Научная статья
DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-3-31-36

УДК 514.76; 517.1

Дата: поступления статьи: 24.07.2023
после рецензирования: 31.08.2023
принятия статьи: 30.10.2023

М.В. Долгополов
Самарский государственный технический университет, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: mikhaildolgopolov68@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8725-7831
Т.Ф. Жураев
Ташкентский государственный педагогический университет имени Низами, г. Ташкент, Узбекистан
E-mail: tursunzhuraev@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0009-0005-5379-3862

О ЕВКЛИДОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ, ЯВЛЯЮЩИХСЯ ПОДПРОСТРАНСТВОМ ПРОСТРАНСТВА ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР С КОНЕЧНЫМИ НОСИТЕЛЯМИ НА БЕСКОНЕЧНОМ КОМПАКТЕ РАЗМЕРНОСТИ НУЛЬ

АННОТАЦИЯ

В статье доказывается, что подпространство $P_{n,n-1}(X)$ всех вероятностных мер $P(X)$, носители которых состоят ровно из n точек, является $(n-1)$-мерным топологическим многообразием. Выделяется ряд подпространств пространства всех вероятностных мер, имеющих бесконечную размерность в смысле dim, являющихся многообразиями. Рассмотрены отдельные подмножества бесконечного компакта X, на котором пространство вероятностных мер гомотопически плотно во всем пространстве. Сформулированы и доказаны три теоремы о топологических свойствах многообразий — подпространств гомотопически плотных в пространстве вероятностных мер с конечными носителями на компакте, рассмотрены частные случаи конечного и бесконечного компакта.

Ключевые слова: подпространство; вероятностная мера; носитель; топологическое многообразие; компакт; функтор; симплекс; гомотопия; подпространство гомотопически плотное; размерность.

Цитирование. Долгополов М.В., Жураев Т.Ф. О евклидовых многообразиях, являющихся подпространством пространства вероятностных мер с конечными носителями на бесконечном компакте размерности нуль // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2023. Т. 29, № 3. С. 31–36. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-3-31-36.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Михаил Вячеславович Долгополов — доцент, кандидат физико-математических наук, кафедра высшей математики, Самарский государственный технический университет, Российская Федерация, 443100, Самара ул. Молодогвардейская, 244.
Турсунбой Файзиевич Жураев — доктор физико-математических наук, и. о. профессора, кафедра общей математики, Ташкентский государственный педагогический университет имени Низами, 700100, Узбекистан, г. Ташкент, пр. Бунедкор, 27.

Введение

Настоящее исследование авторов и данная статья посвящены изучению топологии пространств вероятностной меры. Эта тема находится на стыке двух областей — бесконечномерной топологии и теории меры [1; 2]. Причина, по которой бесконечномерная топология представляет интерес при изучении пространств вероятностных мер, заключается в том, что пространства мер, которые имеют дополнительную выпуклую структуру, являются идеальными "естественно" возникающими бесконечномерными объектами для применения мощных методов бесконечномерной топологии [2]. С 1990-х годов пространства вероятностных мер изучались в рамках категории компактов, где проблемы топологической классификации проявлялись весьма элементарно: пространство вероятностных мер компакта рассматривалось гомеоморфно либо конечномерному для компакта конечного, либо бесконечно-мерному объемному кубу. Помимо компактности было даже не всегда ясно, что следует рассматривать как пространство вероятностных мер на компакте. Исследования последних лет показывают развитие некоторых новых подходов. В [3] отождествили евклидовы пространства с подпространствами счетного бесконечного произведения системы подпространств. Тогда объединенное множество имеет две естественные топологии, а именно: слабую топологию (прямой предел) относительно последовательных включений подпространств и относительную топологию, унаследованную от топологии счетного бесконечного произведения системы подпространств. Также в [3] приведено несколько характеристик топологических многообразий, смоделированных на (R^∞,σ)- или (Q^∞,Σ)- многообразиях, которые применяются к битопологическим группам, битопологическим линейным пространствам, пространствам мер, пространствам отображений, гиперпространствам.

В работе [4] развита теория классов бесконечномерных банаховых многообразий мер в абстрактном измеримом пространстве, используя диаграммы, которые “сбалансированы” между функциями плотности и логарифмической плотности. Отмечено, что многообразия сохраняют многие особенности конечномерной информационной геометрии. Важен выбор меры μ. Работа [5] рассматривает сохранение подфункторами функтора вероятностных мер пространств счетной размерности и экстензорные свойства подпространств пространства вероятностных мер. В [6] изучены гомотопически плотные подпространства пространства вероятностных мер, определяемых бесконечным метрическим компактным множеством, которые являются конечномерными и бесконечномерно-размерными топологическими многообразиями. Рассматривая различные свойства подпространств пространства вероятностных мер, доказан ряд свойств соответствия и ряд условий эквивалентности.

Также в работе [7] авторы доказали ряд утверждений, что действие компактной группы G, определяемой стратифицированным пространством X, непрерывно для пространства $Z(X)$, являющегося стратифицированным пространством, содержащим самостратифицированное пространство X как замкнутое подмножество. Доказан эквивариантный аналог некоторых результатов Р. Коти относительно $A(N)R(S)$-пространств. Также показано, что орбитальное пространство $Z(X)/G$ под действием группы G является пространством S.

В работе [8] рассмотрены гомотопически плотные свойства и топологические и экстензорные свойства одноточечной компактификации и компактификации по Александрову для локально компактного пространства и для некоторых подпространств пространства вероятностных мер.

В данной статье сформулированы и доказаны теоремы о топологических свойствах многообразий, являющихся подпространством пространства вероятностных мер, — подпространств гомотопически плотных в пространстве вероятностных мер с конечными носителями на компакте, рассмотрены частные случаи конечного и бесконечного компакта.

1. Подпространства пространства вероятностных мер с конечными носителями на компакте

Для компактов X имеется простая топологическая классификация пространств $P(x)$ всех вероятностных мер. В случае конечного n-точечного пространства $X=\{n\}$ точки μ пространства $P(n)=P_n(n)$ являются выпуклыми линейными комбинациями мер Дирака:

$$\mu = m_0\delta(0)+m_1\delta(1)+...+m_{n-1}\delta(n-1).$$

Поэтому они естественно отождествляются с точками $(n-1)$-мерного симплекса σ^{n-1}. При этом меры Дирака $\delta(i)$ образуют вершины симплекса, а массы m_i, помещенные в точки i, являются барицентрическими координатами меры μ. Таким образом, компакт $P(n)$ аффинно гомеоморфен симплексу σ^{n-1} [9].

В случае бесконечного компакта X пространство $P(X)$ также является компактом (функтор P сохраняет вес). Далее, оно содержит симплексы сколь угодно большого числа измерений, поэтому оно бесконечномерно. По теореме Кэли [1] выпуклый компакт $P(X)\subset R^{C(X)}$ аффинно вкладывается в ℓ_2. Следовательно, по теореме Келлера компакт $P(X)$ как бесконечномерный выпуклый компакт, лежащий в ℓ_2, гомеоморфен гильбертову кубу $Q=I^{\chi_0}$.

С другой стороны, пространство $P(X)$ всех вероятностных мер на компакте X называется множеством всех регулярных борелевских вероятностных мер на X, снабженным слабейшей из топологий, для которых непрерывен каждый функционал $f_u : C(X) \to R$, переводящей меру μ в $\mu(U)$ (U — открытое в X множество).

Для произвольного компакта X и меры $\mu \in P(X)$ определен ее носитель $supp(\mu)$ — это наименьшее из замкнутых множеств $F \subset X$, для которых $\mu(F) = \mu(X)$, т. е. $supp(\mu) = \bigcap\{A : A = \bar{A}, \mu \in P(A)\}$;

$P_n(X) = \{\mu \in P(X) : |supp\mu| \leqslant n\}-$ множество всех мер μ с не более чем n носителями.

Определение [1]. Топологическое пространство X называется многообразием, моделированным на пространстве Y, или Y-многообразием, если всякая точка пространства X имеет окрестность, гомеоморфную открытому подмножеству пространства Y.

Определение [1]. Подмножество $A \subset X$ пространства X называется гомотопически плотным в X, если существует гомотопия $h(x,t) : X \times [0,1] \to X$ такая, что $h(x,0) = id_X$ и $h(x,(0,1]) \subset A$.

Для бесконечного (любого) компакта X и любого $n \in N$ функтора P_n положим $P_{n,n-1}(X) = P_n(X)\ P_{n-1}(X)$, где $P_n(X) = \{\mu \in P(X) : |\mathrm{supp}\mu| \leqslant n\}$ [10].

Теорема 1. Для любого компакта X подпространство $P_{n,n-1}(X)$ пространства $P_n(X)$ является $(n-1)$-мерным многообразием и гомотопически плотным в $P_n(X)$.

Доказательство. Пусть X — произвольный компакт. Возможны два случая.

1^0. X — конечное множество. Для определенности пусть X состоит из n точек. Тогда $P_n(X) = P_n(\tilde{n}) = \sigma^{n-1} - (n-1)$-мерный стандартный симплекс, т. е. $T(x_1, x_2, ..., x_n) = \sigma^{n-1}$ симплекс с вершинами в точках x_i. А подпространство $P_{n,n-1}(\tilde{n}) = T(x_1, x_2, ..., x_n) \backslash F_r(T(x_1, x_2, ..., x_n)) = intT(x_1, x_2, ..., x_n)$, т. е. $P_{n,n-1}(\bar{n}) = T^0(x_1, x_2, ..., x_n)$ — внутренность симплекса. Внутренность $T^0(x_1, x_2, ..., x_n)$ гомеоморфна пространству R^{n-1} [11], т. е. $P_{n,n-1}(\bar{n})$ есть $(n-1)$-мерное многообразия R^{n-1}.

2^0. X — бесконечной компакт. Известно, что пространство $P_n(X)$ состоит из линейной комбинации мер Дирака следующего вида:

$$\mu = m_1\delta_1 + m_2\delta_2 + ... + m_n\delta_n, \tag{1.1}$$

где δ_{x_i} — меры Дирака, $x_i \in X$, $0 \leqslant m_i \leqslant 1$, $\sum_{i=1}^n m_i = 1$.

Рассмотрим подпространство $P_{n,n-1}(X)$ пространства $P_n(X)$. Очевидно, что $P_{n,n-1}(X)$ открыто в $P_n(X)$. Возьмем произвольную точку $\mu \in P_{n,n-1}(X)$, тогда

$$\mu = m_1\delta_1 + m_2\delta_2 + ... + m_n\delta_n,$$

$x_1, x_2, ..., x_n$ — взаимно различны, т. е. $|x_1, x_2, ..., x_n| = n$ и $m_i > 0$, $m_i < 1$. Отсюда $\mu \in T^0(x_1, x_2, ..., x_n) = intT(x_1, x_2, ..., x_n)$ — внутренность симплекса. Известно, что $T^0(x_1, x_2, ..., x_n)$ гомеоморфно пространству R^{n-1}. В качестве $O(\mu)$ отождествляем множеству $T^0(x_1, x_2, ..., x_n)$, т. е. каждая точка пространства $P_{n,n-1}(X)$ имеет окрестность, гомеоморфную R^{n-1}. Значит, пространство $P_{n,n-1}(X)$ есть $(n-1)$-мерное многообразие.

Теперь покажем, что подпространство $P_{n,n-1}(X)$ гомотопически плотно в $P_n(X)$. Искомую гомотопию $h(\mu,t) : P_n(X) \times [0,1] \to P_n(X)$ построим, полагая $h(\mu,t) = (1-t)\mu + t \cdot r(\mu)$, где $t \in [0,1]$, $\mu \in P_n(X)$ и $r(\mu) : P(X) \to P(supp\mu)$ — барицентрически открытое отображение [11]. Если $t = 0$, то $h(\mu,0) = (1-0)\mu + 0 \cdot r(\mu) = \mu$, т. е. $h(\mu,0) = id_{P_n(X)}$.

Если $t \in (0,1]$, то $h(\mu,t) = (1-t)\mu + t \cdot r(\mu) \in P_n(X)$ $supph(\mu,t)$ состоит ровно из n-различных точек, т. е. $h(\mu,t) \in P_{n,n-1}(X)$. Это означает, что $P_{n,n-1}(X)$ гомотопически плотно в $P_n(X)$. Теорема 1 доказана.

Если X — бесконечный компакт, тогда для компакта X существует счетное собственное всюду плотное подмножество, т. е. $|A_0| = \chi_0$ и $\bar{A} = X$.
Пусть A имеет вид $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ т.е. $A = \{x_i : i \in N, x_i \in X\}$.
Для любого $n \in N$ положим

$$A_n = \{x_i : x_i \in A,\ i = \overline{1,n}\}.$$

В этом случае имеется следующая цепочка подпространств A_i, для которых имеют место:

а) A_i={точка};

б) A_n состоит из n точек компакта X, т.е. $|A_n| = n$;

в) $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n \subset ...$;

г) $\bar{A}_n = A_n$ т.е. A_n замкнуто и компактно;

д) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$.

Из свойств всюду плотных подмножеств бесконечных компактов и свойств функтора P вероятностных мер подпространство $P(A)$ всюду плотно в $P(X)$ и $P(A) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

С другой стороны, множество $P_n(A)$ тоже всюду плотно в $P_n(X)$ и $P_n(A) = P_n(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_n(A_k)$. Рассмотрим множество

$$P_n(X) \backslash P_n(A) = P_n(X) \backslash \bigcup_{k=1}^{\infty} P_n(A_k).$$

Для нормального функтора P_n, компакта X и любого непустого $A \subset X, A \neq X$ из замкнутого подмножества $A \subset X$ имеет место равенство:

$$P_n(X \backslash A) = P_n(X) \backslash S_{P_n}(A). \tag{1.2}$$

Здесь через $S_{P_n}(A)$ обозначаем множество $\{\mu \in P_n(X) : supp_{P_n}(\mu) \bigcap A \neq \emptyset\}$.

Пусть X — бесконечный компакт и $x_0 \in X$. Рассмотрим подмножество $S_P(x_0) = \{\mu \in P(X) : supp\mu \bigcap x_0 \neq \emptyset\}$. Очевидно, что $S_P(x_0)$ всюду плотно в $P(X)$. Это подмножество является ℓ_2 многообразием. Следовательно, в силу выпуклости $S_P(x_0)$ гомеоморфно ℓ_2. Заметим, что любое компактное подмножество $S_P(x_0)$ является Z-множеством в $S_P(x_0)$ [11].

Для различных точек x_0 и x_1 компакта X пересечение $S_P(x_0)$ и $S_P(x_1)$ тоже гомеоморфно гильбертовому пространству ℓ_2. Если мы рассмотрим счетное подмножество $\{x_0, x_1, ..., x_n, ...\}$ бесконечного компакта X, то пересечение $\bigcap_{i=0}^{\infty} S_P(x_i)$ является всюду плотным выпуклым подмножеством компакта $P(X)$. Следовательно, подпространство $\bigcap_{i=1}^{\infty} S_P(x_i)$ тоже гомеоморфно в ℓ_2 [9].

С другой стороны, для любого замкнутого подмножества $A \subset X$, отличного от X, подпространство $S_P(A)$ гомеоморфно ℓ_2 [11]. Очевидно, что $P(A) \subset S_P(A)$. Следовательно, $P(A)$ есть Z-множество в $S_P(A)$ и $S_P(A) \backslash P(A)$ гомеоморфно ℓ_2.

Теорема 2. Для любого компакта X и любого замкнутого подмножества $A \subset X$, отличного от X, подпространство $S_{P_n}(A)$ гомотопически плотно в $P_n(X)$.

Доказательство. Пусть X — произвольный компакт и $A \subset X$,A замкнуто в X, $A \neq X$. Возможны два случая:
1. Компакт X конечен;
2. Компакт X бесконечен.

Рассмотрим отдельно 1. Если X конечное n-элементное множество, то $P_n(X)$ аффинно гомеоморфно симплексу σ^{n-1}.

В этом случае множеств $S_{P_n}(A)$ не пусто и выпукло. Следовательно, является гомотопически плотно в $S_{P_n}(A)$.

2. Пусть X бесконечно и $A \neq X$. Искомую гомотопию $h(\mu, t) : P_n(X) \times [0, 1] \to P_n(X)$ строим, полагая $h(\mu, t) = (1 - t)\mu + t\mu_0$, где μ_0 — фиксированная точка множества $P_n(X \backslash A)$. Например, мера Дира δ_{x_0} в точке $x_0 \in X \backslash A$, $t \in [0, 1]$.

Если $t = 0$, то $h(\mu, 0) = (1 - 0)\mu + 0 \cdot \mu_0 = \mu$, т. е. $h(\mu, 0) = id_{P_n(X)}$.

Если $t \in (0, 1)$, то $h(\mu, t) = (1 - t)\mu + t \cdot \mu_0$. В этом случае носитель меры $h(\mu, t)$ содержит точки $\mathrm{supp}\mu$ и точки $\mathrm{supp}\mu$, т. е. $\mathrm{supp} h(\mu, t) \supseteq \mathrm{supp}\mu \bigcup \mathrm{supp}\mu_0$. Это означает, что $h(\mu, t) \in S_{P_n}(A)$.

Следовательно, множество $S_{P_n}(A)$ гомотопически плотно в $P_n(X)$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Для любого бесконечного компакта X и его замкнутого подмножества A, отличного от X, подпространство $P(X) \backslash P(A)$ гомотопически плотно в $P(X)$.

Доказательство. Пусть X — бесконечный компакт и $A \subset X$, $A = \bar{A}$, $A \neq X$. В этом случае $P(X)$ гомеоморфно гильбертовому кубу $Q = \prod_{i=1}^{\infty} [-1, 1]_i$, т. е. $P(X) \simeq Q = \prod_{i=1}^{\infty} [-1, 1]_i$, где $[-1, 1]$ отрезок в R. Искомую гомотопию $h(\mu, t) : P(X) \times [0, 1] \to P(X)$ строим, полагая

$$h(\mu, t) = (1 - t)\mu + t\mu_0,$$

где $\mu \in P(X)$, $\mu_0 \in P(X) \backslash P(A)$.
Если $\mu \in P(X)$ и $t = 0$, то $h(\mu, 0) = (1 - 0)\mu + 0 \cdot \mu_0 = \mu$, т. е. $h(\mu, 0) = id_{P_n(X)}$.
Если $t \in (0, 1]$, тогда $h(\mu, t) = (1 - t)\mu + t \cdot \mu_0$. Носитель меры $h(\mu, t)$ содержит целиком отрезок [0; 1] и не лежит в множестве A. Следовательно, мера $h(\mu, t) \bar{\in} P(A)$. Отсюда, мера $h(\mu, t) \in P(X) \backslash P(A)$. Это означает, что подпространство $P(X) \backslash P(A)$ гомотопически плотно в $P(X)$. Теорема 3 доказана.

Следствие. Для любого компакта X и любой точки $x_0 \in X$ верно:
а) $S_{P_n}(x_0)$ гомотопически плотно в $P_n(X)$;
б) подпространство $P(X) \backslash \delta_{x_0}$ гомотопически плотно в $P(X)$.

Заключение

В заключение отметим сформулированные и доказанные в данной статье теоремы о топологических свойствах многообразий — подпространств гомотопически плотных в пространстве вероятностных мер с конечными носителями на компакте.

1. Для любого компакта X подпространство $P_{n,n-1}(X)$ пространства $P_n(X)$ является $(n-1)$-мерным многообразием и гомотопически плотным в $P_n(X)$.

2. Для любого компакта X и любого замкнутого подмножества $A \subset X$, отличного от X, подпространство $S_{P_n}(A)$ гомотопически плотно в $P_n(X)$.

3. Для любого бесконечного компакта X и его замкнутого подмножества A, отличного от X, подпространство $P(X)\backslash P(A)$ гомотопически плотно в $P(X)$.

Литература

[1] Banakh T., Radul T., Zarichny M. Absorbing sets in infinite-dimensional manifolds. Mathematical Studies Monograph Series 1. L'viv: VNTL Publishers, 1996, 232 p.

[2] Banakh T.O., Radul T.N. Topology of spaces of probability measures // Sbornik: Mathematics, 1997. Vol. 188, Issue 7, Pp. 973–995. DOI: http://doi.org/10.1070/sm1997v188n07ABEH000241.

[3] Banakh T., Sakai K. Characterizations of (R^∞, σ)- or (Q^∞, Σ)-manifolds and their applications // Topology and its Applications. 2000. Vol. 106, Issue 2. Pp. 115–134. DOI: https://doi.org/10.1016/S0166-8641(99)00081-4.

[4] Newton Nigel J. Infinite-dimensional statistical manifolds based on a balanced chart // Bernoulli. 2016. Vol. 22, № 2. Pp. 711–731. DOI: https://doi.org/10.3150/14-BEJ673.

[5] Zhuraev T.F., Rakhmatullaev A.Kh., Tursunova Z.O. Some values subfunctors of functor probalities measures in the categories Comp. // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия, 2018, Т. 24, № 2. С. 28–32. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-2-28-32.

[6] Zhuraev T.F. [et al.]. On Some Homotopically Dense Subspaces of the Space P(X) of Probability Measures Defined by an Infinite Metric Compact Set X // Journal of Pharmaceutical Negative Results. Volume 13 (Special Issue 3). 2022. Pp. 1768–1773. DOI: http;//doi.org/10.47750/pnr.2022.13.S03.270.

[7] Zhuraev T.F., Dolgopolov M.V. Equivariant properties of the space Z(X) for a stratifiable space X // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия, 2023. Т. 29, № 2. С. 40–47. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-2-40-47.

[8] Zhuraev T.F., Zhuvonov K.R., Gaimnazarov O.G., Anorboev M.M., Saitmuratov U.N. Homotopically dense properties of the Alexandrov compactification of some subspaces of the space of probability measures // European Chemical Bulletin. 2023, Vol. 12, Special Issue 6, Pp. 2343–2355. URL: https://www.eurchembull.com/uploads/paper/5d4861149c35a43d2bb1a6a141330bea.pdf.

[9] Жураев Т.Ф., Турсунова З.О. О некоторых геометрических и топологических свойствах вероятностных мер, определенных в бесконечном компакте // *Uzbek Mathematical journal.* 2016. № 1. С. 39–48. URL: https://drive.google.com/file/d/1K2CCKVaxGc-Q7F8zHxSeVIIHRbXfVgV2/view.

[10] Жураев Т.Ф. Некоторые геометрические свойства функтора вероятностных мер и его подфункторов: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва: МГУ, 1989. 90 с.

[11] Федорчук В.В. Вероятностные меры в топологии // Успехи математических наук. 1991. Т. 46, Вып. 1 (277). С. 41–80. URL: https://www.mathnet.ru/rus/rm4568.

 Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-3-31-36

Submited: 24.07.2023
Revised: 31.08.2023
Accepted: 30.10.2023

M.V. Dolgopolov
Samara State Technical University, Samara, Russian Federation
E-mail: mikhaildolgopolov68@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8725-7831
T.F. Zhuraev
Tashkent State Pedagogical University named after Nizami, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: tursunzhuraev@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0009-0005-5379-3862

ON EUCLIDEAN MANIFOLDS BEING A SUBSPACE OF THE SPACE OF PROBABILITY MEASURES WITH FINITE SUPPORTS TO A CERTAIN INFINITE COMPACT SET OF DIMENSION ZERO

ABSTRACT

In this short communication we prove that the subspace $P_{n,n-1}(X)$ of all probability measures $P(X)$, whose supports consist of exactly n points is an $(n-1)$-dimensional topological manifold. A number of subspaces of the space of all probability measures having infinite dimension in the sense of dim, which are manifolds, are identified. We also consider individual subsets of the infinite compact set X, on which the space of probability measures is homotopy dense in the entire space. Three theorems on the topological properties of manifolds—subspaces of homotopy dense probability measures in the space of probability measures with finite supports on a compactum—are formulated and proven, and special cases of finite and infinite compactums are considered.

Key words: subspace; probability measure; carrier; topological manifold; compact; functor; simplex; homotopy; homotopically dense subspace; dimension.

Citation. Dolgopolov M.V., Zhuraev T.F. On euclidean manifolds being a subspace of the space of probability measures with finite supports to a certain infinite compact set of dimension zero. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 3, pp. 31–36. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-3-31-36. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

Mikhail V. Dolgopolov — associate professor, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Department of Higher Mathematics, Samara State Technical University, 244, Molodogvardeyskaya Street, Samara, 443100, Russian Federation.

Tursunboy F. Zhuraev — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Mathematics, Tashkent State Pedagogical University named after Nizami, Tashkent State Pedagogical University named after Nizami, 27, Bunyodkor Street, Tashkent,700100, Uzbekistan.

References

[1] Banakh T., Radul T., Zarichny M. Absorbing sets in infinite-dimensional manifolds. Mathematical Studies Monograph Series 1. L'viv: VNTL Publishers, 1996, 232 p.

[2] Banakh T.O., Radul T.N. Topology of spaces of probability measures. *Sbornik: Mathematics*, 1997, vol. 188, issue 7, pp. 973–995. DOI: http://doi.org/10.1070/sm1997v188n07ABEH000241.

[3] Banakh T., Sakai K. Characterizations of (R^{∞}, σ)- or (Q^{∞}, Σ)-manifolds and their applications. *Topology and its Applications*, 2000, vol. 106, issue 2, pp. 115–134. DOI: https://doi.org/10.1016/S0166-8641(99)00081-4.

[4] Newton Nigel J. Infinite-dimensional statistical manifolds based on a balanced chart. *Bernoulli*, 2016, vol. 22, no. 2, pp. 711–731. DOI: https://doi.org/10.3150/14-BEJ673.

[5] Zhuraev T.F., Rakhmatullaev A.Kh., Tursunova Z.O. Some values subfunctors of functor probalities measures in the categories Comp. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2018, vol. 24, no. 2, pp. 28–32. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-2-28-32.

[6] Zhuraev T.F. et al. On Some Homotopically Dense Subspaces of the Space P(X) of Probability Measures Defined by an Infinite Metric Compact Set X. *Journal of Pharmaceutical Negative Results. Volume 13 (Special Issue 3)*, 2022, pp. 1768–1773. DOI: http;//doi.org/10.47750/pnr.2022.13.S03.270.

[7] Zhuraev T.F., Dolgopolov M.V. Equivariant properties of the space Z(X) for a stratifiable space X. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 2, pp. 40–47. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-2-40-47.

[8] Zhuraev T.F., Zhuvonov K.R., Gaimnazarov O.G., Anorboev M.M., Saitmuratov U.N. Homotopically dense properties of the Alexandrov compactification of some subspaces of the space of probability measures. *European Chemical Bulletin*, 2023, vol. 12, special issue 6, pp. 2343–2355. Available at: https://www.eurchembull.com/uploads/paper/5d4861149c35a43d2bb1a6a141330bea.pdf.

[9] Zhuraev T.F., Tursunova Z.O. On some geometric and topological properties of probability measures defined in an infinite compact. *Uzbek Mathematical Journal*, 2016, no. 1, pp. 39–48. Available at: https://drive.google.com/file/d/1K2CCKVaxGc-Q7F8zHxSeVIIHRbXfVgV2/view. (In Russ.)

[10] Zhuraev T.F. Some geometric properties of the functor of probabilistic measures and its subfunctors: Candidate of Physical and Mathematical Sciences thesis. Moscow: MGU, 1989, 90 p. (In Russ.)

[11] Fedorchuk V.V. Probability measures in topology. *Russian Mathematical Surveys*, 1991, vol. 46, issue 1, pp. 45–93. DOI: https://doi.org/10.1070/RM1991v046n01ABEH002722. (In English; original in Russian)