')\delta' R_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y) -$
$-\alpha\beta\delta(\alpha+1)xR_1(\alpha+2,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+2,\delta'+1;x,y) +$
$+\beta'\delta'(\gamma+1)(\gamma-\alpha)R_1(\alpha,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma+1,\delta';x,y) = 0.$

6. $\gamma(\gamma+1)\delta' R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) -$
$-\gamma(\gamma+1)\delta' R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y) -$
$-\alpha\beta\delta xR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+2,\delta'+1;x,y) -$
$-\alpha\beta'\delta' yR_1(\alpha+1,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma+2,\delta';x,y) = 0.$

7. $\gamma R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) -$
$-(\gamma-\alpha)R_1(\alpha,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma+1,\delta';x,y) -$
$-\alpha(1-y)R_1(\alpha+1,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma+1,\delta';x,y) = 0.$

8. $\gamma(\gamma+1)\delta' R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) +$
$+\beta\delta(\gamma+1)xR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y) -$
$-(\gamma+1)(\gamma-\beta')\delta' R_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y) -$
$-\beta\delta(\alpha+1)xR_1(\alpha+2,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+2,\delta'+1;x,y) -$
$-\beta'\delta'(\gamma+1)(1-y)R_1(\alpha+1,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma+1,\delta';x,y) = 0.$

9. $\gamma\delta'(\gamma-\alpha-\beta' y)R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) -$
$-\gamma\delta'(\gamma-\alpha)R_1(\alpha-1,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) -$
$-\beta\delta(\gamma-\alpha)xR_1(\alpha,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y) +$
$+\alpha\beta'\delta' y(1-y)R_1(\alpha+1,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma+1,\delta';x,y) = 0.$

10. $\gamma\delta'(\gamma-\beta'-\alpha y)R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) -$
$-\alpha\beta\delta xyR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y) -$
$-\gamma\delta'(\gamma-\beta')R_1(\alpha,\beta,\beta'-1,\delta;\gamma,\delta';x,y) -$
$-\alpha\beta\delta xR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta'-1,\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y) +$
$+\beta'\gamma\delta' y(1-y)R_1(\alpha,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma,\delta';x,y) = 0.$

11. $\gamma R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) -$
$-\gamma R_1(\alpha,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma,\delta';x,y) +$
$+\alpha yR_1(\alpha+1,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma+1,\delta';x,y) = 0.$

12. $\gamma\delta' R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) +$
$+\beta\delta xR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y) -$
$-\gamma\delta' R_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) +$
$+\beta'\delta' yR_1(\alpha+1,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma+1,\delta';x,y) = 0.$

13. $\gamma\delta'(\gamma+1)[\alpha-(\gamma-\beta')y]R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) +$
$+\alpha\beta\delta(\gamma+1)x(1-y)R_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y) -$
$-\alpha\gamma\delta'(\gamma+1)(1-y)R_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) +$
$+\delta'(\gamma+1)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta')yR_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y) +$
$+\alpha\beta\delta(\gamma-\alpha)xyR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta'+1,\delta+1;\gamma+2,\delta'+1;x,y) = 0.$

14. $\gamma\delta'(\gamma+1)[\beta'-(\gamma-\alpha)y]R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) -$
$-\beta'\gamma\delta'(\gamma+1)(1-y)R_1(\alpha,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma,\delta';x,y) +$
$+\delta'(\gamma+1)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta')yR_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y) +$
$+\alpha\beta\delta(\gamma-\alpha)xyR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+2,\delta'+1;x,y) = 0.$

15. $\gamma\delta'(\gamma+1)(\gamma+2)R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-\gamma\delta'(\gamma+1)(\gamma+2)R_1(\alpha,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma+1,\delta';x,y)-$
$-\alpha\beta\delta(\gamma+2)x\cdot R_1(\alpha+1,\beta+1,\beta'+1,\delta+1;\gamma+2,\delta'+1;x,y)+$
$+\alpha\delta'(\gamma+2)(\gamma-\beta')y\cdot R_1(\alpha+1,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma+2,\delta';x,y)+$
$+\alpha(\alpha+1)\beta\delta xy\cdot R_1(\alpha+2,\beta+1,\beta'+1,\delta+1;\gamma+3,\delta'+1;x,y)=0.$

16. $\gamma\delta'(\gamma+1)R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)+$
$+\beta\delta(\gamma+1)xR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y)-$
$-\gamma\delta'(\gamma+1)R_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)-$
$-\beta\delta(\alpha+1)xR_1(\alpha+2,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+2,\delta'+1;x,y)+$
$+\beta'\delta'(\gamma-\alpha)yR_1(\alpha+1,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma+2,\delta';x,y)=0.$

17. $\gamma\delta'(\gamma+1)R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-\delta'(\gamma+1)(\gamma-\beta')R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)-$
$-\alpha\beta\delta xR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+2,\delta'+1;x,y)-$
$-\beta'\delta'(\gamma+1)R_1(\alpha,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma+1,\delta';x,y)=0.$

18. $\gamma R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-(\gamma-\alpha)R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)-$
$-\alpha R_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)=0.$

Для вывода второй части тождеств для функции R_1 используем формулу (1.13). Для примера воспользуемся первым из рекуррентных тождеств Гаусса:

$$c\left[c-1-(2c-a-b-1)z\right]F(a,b;c;z)+(c-a)(c-b)zF(a,b;c+1;z)+$$
$$+c(c-1)(z-1)F(a,b;c-1;z)=0.$$

Для параметров и переменной введём следующие обозначения: $a=\beta,\ b=\delta,\ c=\delta',\ z=xt$. Затем умножим обе части тождества на

$$\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\gamma-\alpha)}\,t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-yt)^{-\beta'}$$

и проинтегрируем по переменной t от нуля до единицы. В результате придем к следующему равенству:

$$\frac{\delta'}{\mathrm{B}(\alpha,\gamma-\alpha)}\int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-yt)^{-\beta'}\left[\delta'-1-(2\delta'-\beta-\delta-1)xt\right]F(\beta,\delta;\delta';xt)\,dt+$$
$$+\frac{(\delta'-\beta)(\delta'-\delta)}{\mathrm{B}(\alpha,\gamma-\alpha)}x\int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-yt)^{-\beta'}tF(\beta,\delta;\delta'+1;xt)\,dt+$$
$$+\frac{\delta'(\delta'-1)}{\mathrm{B}(\alpha,\gamma-\alpha)}\int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-yt)^{-\beta'}(xt-1)F(\beta,\delta;\delta'-1;xt)dt=0.$$

Преобразуем выражения, стоящие под знаком интеграла так, чтобы под интегралом находились только произведение степеней $t,\ 1-t,\ 1-yt$ и гипергеометрическая функция Гаусса:

$$\begin{gathered}\frac{\delta'(\delta'-1)}{\mathrm{B}(\alpha,\gamma-\alpha)}\int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-yt)^{-\beta'}F(\beta,\delta;\delta';xt)\,dt-\\
-\frac{\delta'(2\delta'-\beta-\delta-1)}{\mathrm{B}(\alpha,\gamma-\alpha)}x\int\limits_0^1 t^{\alpha}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-yt)^{-\beta'}F(\beta,\delta;\delta';xt)\,dt+\\
+\frac{(\delta'-\beta)(\delta'-\delta)}{\mathrm{B}(\alpha,\gamma-\alpha)}x\int\limits_0^1 t^{\alpha}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-yt)^{-\beta'}F(\beta,\delta;\delta'+1;xt)\,dt+\\
+\frac{\delta'(\delta'-1)x}{\mathrm{B}(\alpha,\gamma-\alpha)}\int\limits_0^1 t^{\alpha}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-yt)^{-\beta'}F(\beta,\delta;\delta'-1;xt)dt-\\
-\frac{\delta'(\delta'-1)}{\mathrm{B}(\alpha,\gamma-\alpha)}\int\limits_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-yt)^{-\beta'}F(\beta,\delta;\delta'-1;xt)dt=0.\end{gathered}\tag{2.11}$$

Обозначим слагаемые в левой части $I_1,\ I_2,\ I_3,\ I_4$ и I_5 соответственно и вычислим их отдельно. К первому слагаемому I_1 фактически просто применим формулу (1.13). Во втором слагаемом под интегралом в показателе степени t стоит α, а не $\alpha-1$. Поэтому, чтобы привести его к формуле (1.13), требуются некоторые преобразования. Для упрощения бета-функцию распишем через гамма-функции по формуле (1.6) и преобразуем подынтегральное выражение:

$$I_2=-\frac{\delta'(2\delta'-\beta-\delta-1)}{\mathrm{B}(\alpha,\gamma-\alpha)}x\int\limits_0^1 t^{\alpha}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-yt)^{-\beta'}F(\beta,\delta;\delta';xt)\,dt=$$

$$=-\delta'(2\delta'-\beta-\delta-1)\,x\cdot\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int\limits_0^1 t^{(\alpha+1)-1}(1-t)^{(\gamma+1)-(\alpha+1)-1}(1-yt)^{-\beta'}F(\beta,\delta;\delta';xt)\,dt.$$

Преобразования гамма-функций осуществим при помощи формулы (1.2), после чего снова сконструируем из них бета-функцию по формуле (1.6):

$$\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}=\frac{\alpha\cdot(\gamma\cdot\Gamma(\gamma))}{\gamma\cdot(\alpha\cdot\Gamma(\alpha))\Gamma(\gamma-\alpha)}=$$

$$=\frac{\alpha\cdot\Gamma(\gamma+1)}{\gamma\cdot\Gamma(\alpha+1)\Gamma((\gamma+1)-(\alpha+1))}=\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha+1,(\gamma+1)-(\alpha+1))}.$$

Теперь можем применить к интегралу I_2 формулу (1.13):

$$I_2=-\frac{\delta'(2\delta'-\beta-\delta-1)}{\mathrm{B}(\alpha,\gamma-\alpha)}x\int\limits_0^1 t^{\alpha}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-yt)^{-\beta'}F(\beta,\delta;\delta';xt)\,dt=$$

$$=-\delta'(2\delta'-\beta-\delta-1)\frac{\alpha}{\gamma}x\frac{1}{\mathrm{B}(\alpha+1,(\gamma+1)-(\alpha+1))}\int\limits_0^1 t^{(\alpha+1)-1}(1-t)^{(\gamma+1)-(\alpha+1)-1}(1-yt)^{-\beta'}F(\beta,\delta;\delta';xt)\,dt=$$

$$=-\frac{\alpha\delta'(2\delta'-\beta-\delta-1)}{\gamma}xR_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)\cdot$$

Аналогично

$$I_3=\frac{\alpha(\delta'-\beta)(\delta'-\delta)}{\gamma}xR_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta'+1;x,y).$$

$$I_4=\frac{\alpha\delta'(\delta'-1)}{\gamma}x\cdot R_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta'-1;x,y).$$

$$I_5=-\delta'(\delta'-1)R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta'-1;x,y).$$

Подставим значения интегралов I_1, I_2, I_3, I_4 и I_5 в равенство (2.11):

$$\begin{gathered}\delta'(\delta'-1)R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-\\-\frac{\alpha\delta'(2\delta'-\beta-\delta-1)}{\gamma}R_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)+\\+\frac{\alpha(\delta'-\beta)(\delta'-\delta)}{\gamma}xR_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta'+1;x,y)+\\+\frac{\alpha\delta'(\delta'-1)}{\gamma}x\cdot R_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta'-1;x,y)-\\-\delta'(\delta'-1)R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta'-1;x,y)=0,\end{gathered}$$

умножим обе части на γ и получим новое тождество:

$$\begin{gathered}\gamma\delta'(\delta'-1)R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-\\-\alpha\delta'(2\delta'-\beta-\delta-1)xR_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)+\\+\alpha(\delta'-\beta)(\delta'-\delta)xR_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta'+1;x,y)+\\+\alpha\delta'(\delta'-1)x\cdot R_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta'-1;x,y)-\\-\gamma\delta'(\delta'-1)R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta'-1;x,y)=0.\end{gathered}\tag{2.12}$$

Доказательство справедливости тождества (2.12) подобно тем, что даны для тождеств (2.8) и (2.10), поэтому приводить его здесь не будем. Аналогично предыдущему выводим оставшиеся семнадцать тождеств. Выпишем полученные тождества (начиная с девятнадцатого номера), которые имеют место при α, β, β', δ, γ, δ' и отличных от нуля и целых отрицательных числах γ и δ', в первой формуле $\delta'\neq 1$:

19. $\gamma\delta'(\delta'-1)\,R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-\alpha\delta'(2\delta'-\beta-\delta-1)\,xR_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)+$
$+\alpha(\delta'-\beta)(\delta'-\delta)\,xR_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta'+1;x,y)+$
$+\alpha\delta'(\delta'-1)\,x\cdot R_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta'-1;x,y)-$
$-\gamma\delta'(\delta'-1)\,R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta'-1;x,y)=0,$

20. $\gamma(2\beta-\delta')\,R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-\alpha(\beta-\delta)\,xR_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)+$
$+\gamma(\delta'-\beta)\,R_1(\alpha,\beta-1,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)+$
$+\alpha\beta xR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)-$
$-\beta\gamma R_1(\alpha,\beta+1,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)=0.$

21. $\gamma(2\delta-\delta')\,R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-\alpha(\beta-\delta)\,xR_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)+$
$+\gamma(\delta'-\delta)\,R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta-1;\gamma,\delta';x,y)+$
$+\alpha\delta xR_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta';x,y)-$
$-\delta\gamma R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta+1;\gamma,\delta';x,y)=0.$

22. $\gamma\delta' R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta-1;\gamma,\delta';x,y)-$
$-\gamma\delta' R_1(\alpha,\beta-1,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)+$
$+\alpha(\beta-\delta)\,xR_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta'+1;x,y)=0.$

23. $\delta'(\beta-\delta)\,R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-\beta(\delta'-\delta)\,R_1(\alpha,\beta+1,\beta',\delta;\gamma,\delta'+1;x,y)+$
$+\delta(\delta'-\beta)\,R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta+1;\gamma,\delta'+1;x,y)=0.$

24. $\gamma\delta'(\delta'+1)\,R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-\gamma\delta'(\delta'+1)\,R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta'+1;x,y)-$
$-\alpha\beta\delta xR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y)=0.$

25. $\gamma\delta' R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-\gamma(\delta'-\beta)\,R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta+1;\gamma,\delta'+1;x,y)-$
$-\gamma\beta R_1(\alpha,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma,\delta'+1;x,y)+$
$+\alpha\beta xR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y)=0.$

26. $\gamma\delta' R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)+$
$+\gamma(\delta-\delta')\,R_1(\alpha,\beta+1,\beta',\delta;\gamma,\delta'+1;x,y)-$
$-\gamma\delta R_1(\alpha,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma,\delta'+1;x,y)+$
$+\alpha\delta xR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y)=0.$

27. $\delta'\gamma(\gamma+1)(\delta'-\beta)\,R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-\alpha(\gamma+1)\,\delta'\delta xR_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)-$
$-\delta'\gamma(\gamma+1)(\delta'-\beta)\,R_1(\alpha,\beta-1,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)+$
$+\alpha(\gamma+1)\,\beta\delta xR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y)-$
$-\alpha(\alpha+1)\,\beta\delta x^2R_1(\alpha+2,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+2,\delta'+1;x,y)=0.$

28. $\gamma\delta'(\gamma+1)(\delta'-\delta)\,R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-\alpha\beta\delta'(\gamma+1)\,xR_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y)-$
$-\gamma\delta'(\gamma+1)(\delta'-\delta)\,R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta-1;\gamma,\delta';x,y)+$
$+\alpha\beta\delta(\gamma+1)\,xR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y)-$
$-\alpha\beta\delta(\alpha+1)\,x^2R_1(\alpha+2,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+2,\delta'+1;x,y)=0.$

29. $\gamma\delta' R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y)-$
$-\gamma\delta' R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta+1;\gamma,\delta';x,y)+$
$+\alpha\beta xR_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y)=0.$

30. $\gamma\delta' R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) -$
$-\gamma\delta' R_1(\alpha,\beta+1,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) +$
$+\alpha\delta x R_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y) = 0.$

31. $\gamma\beta\delta' R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) -$
$-\alpha\delta'(\delta'-\delta) x R_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y) -$
$-\gamma\beta\delta' R_1(\alpha,\beta+1,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) +$
$+\alpha\beta\delta' x R_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y) +$
$+\alpha(\delta'-\beta)(\delta'-\delta) x R_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta'+1;x,y) = 0.$

32. $\gamma\delta\delta' R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) -$
$-\alpha\delta'(\delta'-\beta) x R_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y) -$
$-\gamma\delta\delta' R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta+1;\gamma,\delta';x,y) +$
$+\alpha\delta\delta' x R_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta';x,y) +$
$+\alpha(\delta'-\beta)(\delta'-\delta) x R_1(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta'+1;x,y) = 0.$

33. $\gamma\delta'(\delta'+1) R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) -$
$-\gamma\delta'(\delta'+1) R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta+1;\gamma,\delta'+1;x,y) +$
$+\alpha\beta(\delta'-\delta) x R_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+2;x,y) = 0.$

34. $\gamma\delta'(\delta'+1) R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) -$
$-\gamma\delta'(\delta'+1) R_1(\alpha,\beta+1,\beta',\delta;\gamma,\delta'+1;x,y) +$
$+\alpha\delta(\delta'-\beta) x R_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+2;x,y) = 0.$

35. $\delta' R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) -$
$-(\delta'-\delta) R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta'+1;x,y) -$
$-\delta R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta+1;\gamma,\delta'+1;x,y) = 0.$

36. $\delta' R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) -$
$-(\delta'-\beta) R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta'+1;x,y) -$
$-\beta R_1(\alpha,\beta+1,\beta',\delta;\gamma,\delta'+1;x,y) = 0.$

Таким образом, нами получены 36 рекуррентных формул для функции R_1. В каждой из них присутствуют от 3 до 5 слагаемых. Отметим, что в практических целях удобнее применять тождества, состоящие из трёх или четырёх слагаемых, поскольку чаще всего преобразовывают именно две или три функции с разными параметрами в одну.

3. Рекуррентные тождества для функции Клаузена

Для вывода тождеств для функции Клаузена воспользуемся соотношением (1.14) и теми 36 формулами, которые были выведены в предыдущем разделе для функции R_1. Возьмём, например, первое из них:

$$\gamma\delta'(\gamma+1)\left[\gamma-1-(2\gamma-\alpha-\beta'-1)y\right] R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) +$$
$$+\alpha\beta\delta(\gamma+1) x(1-y) R_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y) +$$
$$+\delta'(\gamma+1)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta') y R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y) +$$
$$+\alpha\beta\delta(\gamma-\alpha) xy R_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+2,\delta'+1;x,y) +$$
$$+\gamma\delta'\left(\gamma^2-1\right)(y-1) R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma-1,\delta';x,y) = 0.$$

Положим $y=1$:

$$\gamma\delta'(\gamma+1)(\alpha+\beta'-\gamma) R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,1) +$$
$$+\delta'(\gamma+1)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta') R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,1) +$$
$$+\alpha\beta\delta(\gamma-\alpha) x R_1(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+2,\delta'+1;x,1) = 0$$

и к каждой функции R_1 внутри полученного тождества применим выражение (1.14):

$$\gamma\delta'(\gamma+1)(\alpha+\beta'-\gamma)\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta')}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta')}{}_3F_2(\alpha,\beta,\delta;\delta',\gamma-\beta';x) +$$

$$+\delta'(\gamma+1)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta')\frac{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta'+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)\Gamma(\gamma-\beta'+1)}{}_3F_2(\alpha,\beta,\delta;\delta',\gamma-\beta'+1;x)+$$

$$+\alpha\beta\delta(\gamma-\alpha)x\frac{\Gamma(\gamma+2)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta'+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)\Gamma(\gamma-\beta'+2)}{}_3F_2(\alpha+1,\beta+1,\delta+1;\delta'+1,\gamma-\beta'+2;x)=0.$$

Согласно формуле (1.2), в первом слагаемом левой части перепишем выражение

$$\gamma(\gamma+1)\Gamma(\gamma)=(\gamma+1)\Gamma(\gamma+1)=\Gamma(\gamma+2),$$

во втором слагаемом

$$(\gamma+1)\Gamma(\gamma+1)=\Gamma(\gamma+2),$$

в первом и втором слагаемом

$$\frac{\gamma-\alpha}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)}=\frac{\gamma-\alpha}{(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}=\frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha)}.$$

Затем вынесем за скобку

$$\frac{\Gamma(\gamma+2)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}$$

и сократим на это выражение обе части тождества:

$$\delta'(\alpha+\beta'-\gamma)\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta')}{\Gamma(\gamma-\beta')}{}_3F_2(\alpha,\beta,\delta;\delta',\gamma-\beta';x)+$$

$$+\delta'(\gamma-\beta')\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta'+1)}{\Gamma(\gamma-\beta'+1)}{}_3F_2(\alpha,\beta,\delta;\delta',\gamma-\beta'+1;x)+$$

$$+\alpha\beta\delta x\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta'+1)}{\Gamma(\gamma-\beta'+2)}{}_3F_2(\alpha+1,\beta+1,\delta+1;\delta'+1,\gamma-\beta'+2;x)=0.$$

Обозначим $\alpha=a,\ \beta=b,\ \delta=c,\ \delta'=d,\ \gamma-\beta'=e$:

$$-d(e-a)\frac{\Gamma(e-a)}{\Gamma(e)}{}_3F_2(a,b,c;d,e;x)+$$

$$+de\frac{\Gamma(e-\alpha+1)}{\Gamma(e+1)}{}_3F_2(a,b,c;d,e+1;x)+$$

$$+abcx\frac{\Gamma(e-a+1)}{\Gamma(e+2)}{}_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+2;x)=0.$$

Преобразуем по формуле (1.2)

$$(e-a)\Gamma(e-a)=\Gamma(e-a+1),$$

$$\frac{1}{\Gamma(e+1)}=\frac{1}{e\Gamma(e)},$$

$$\frac{1}{\Gamma(e+2)}=\frac{1}{e(e+1)\Gamma(e)},$$

вынесем за скобку дробь

$$\frac{\Gamma(e-a+1)}{\Gamma(e)}$$

и сократим на нее обе части последнего тождества:

$$-d_3F_2(a,b,c;d,e;x)+$$

$$+d_3F_2(a,b,c;d,e+1;x)+$$

$$+abcx\frac{1}{e(e+1)}{}_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+2;x)=0.$$

Умножим обе части на $-e(e+1)$:

$$de(e+1)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x)-$$

$$-de(e+1)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e+1;x)-$$

$$-abcx_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+2;x)=0.$$

Для упрощения формулы положим $e = e - 1$ и окончательно получим

$$\begin{gathered} de\,(e-1)\,{}_3F_2\,(a,b,c;d,e-1;x) - \\ -de\,(e-1)\,{}_3F_2\,(a,b,c;d,e;x) - \\ -abcx{}_3F_2\,(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Заметим, что эта формула справедлива при действительных параметрах a, b, c, d и e, кроме того, параметр d должен быть отличен от нуля и целых отрицательных чисел, а параметр e не должен равняться единице, нулю и целым отрицательным числам. Проведем доказательство справедливости тождества (3.1). Для этого, воспользовавшись формулой (1.10), разложим функции Клаузена в гипергеометрические ряды:

$$\begin{gathered} de\,(e-1)\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{(a)_n(b)_n(c)_n}{(d)_n(e-1)_n n!}x^n - de\,(e-1)\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{(a)_n(b)_n(c)_n}{(d)_n(e)_n n!}x^n - \\ -abcx\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{(a+1)_n(b+1)_n(c+1)_n}{(d+1)_n(e+1)_n n!}x^n = 0. \end{gathered} \tag{3.2}$$

В первом слагаемом выражения (3.2) преобразуем символ Похгаммера. Для этого воспользуемся формулой (1.8). Здесь

$$\frac{e-1}{(e-1)_n} = \frac{(e-1)\,(e+n-1)}{(e-1)\,(e)_{n-1}\,(e+n-1)} = \frac{e+n-1}{(e)_n}.$$

Далее в первых двух слагаемых в левой части выражения (3.2) вынесем общие множители за скобку, поставив их под один знак суммы:

$$de\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n(c)_n}{(d)_n(e)_n n!}x^n\left((e+n-1)-(e-1)\right) - abcx\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+1)_n(b+1)_n(c+1)_n}{(d+1)_n(e+1)_n n!}x^n = 0.$$

После упрощения первого слагаемого придем к уравнению

$$de\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n(c)_n n}{(d)_n(e)_n n!}x^n - abcx\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+1)_n(b+1)_n(c+1)_n}{(d+1)_n(e+1)_n n!}x^n = 0.$$

Заметим, что первое слагаемое первой суммы (то есть выражение под знаком суммы при $n = 0$) равно нулю, поэтому можно начать суммирование с $n = 1$, то есть предыдущее выражение эквивалентно следующему:

$$de\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n(c)_n n}{(d)_n(e)_n n!}x^n - abcx\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+1)_n(b+1)_n(c+1)_n}{(d+1)_n(e+1)_n n!}x^n = 0. \tag{3.3}$$

Преобразуем первое слагаемое выражения (3.3), воспользовавшись для этого формулами (1.8) и (1.9):

$$de\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n(c)_n n}{(d)_n(e)_n n!}x^n = \frac{abcdex}{de}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a+1)_{n-1}(b+1)_{n-1}(c+1)_{n-1}}{(d+1)_{n-1}(e+1)_{n-1}\,(n-1)!}x^{n-1} =$$

$$= abcx\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a+1)_{n-1}(b+1)_{n-1}(c+1)_{n-1}}{(d+1)_{n-1}(e+1)_{n-1}\,(n-1)!}x^{n-1} = abcx\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+1)_n(b+1)_n(c+1)_n}{(d+1)_n(e+1)_n\,(n)!}x^n.$$

В конце заменили все $n-1$ на n, тогда суммирование начинается с нуля. Подставив полученное выражение в равенство (3.3), приходим к тождеству, что и доказывает справедливость формулы (3.1).

Подобным образом выводим оставшиеся рекуррентные тождества для функции Клаузена, справедливые при действительных значениях параметров a, b, c, d, e и отличных от нуля и целых отрицательных числах параметров d и e. Кроме того, $e \neq 1$ в формулах 1, 6, 7, 8, 17, 18, 19 и $d \neq 1$ в формулах 2, 9, 10, 11, 14, 15, 16:

1. $de\,(e-1)\,{}_3F_2\,(a,b,c;d,e-1;x) - de\,(e-1)\,{}_3F_2\,(a,b,c;d,e;x) -$
   $-\,abcx{}_3F_2\,(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0.$

2. $de\,(d-1)\,{}_3F_2\,(a,b,c;d-1,e;x) - de\,(d-1)\,{}_3F_2\,(a,b,c;d,e;x) -$
   $-\,abcx{}_3F_2\,(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0.$

3. $de{}_3F_2\,(a,b,c;d,e;x) - de{}_3F_2\,(a+1,b,c;d,e;x) + bcx{}_3F_2\,(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0.$

4. $de{}_3F_2\,(a,b,c;d,e;x) - de{}_3F_2\,(a,b+1,c;d,e;x) + acx{}_3F_2\,(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0.$

5. $de_3F_2\left(a,b,c;d,e;x\right)-de_3F_2\left(a,b,c+1;d,e;x\right)+abx_3F_2\left(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x\right)=0.$

6. $\left(e-a-1\right){}_3F_2\left(a,b,c;d,e;x\right)-\left(e-1\right){}_3F_2\left(a,b,c;d,e-1;x\right)+a_3F_2\left(a+1,b,c;d,e;x\right)=0.$

7. $\left(e-b-1\right){}_3F_2\left(a,b,c;d,e;x\right)-\left(e-1\right){}_3F_2\left(a,b,c;d,e-1;x\right)+b_3F_2\left(a,b+1,c;d,e;x\right)=0.$

8. $\left(e-c-1\right){}_3F_2\left(a,b,c;d,e;x\right)-\left(e-1\right){}_3F_2\left(a,b,c;d,e-1;x\right)+c_3F_2\left(a,b,c+1;d,e;x\right)=0.$

9. $\left(d-a-1\right){}_3F_2\left(a,b,c;d,e;x\right)-\left(d-1\right){}_3F_2\left(a,b,c;d-1,e;x\right)+a_3F_2\left(a+1,b,c;d,e;x\right)=0.$

10. $\left(d-b-1\right){}_3F_2\left(a,b,c;d,e;x\right)-\left(d-1\right){}_3F_2\left(a,b,c;d-1,e;x\right)+b_3F_2\left(a,b+1,c;d,e;x\right)=0.$

11. $\left(d-c-1\right){}_3F_2\left(a,b,c;d,e;x\right)-\left(d-1\right){}_3F_2\left(a,b,c;d-1,e;x\right)+c_3F_2\left(a,b,c+1;d,e;x\right)=0.$

12. $de\left(e-a\right){}_3F_2\left(a,b,c;d,e;x\right)-de\left(e-a\right){}_3F_2\left(a,b,c;d,e+1;x\right)-$
$-abcx_3F_2\left(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x\right)=0.$

13. $de\left(d-a\right){}_3F_2\left(a,b,c;d,e;x\right)-de\left(d-a\right){}_3F_2\left(a,b,c;d+1,e;x\right)-$
$-abcx_3F_2\left(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x\right)=0.$

14. $de\left(d-1\right){}_3F_2\left(a,b,c;d-1,e;x\right)-de\left(d-1\right){}_3F_2\left(a,b,c+1;d,e;x\right)+$
$+ab\left(d-c-1\right)x_3F_2\left(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x\right)=0.$

15. $de\left(d-1\right){}_3F_2\left(a,b,c;d-1,e;x\right)-de\left(d-1\right){}_3F_2\left(a,b+1,c;d,e;x\right)+$
$+ac\left(d-b-1\right)x_3F_2\left(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x\right)=0.$

16. $de\left(d-1\right){}_3F_2\left(a,b,c;d-1,e;x\right)-de\left(d-1\right){}_3F_2\left(a+1,b,c;d,e;x\right)+$
$+bc\left(d-a-1\right)x_3F_2\left(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x\right)=0.$

17. $de\left(e-1\right){}_3F_2\left(a,b,c;d,e-1;x\right)-de\left(e-1\right){}_3F_2\left(a,b,c+1;d,e;x\right)+$
$+ab\left(e-c-1\right)x_3F_2\left(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x\right)=0.$

18. $de\left(e-1\right){}_3F_2\left(a,b,c;d,e-1;x\right)-de\left(e-1\right){}_3F_2\left(a,b+1,c;d,e;x\right)+$
$+ac\left(e-b-1\right)x_3F_2\left(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x\right)=0.$

19. $de\left(e-1\right){}_3F_2\left(a,b,c;d,e-1;x\right)-de\left(e-1\right){}_3F_2\left(a+1,b,c;d,e;x\right)+$
$+bc\left(e-a-1\right)x_3F_2\left(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x\right)=0.$

20. $de_3F_2\left(a,b+1,c;d,e;x\right)-de_3F_2\left(a,b,c+1;d,e;x\right)+$
$+a\left(b-c\right)x_3F_2\left(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x\right)=0.$

21. $de_3F_2\left(a,b+1,c;d,e;x\right)-de_3F_2\left(a+1,b,c;d,e;x\right)+$
$+c\left(b-a\right)x_3F_2\left(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x\right)=0.$

22. $de_3F_2\left(a,b,c+1;d,e;x\right)-de_3F_2\left(a+1,b,c;d,e;x\right)+$
$+b\left(c-a\right)x_3F_2\left(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x\right)=0.$

23. $d\left(b-c\right){}_3F_2\left(a,b,c;d,e;x\right)-b\left(d-c\right){}_3F_2\left(a,b+1,c;d+1,e;x\right)+$
$+c\left(d-b\right){}_3F_2\left(a,b,c+1;d+1,e;x\right)=0.$

24. $d\left(a-c\right){}_3F_2\left(a,b,c;d,e;x\right)-a\left(d-c\right){}_3F_2\left(a+1,b,c;d+1,e;x\right)+$
$+c\left(d-a\right){}_3F_2\left(a,b,c+1;d+1,e;x\right)=0.$

25. $d\left(a-b\right){}_3F_2\left(a,b,c;d,e;x\right)-a\left(d-b\right){}_3F_2\left(a+1,b,c;d+1,e;x\right)+$
$+b\left(d-a\right){}_3F_2\left(a,b+1,c;d+1,e;x\right)=0.$

26. $de\left(e+1\right){}_3F_2\left(a,b,c;d,e+1;x\right)-de\left(e+1\right){}_3F_2\left(a-1,b,c;d,e;x\right)-$
$-bc\left(e+1\right)x_3F_2\left(a,b+1,c+1;d+1,e+1;x\right)+abcx_3F_2\left(a+1,b+1,c+1;d+1,e+2;x\right)=0.$

27. $de\left(e+1\right)\left(e-a\right){}_3F_2\left(a,b,c;d,e;x\right)-abc\left(e+1\right)x_3F_2\left(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x\right)-$
$-de\left(e+1\right)\left(e-a\right){}_3F_2\left(a,b,c;d,e+1;x\right)-abc\left(e-a\right)x_3F_2\left(a+1,b+1,c+1;d+1,e+2;x\right)=0.$

28. $de_3F_2\left(a,b,c;d,e;x\right)-e\left(d-b\right){}_3F_2\left(a,b,c+1;d+1,e;x\right)-$
$-be_3F_2\left(a,b+1,c+1;d+1,e;x\right)+abx_3F_2\left(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x\right)=0.$

29. $de_3F_2\left(a,b,c;d,e;x\right)+e\left(c-d\right){}_3F_2\left(a,b+1,c;d+1,e;x\right)-$
$-ce_3F_2\left(a,b+1,c+1;d+1,e;x\right)+acx_3F_2\left(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x\right)=0.$

30. $d\,(d-1)\,e_3F_2\,(a,b,c;d,e;x) - ad\,(2d-b-c-1)\,x_3F_2\,(a+1,b,c;d,e+1;x) +$
$+\,a\,(d-b)\,(d-c)\,x_3F_2\,(a+1,b,c;d+1,e+1;x) +$
$+\,ad\,(d-1)\,x_3F_2\,(a+1,b,c;d-1,e+1;x) - d\,(d-1)\,e_3F_2\,(a,b,c;d-1,e;x) = 0,$

31. $e\,(2b-d)\,{}_3F_2\,(a,b,c;d,e;x)\ -\alpha\,(b-c)\,x_3F_2\,(a+1,b,c;d,e+1;x) +$
$+\,e\,(d-b)\,{}_3F_2\,(a,b-1,c;d,e;x) + abx_3F_2\,(a+1,b+1,c;d,e+1;x) - be_3F_2\,(a,b+1,c;d,e;x) = 0.$

32. $e\,(2c-d)\,{}_3F_2\,(a,b,c;d,e;x)\ +a\,(b-c)\,x_3F_2\,(a+1,b,c;d,e+1;x) +$
$+\,(d-c)\,(\gamma-\beta')\,{}_3F_2\,(a,b,c-1;d,e;x) + acx_3F_2\,(a+1,b,c+1;d,e+1;x) - ce_3F_2\,(a,b,c+1;d,e;x) = 0.$

33. $d\,(d-b)\,e\,(e+1)\,{}_3F_2\,(a,b,c;d,e;x) - acd\,(e+1)\,x_3F_2\,(a+1,b,c;d,e+1;x) -$
$-\,d\,(d-b)\,e\,(e+1)\,{}_3F_2\,(a,b-1,c;d,e;x) + abc\,(e+1)\,x_3F_2\,(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) -$
$-\,abc\,(a+1)\,x^2{}_3F_2\,(a+2,b+1,c+1;d+1,e+2;x)\ = 0.$

34. $de\,(d-c)\,(e+1)\,{}_3F_2\,(a,b,c;d,e;x) - abd\,(e+1)\,x_3F_2\,(a+1,b,c;d,e+1;x) -$
$-\,de\,(d-c)\,(e+1)\,{}_3F_2\,(a,b,c-1;d,e;x) + abc\,(e+1)\,x_3F_2\,(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) -$
$-\,abc\,(a+1)\,x^2{}_3F_2\,(a+2,b+1,c+1;d+1,e+2;x) = 0.$

35. $bde_3F_2\,(a,b,c;d,e;x) - ad\,(d-c)\,x_3F_2\,(a+1,b,c;d,e+1;x) - bde_3F_2\,(a,b+1,c;d,e;x) +$
$+\,abdx_3F_2\,(a+1,b+1,c;d,e+1;x) + a\,(d-b)\,(d-c)\,x_3F_2\,(a+1,b,c;d+1,e+1;x) = 0.$

36. $cde_3F_2\,(a,b,c;d,e;x) - adex_3F_2\,(a+1,b,c;d,e+1;x) - cde_3F_2\,(a,b,c+1;d,e;x) +$
$+\,acdx_3F_2\,(a+1,b,c+1;d,e+1;x) + a\,(d-b)\,(d-c)\,x_3F_2\,(a+1,b,c;d+1,e+1;x) = 0.$

Выводы

В настоящей статье были выведены рекуррентные тождества для двух специальных функций гипергеометрического типа. Производя арифметические действия над выведенными тождествами, можно прийти к новым формулам. Как уже было сказано выше, удобнее всего пользоваться тождествами, состоящими из трёх или четырёх слагаемых. Поэтому в заключение запишем тождества, состоящие из трёх слагаемых вместе с выведенными в результате действий над записанными ранее.

Если параметры α, β, β', δ, γ, δ' принадлежат пространству действительных чисел, параметры γ и δ' не равны нулю и целым отрицательным числам, то справедливы рекуррентные формулы для функции R_1:

1. $\gamma R_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) - (\gamma-\alpha)\,R_1\,(\alpha,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma+1,\delta';x,y) -$
$-\,\alpha\,(1-y)\,R_1\,(\alpha+1,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma+1,\delta';x,y) = 0.$

2. $\gamma R_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) - \gamma R_1\,(\alpha,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma,\delta';x,y) + \alpha y R_1\,(\alpha+1,\beta,\beta'+1,\delta;\gamma+1,\delta';x,y) = 0.$

3. $\gamma R_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) - (\gamma-\alpha)\,R_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y) - \alpha R_1\,(\alpha+1,\beta,\beta',\delta;\gamma+1,\delta';x,y) = 0.$

4. $\gamma\delta' R_1\,(\alpha,\beta+1,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) - \gamma\delta' R_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta+1;\gamma,\delta';x,y) +$
$+\,\alpha\,(\beta-\delta)\,xR_1\,(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y) = 0.$

5. $\delta'\,(\beta-\delta)\,R_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) - \beta\,(\delta'-\delta)\,R_1\,(\alpha,\beta+1,\beta',\delta;\gamma,\delta'+1;x,y) +$
$+\,\delta\,(\delta'-\beta)\,R_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta+1;\gamma,\delta'+1;x,y) = 0.$

6. $\gamma\delta'\,(\delta'+1)\,R_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) - \gamma\delta'\,(\delta'+1)\,R_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta'+1;x,y) -$
$-\,\alpha\beta\delta xR_1\,(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y) = 0.$

7. $\gamma\delta' R_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) - \gamma\delta' R_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta+1;\gamma,\delta';x,y) +$
$+\,\alpha\beta xR_1\,(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y) = 0.$

8. $\gamma\delta' R_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) - \gamma\delta' R_1\,(\alpha,\beta+1,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) +$
$+\,\alpha\delta xR_1\,(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+1;x,y) = 0.$

9. $\gamma\delta'\,(\delta'+1)\,R_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) - \gamma\delta'\,(\delta'+1)\,R_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta+1;\gamma,\delta'+1;x,y) +$
$+\,\alpha\beta\,(\delta'-\delta)\,xR_1\,(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+2;x,y) = 0.$

10. $\gamma\delta'\,(\delta'+1)\,R_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) - \gamma\delta'\,(\delta'+1)\,R_1\,(\alpha,\beta+1,\beta',\delta;\gamma,\delta'+1;x,y) +$
$+\,\alpha\delta\,(\delta'-\beta)\,xR_1\,(\alpha+1,\beta+1,\beta',\delta+1;\gamma+1,\delta'+2;x,y) = 0.$

11. $\delta' R_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) - (\delta'-\delta)\,R_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta'+1;x,y) - \delta R_1\,(\alpha,\beta,\beta',\delta+1;\gamma,\delta'+1;x,y) = 0.$

12. $\delta' R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) - (\delta'-\beta) R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta'+1;x,y) - \beta R_1(\alpha,\beta+1,\beta',\delta;\gamma,\delta'+1;x,y) = 0.$
13. $(\delta-\beta) R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) - \delta R_1(\alpha,\beta,\beta',\delta+1;\gamma,\delta';x,y) + \beta R_1(\alpha,\beta+1,\beta',\delta;\gamma,\delta';x,y) = 0.$

Если a, b, c, d и e принадлежат множеству действительных чисел, и при этом d и c не равны нулю и целым отрицательным числам, то

1. $de(e+1)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - de(e+1)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e+1;x) -$ $- abcx{}_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+2;x) = 0.$
2. $de(d+1)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - de(d+1)\,{}_3F_2(a,b,c;d+1,e;x) -$ $- abcx{}_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+2,e+1;x) = 0.$
3. $de{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - de{}_3F_2(a+1,b,c;d,e;x) +$ $+ bcx{}_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0$
4. $de{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - de{}_3F_2(a,b+1,c;d,e;x) + acx{}_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0.$
5. $de{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - de{}_3F_2(a,b,c+1;d,e;x) + abx{}_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0.$
6. $e{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - (e-a)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e+1;x) - a{}_3F_2(a+1,b,c;d,e+1;x) = 0.$
7. $(e-1)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - (e-b)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e+1;x) - b{}_3F_2(a,b+1,c;d,e+1;x) = 0.$
8. $e{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - (e-c)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e+1;x) - c{}_3F_2(a,b,c+1;d,e+1;x) = 0.$
9. $d{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - (d-a)\,{}_3F_2(a,b,c;d+1,e;x) - a{}_3F_2(a+1,b,c;d+1,e;x) = 0.$
10. $d{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - (d-b)\,{}_3F_2(a,b,c;d+1,e;x) - b{}_3F_2(a,b+1,c;d+1,e;x) = 0.$
11. $d{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - (d-c)\,{}_3F_2(a,b,c;d+1,e;x) - c{}_3F_2(a,b,c+1;d+1,e;x) = 0.$
12. $de(e-a)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - de(e-a)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e+1;x) -$ $- abcx{}_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0.$
13. $de(d-a)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - de(d-a)\,{}_3F_2(a,b,c;d+1,e;x) -$ $- abcx{}_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0.$
14. $de(d+1)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - de(d+1)\,{}_3F_2(a,b,c+1;d+1,e;x) +$ $+ ab(d-c)\,x{}_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+2,e+1;x) = 0.$
15. $de(d+1)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - de(d+1)\,{}_3F_2(a,b+1,c;d+1,e;x) +$ $+ ac(d-b)\,x{}_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+2,e+1;x) = 0.$
16. $de(d+1)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - de(d+1)\,{}_3F_2(a+1,b,c;d+1,e;x) +$ $+ bc(d-a)\,x{}_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+2,e+1;x) = 0.$
17. $de(e+1)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - de(e+1)\,{}_3F_2(a,b,c+1;d,e+1;x) +$ $+ ab(e-c)\,x{}_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+2;x) = 0.$
18. $de(e+1)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - de(e+1)\,{}_3F_2(a,b+1,c;d,e+1;x) +$ $+ ac(e-b)\,x{}_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+2;x) = 0.$
19. $de(e+1)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - de(e+1)\,{}_3F_2(a+1,b,c;d,e+1;x) +$ $+ bc(e-a)\,x{}_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+2;x) = 0.$
20. $de{}_3F_2(a,b+1,c;d,e;x) - de{}_3F_2(a,b,c+1;d,e;x) +$ $+ a(b-c)\,x{}_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0.$
21. $de{}_3F_2(a,b+1,c;d,e;x) - de{}_3F_2(a+1,b,c;d,e;x) + c(b-a)\,x{}_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0.$
22. $de{}_3F_2(a,b,c+1;d,e;x) - de{}_3F_2(a+1,b,c;d,e;x) + b(c-a)\,x{}_3F_2(a+1,b+1,c+1;d+1,e+1;x) = 0.$
23. $d(b-c)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - b(d-c)\,{}_3F_2(a,b+1,c;d+1,e;x) + c(d-b)\,{}_3F_2(a,b,c+1;d+1,e;x) = 0.$
24. $d(a-c)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - a(d-c)\,{}_3F_2(a+1,b,c;d+1,e;x) + c(d-a)\,{}_3F_2(a,b,c+1;d+1,e;x) = 0.$
25. $d(a-b)\,{}_3F_2(a,b,c;d,e;x) - a(d-b)\,{}_3F_2(a+1,b,c;d+1,e;x) + b(d-a)\,{}_3F_2(a,b+1,c;d+1,e;x) = 0.$

Литература

[1] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции / пер. с англ. Н.Я. Виленкина. Москва: Наука, 1973. Т. 1. 296 с. URL: https://djvu.online/ file/yJMgdNZWJk89f?ysclid=lnshot5bvp870349708.

[2] Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. Москва: Изд-во АН СССР, 1959. 164 с. URL: https://reallib.org/reader?file=1487895&ysclid=lnshtgbaq2207563473.

[3] Волкодавов В.Ф., Николаев Н.Я. Об одной специальной функции двух аргументов, встречающейся при решении краевых задач // Аналитические методы решения дифференциальных уравнений. Куйбышев: Куйбышевский государственный университет, 1986. С. 42–46.

[4] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва: Физматгиз, 1963. 1100 с. URL: http://www.vixri.ru/?p=991.

[5] Доброславский А.В. Исследование усредненных движений КА в ограниченной задаче трех тел с учетом сил светового давления: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва, 2021. URL: https://mai.ru/upload/iblock/926/bu2e4woh7fvx78ovuyi9juam6pqyu3hx/dobroslavskiy_dissertation.pdf.

[6] Кузнецов Д.С. Специальные функции. Москва: Высшая школа, 1965. 423 с. URL: https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Kuznecov1962ru.pdf.

[7] Петросян Н.С. Специальные функции: учеб. пособие. Москва: ФГБОУ ВО МГТУ «СТАНКИН», 2015. 88 с. URL: https://studfile.net/preview/16389627/.

[8] Подклетнова С.В. О новых тождествах для функции R_1. Куйбышев: КГПИ, 4 с. Деп. в ВИНИТИ, 21.04.92, № 1336-В92.

[9] Подклетнова С.В. О тождествах типа тождеств Гаусса для функции R_1 (часть I) // Евразийский Союз ученых. 2015. № 9-5 (18). С. 140–145. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=26723653. EDN: https://elibrary.ru/wmuqib.

[10] Функции математической физики / Ж.К. де Ферье, Р. Кемпбелл, Г. Петьо, Т. Фогель. Москва: Физматгиз, 1963. 102 с. URL: https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/KampeDeFereKempbellPetoFogel1963ru.pdf.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-3-37-56

Submited: 12.07.2023
Revised: 15.08.2023
Accepted: 30.10.2023

S.V. Podkletnova
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: podkletnova.sv@ssau.ru. ORCID: https://orcid.org/0009-0005-7849-2513

RECURRENT IDENTITIES FOR TWO SPECIAL FUNCTIONS OF HYPERGEOMETRIC TYPE

ABSTRACT
The article presents conclusions and proofs of Gauss-type identities for two known hypergeometric type functions. For the derivation and justification of formulas, the representation of functions in the form of a series is used, as well as an integral representation of the functions under consideration. The article uses the definition and properties of gamma and beta functions, the hypergeometric Gauss function, as well as known identities for these functions. Hypergeometric functions are widely used in solving various types of differential equations. The presence of identities connecting the functions involved in the resulting formulas of solutions greatly simplifies both the final formulas and intermediate calculations in many problems related to solving hyperbolic, elliptic and mixed types of equations.

Key words: special functions; gamma function; beta function; Gaussian function; identity; hypergeometric function; formula; solution.

Citation. Podkletnova S.V. Recurrent identities for two special functions of hypergeometric type. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 3, pp. 37–56. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-3-37-56. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: author and reviewers declare no conflict of interests.

Svetlana V. Podkletnova — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of the Department of Higher Mathematics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

References

[1] Bateman H., Erdelyi A. Higher Transcendental Functions. Moscow: Nauka, 1973, vol. 1, 296 p. Available at: https://djvu.online/file/yJMgdNZWJk89f?ysclid=lnshot5bvp870349708. (In Russ.)

[2] Bitsadze A.V. Mixed type equations. Moscow: Izd-vo AN SSSR, 1959, 164 p. Available at: https://reallib.org/reader?file=1487895&ysclid=lnshtgbaq2207563473. (In Russ.)

[3] Volkodavov V.F., Nikolaev N.Ya. On one special function of two arguments encountered in solving boundary value problems. In: *Analytical methods for solving differential equations.* Kuibyshev: Kuibyshevskii gosudarstvennyi universitet, 1986, pp. 42–46. (In Russ.)

[4] Gradstein I.S., Ryzhik I.M. Tables of integrals, sums, series and products. Moscow: Fizmatgiz, 1963, 1100 p. Available at: http://www.vixri.ru/?p=991. (In Russ.)

[5] Dobroslavsky A.V. Investigation of averaged spacecraft motions in a limited three-body problem taking into account light pressure forces: Candidate's of Physical and Mathematical Sciences thesis. Moscow, 2021. Available at: https://mai.ru/upload/iblock/926/bu2e4woh7fvx78ovuyi9juam6pqyu3hx/dobroslavskiy_dissertation.pdf. (In Russ.)

[6] Kuznetsov D.S. Special functions. Moscow: Vysshaya shkola, 1965, 423 p. Available at: https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Kuznecov1962ru.pdf. (In Russ.)

[7] Petrosyan N.S. Special functions: textbook. Moscow: FGBOU VO MGTU «STANKIN», 2015, 88 p. Available at: https://studfile.net/preview/16389627/. (In Russ.)

[8] Podkletnova S.V. On new identities for a function R_1. Kuibyshev: KGPI, 4 p. In VINITI, 21.04.92, no. 1336-B92. (In Russ.)

[9] Podkletnova S.V. On Gauss type identities for a function R_1 (Part I). *Eurasian Union of Scientists*, 2015, no. 9–5 (18), pp. 140–145. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=26723653. EDN: https://elibrary.ru/wmuqib. (In Russ.)

[10] Ferriet J. Kampe de, Campbell R., Petyo G., Vogel T. Functions of mathematical physics. Moscow: Fizmatgiz, 1963, 102 p. Available at: https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/KampeDeFereKempbellPetoFogel 1963ru.pdf. (In Russ.)