Научная статья
DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-3-24-30

УДК 512.6

Дата: поступления статьи: 19.07.2023
после рецензирования: 21.08.2023
принятия статьи: 30.10.2023

М.В. Долгополов
Самарский государственный технический университет, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: mikhaildolgopolov68@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8725-7831
К.Р. Жувонов
Национальный исследовательский университет "Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства", г. Ташкент, Узбекистан
E-mail: qamariddin.j@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0009-0008-7561-0862

О ГОМОТОПИЧЕСКИ ПЛОТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ ПРОСТРАНСТВА ПОЛНЫХ СЦЕПЛЕННЫХ СИСТЕМ

АННОТАЦИЯ
В данной статье рассматриваются топологические и геометрические свойства множества сцепленных систем ξ и свойства его подпространств, являющихся гомотопически плотными. Представлены теоремы для метризуемого невырожденного континуума, определены условия для гомотопически плотного множества компакта и условия определения многообразия для конечномерного множества в зависимости от того, что оно не содержит гильбертов куб.

Ключевые слова: подпространство; топологические свойства множества; геометрические свойства множества; топологическое многообразие; гомотопически плотное подпространство; метризуемый невырожденный континуум; конечномерное множество; гильбертов куб.

Цитирование. Долгополов М.В., Жувонов К.Р. О гомотопически плотных подпространствах пространства полных сцепленных систем // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2023. Т. 29, № 3. С. 24–30. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-3-24-30.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Михаил Вячеславович Долгополов — доцент, кандидат физико-математических наук, кафедра высшей математики, Самарский государственный технический университет, 443100, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.
Камариддин Ризокулович Жувонов — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры высшей математики, Национальный исследовательский университет "Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства", 100000, Республика Узбекистан, г. Ташкент, ул. Кары Ниязова, 39.

Введение

Хорошо известно, что многие замечательные топологические пространства возможно охарактеризовать с помощью краткого перечня их топологических свойств [1–9]. С начала 70-х годов прошлого века и по настоящее время были доказаны многие знаменитые теоремы о характеристиках многообразий гильбертова пространства и многообразий куба Гильберта. По сути методы доказательства были основаны на полноте рассматриваемых пространств. Доказательства некоторых теорем были реализованы различными методами в работах М. Бествины, Дж. Могильски, Дж. Уэста, Андерсона, Бессаги и Пельчинского [5], они кристаллизовали понятие поглощающего множества в многообразии гильбертова пространства. В недавних исследованиях также отмечается возросший интерес к теории кардинальных инвариантов и их поведению при различных ковариантных функторах.

В данной статье рассматриваются топологические и геометрические свойства множества сцепленных систем ξ и свойства его подпространств, являющихся гомотопически плотными. Введены определения, доказан ряд утверждений и сформулированы результаты в виде теорем для гомотопически плотного множества компакта и условия определения многообразия для конечномерного множества, не содержащего гильбертов куб.

1. Постановка задачи и вводные определения

Пусть X – топологическое пространство. Рассмотрим систему $\xi = \{F_\alpha : F_\alpha \subseteq X, \overline{F_\alpha} = F_\alpha, \alpha \in A\}$ замкнутых подмножеств пространства.

Будем использовать ряд предварительных вводных определений, которые представим ниже.

Система ξ называется сцепленной, если любые два ее элемента имеют непустое пересечение.

Сцепленная система ξ замкнутых подмножеств пространства X называется максимальной, если она обладает следующим свойством:

Если замкнутое множество $A \subset X$ пересекается с каждым элементом из ξ, то $A \in \xi$ [1]. (*)

Сцепленную систему ξ замкнутых подмножеств назовем полной [3], если для всякого замкнутого множества верно следующее условие:

Любая окрестность OF множества F содержит множество $\Phi \in \xi$ [3]. (**)

Заметим, что для всякой сцепленной системы ξ существует наименьшая полная сцепленная система (коротко, п.с.с.) ξ_f, содержащая ξ. Систему ξ_f, которую будем называть пополнением ξ, которая может быть построена путем присоединения к ξ всех замкнутых подмножеств $F \in X$, удовлетворяющих условию (**).

Пусть ξ – максимальная сцепленная система (м.с.с.) замкнутых подмножеств X. Подсистему $\xi' \subset \xi$ назовем базой ξ, если для любого $F \in \xi$ существует такое $\Phi \in \xi'$, что $\Phi \subset F$.

Нетрудно показать, что система ξ_H наименьших (по включению) элементов м.с.с. ξ является наименьшей базой ξ. Носителем м.с.с. ξ будем называть множество $H(\xi) = \bigcup \xi_H$.

Напомним, что суперрасширением топологического пространства X называется множество $\lambda(X)$, состоящее из всех максимальных сцепленных систем замкнутых подмножеств пространства X, а множество всех полных сцепленных систем (п.с.с.) замкнутых подмножеств пространства обозначается через $N(X)$.

Отметим, что всякая максимальная (по включении) сцепленная система замкнутых подмножеств (м.с.с.) является полной. Отсюда можем писать суперрасширение $\lambda(X)$ — это подпространство $N()$, т. е. $\lambda(X) \in N()$.

Пусть X – бесконечный компакт. Положим

$$\lambda_n X = \{\xi : \xi \in \lambda X, \, |H(\xi)| \leqslant n\}.$$

Заметим прежде всего, что $\lambda_1 X \sim X$ (отождествляем м.с.с. ξ с ее одноточечным носителем) и $\lambda_2 X = \lambda_1 X$, поскольку не существует м.с.с., носитель которой состоял бы ровно из двух точек. Однако при $n \geqslant 3$ все подмножества $\lambda_n X$ различны.

В самом деле, для любого $n \geqslant 3$ нетрудно построить м.с.с. $\xi \in \lambda X$, носитель которой состоит из n точек $x_1, ..., x_n$. Например, ξ можно задать с помощью такой базы:

$$\xi' = \{x_2, ..., x_n\} \bigcup \{\{x_1, x_k\} : k = 2, ..., n\}.$$

Нетрудно показать, что все подмножества $\lambda_n X$, $n \geqslant 3$, замкнуты в λX, следовательно, пространства $\lambda_n X$ являются компактами.

Множество всех полных сцепленных систем (п.с.с.) замкнутых подмножеств пространства X обозначается через $N(X)$.

Систему замкнутых подмножеств m пространства X назовем K-сцепленной, если пересечение любых K элементов системы m непусто.

Через $N_K(X)$ обозначим множество всех полных K-сцепленных систем (коротко, $n_k cc$) пространства X. Заметим, что пополнение x_f всякой K-сцепленной системы является $n_k CC$ и пространство $N_K(X)$ замкнуто в $N_(X)$. Следовательно, $N_K(X)$ является компактом [3].

В работе [3] показано, что для K-сцепленной системы континуума Пеано X пространства $N_K(X)$ гомеоморфны гильбертовому кубу Q. Для всякой полной сцепленной системы определим ее носитель как объединение минимальных по включению элементов. Следовательно, для любого натурального числа n можно определить подпространство $N^n(X)$ пространства $N(X)$, состоящее из всех п.с.с., носитель которых состоит не более чем из n точек, т. е. $N^n(X) = \{xON(x) : |\mathrm{supp}x|Jn\}$.

Отметим, что всякая максимальная (по включении) сцепленная система замкнутых подмножеств (м.с.с.) является полной. Отсюда, можем писать суперрасширение $\lambda(X)$ – это подпространство $N(X)$, т. е. $\lambda(X) \subset N(X)$.

Заметим, что существует полная с.с. ξ, которая не является м.с.с.

Пример 1 [4]. Пусть $X = [-10, 10]$ и $\xi = \{[0, 2], [1, 3]\}$ — сцепленная система. Рассмотрим сцепленную систему $m = \{F \in \exp X : [0, 1] \subset F$ или $[1, 3] \subset F\}$. Сцепленная система m является полной, но не является максимальной сцепленной системой.

Из этого примера следует, что разность $N(X)\backslash\lambda(X) \neq \emptyset$.

Пусть X нормальное T_1-пространство. Для множества A пространства X положим $A^+ = \{m \in \in \lambda(X)$: для некоторого $M \in m, M \subset A\}$. Обозначим $L = A^+ : A$ замкнуто в $X\}$. Семейство всех объединений вверх направленных пересекающихся подсемейств в L порождает выпуклость в X. Эта выпуклость называется канонической выпуклостью в $\lambda(X)$, где X — хаусдорфовое компактное пространство.

Общая выпуклость определяется полутопами и выпуклыми оболочками каждых конечных множеств. Значит, в пространстве $\lambda(X)$ выпуклость порождается следующим образом: для м.с.с., $m_1, m_2, ..., m_k$. Эта выпуклость в $\lambda(X)$, положим $m \in co\{m_1, ..., m_k\}$, если $m \subset m_1 \bigcup m_2 \bigcup ... \bigcup m_k$. Эта выпуклость в $\lambda(X)$ удовлетворяет аксиоме отделимости S_4 и для нее верно следующее бинарное свойство:

Если D — конечное семейство попарно пересекающихся выпуклых множеств, то $\bigcap D \neq \emptyset$.

Это выпуклое семейство обозначим через $K\lambda(X)$. Очевидно, что $K\lambda(X)$ есть подпространство $\exp(\lambda X)$, состоящее из выпуклых подмножеств суперрасширения $\lambda(X)$, которое впервые определено Ван де Велом [2]. По определению, $K\lambda(X)$ состоит из точек $\xi^+ = \{\eta \in \lambda(X) : \xi \subset \eta\}$, где ξ — сцепленная система замкнутых подмножеств X.

В работе [3] А.В. Иванов доказал, что пространства $N(X)$ и $K\lambda(X)$ гомеоморфны. Гомеоморфизм $H : N(X) \to K\lambda(X)$ задается формулой $H(\xi_\lambda) = \xi^+$, т. е. $N(X) \cong K\lambda(X)$.

Пространство X естественно вкладывается в $\lambda(X)$: точка $x \in X$ отождествляется в м.с.с. $\xi_x = \{F \subset \subset X : x \in F\}$.

Как уже отмечалось, множество $\lambda(X)$ содержится в $N(X)$. Пусть $U_1, ..., U_k,\ V_1, V_2, ..., V_n$ — набор открытых подмножеств X.

Положим $O(U_1, ..., U_k)(V_1, ..., V_n) \bigcap \lambda(X) = \ = O(U_1, ..., U_k)(V_1, ..., V_n)$, где $O(U_1, ..., U_k)(V_1, ..., V_n) = \{\xi \in \in N(X)$: для любого $i = \overline{1, k}$ существует $F_i \in \xi$ такое, что $F_i \subset U_i$, и для любого $j = \overline{1, k}$ и любого $\Phi \in \xi$ пересечение $\Phi \bigcap V_j$. непусто$\}$. Совокупность подмножеств $N(X)$ вида $O(U_1, ..., U_k)(V_1, ..., V_n)$ является открытой базой некоторой топологии на $N(X)$.

Таким образом, суперасширение $\lambda(X)$ – это подпространство $N(X)$. Из гомеоморфности $N(X)$ и $K\lambda(X)$ вытекает, что $\lambda(X) \subset K\lambda(X)$ и $K\lambda(X) \subset \exp\lambda(X)$.

В работе [2] доказано, что $K\lambda(X)$ – бикомпакт. Следовательно, $N(X)$ тоже бикомпактно.

В силу работы Ван де Вела [2] и А.В. Иванова [3] вытекает, что для любого метризуемого континуума X, пространства $N(X)$ и $K\lambda(X)$ гомеоморфны гильбертовому кубу Q.

Приведем следующие обозначения [5]:

$Q = \prod_{i=1}^{\infty}[-1; 1]_i$ — гильбертов куб, где отрезок

$W_i^{\pm} = \{(g_j)\} \in Q : g_j = \pm 1\}$ — I грань куба Q;

$BdQ = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i^{\pm}$ — псевдограница куба Q;

$S = Q\backslash BdQ$ — псевдовнутренность куба Q; $S = (-1, 1)^\omega$

$S \approx \ell_2$ — сепарабельное гильбертово пространство;

$\sum$ — линейная оболочка стандартного кирпича в гильбертовом пространстве ℓ_2;

$rintQ = \{x = (x_n) \in Q : |x_n| < t < 1$ для произвольного $n \simeq \bigcup\{[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]^\omega : n \in N\} \subset S$,

$BdQ \approx \sum$ (Андерсон в [5]);

$rintQ \approx BdQ$ (Бессага–Пелчинский [5]);

Q^f – подпространство куба Q, состоящее из всех точек, лишь конечное число координат которых отлично от нуля.

ℓ_2^f – линейное подпространство гильбертова пространства ℓ_2 , состоящее из всех точек лишь конечного числа координат, которые отличны от нуля.

Пусть на компакте X имеется метрика p. Тогда топология суперрасширения $\lambda(X)$ порождается следующей метрикой $\bar{\rho}$:

$\bar{\rho}(\xi, n) = \sup\limits_{M \in \xi}\{\inf\limits_{N \in \eta} \rho_H(M, N)\}$, где ρ_H – расстояние Хаусдорфа в $\exp X$.

Напомним метрику ρ_H Хаусдорфа на компакте X: для $F_1, F_2 \in \exp X$ положим $\alpha(F_1, F_2) = \inf\{\varepsilon : \varepsilon > 0,\, F_1 \subset O_\varepsilon(F_2)$ или $F_2 \subset O_\varepsilon(F_1)\}$ $\rho_H(F_1, F_2) = \max\{\alpha(F_1, F_2); \alpha(F_2, F_1)\}$ — метрика Хаусдорфа.

Легко видеть, что $\bar{\rho}(\xi, \eta) \leqslant \varepsilon$ тогда и только тогда, когда $B(F, \varepsilon) \in \eta$ для любого $F \in \xi$ и $B(X, \varepsilon) \in \eta$ для любого $\Phi \in \eta$, где $B(F, \varepsilon) = \{x : \rho(X, F) \leqslant \varepsilon\}$ – замкнутая ε-окрестность множества F в пространстве X.

Пусть $\bar{\rho}_H$ – метрика Хаусдорфа на $\exp \lambda(X)$, и $\bar{\rho}_H$ — ограничение $\bar{\rho}_H$ на подпространстве $K\lambda(X)$, которое мы отождествляем по сказанному, гомеоморфизму *с N(X).*

Для метризуемого континуума X по теореме Ван Милла [6] $\lambda(X)$ гомеоморфно Q. Следовательно, $\exp \lambda(X)$ тоже гомеоморфно Q. Заметим, что во всяком континууме Пеано существует выпуклая метрика, т. е. для любого замкнутого $F \subset X$ справедливо равенство

$$B(B(F, \varepsilon_1), \varepsilon_2) = B(F, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon).$$

2. Предложение и теоремы

В работе [6] имеется следующее предложение.

Предложение [6]. Пусть $\mu = \{\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n\}$ – конечная сцепленная система замкнутых множеств компакта X. Тогда система $M = \{F \in \exp X$: существует $\Phi_i \subset \mu, \Phi_i \subset F\}$ является полной сцепленной системой в X.

Для компакта X через $\lambda_\omega(X)$ обозначим ответственно подмножества $\bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda_n(X)$. Очевидно, что это подмножество – σ-компакт и всюду плотно в пространствах $\lambda(X)$.

Для бикомпакта X через $\lambda_\omega(X)$, $N_\omega(X)$ и $N^\omega(X)$ обозначим соответственно подмножества $\bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda_n(X)$, $\bigcup_{K=1}^{\infty} N_K(X)$ и $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n(X)$. Очевидно, что эти подмножества σ-компакты и всюду плотны в пространствах $\lambda(X)$ и $N(X)$ соответственно.

Определение [7; 9]. Множество $B(Q)$ называется граничным множеством в Q, если $Q \backslash B(Q) \approx \ell_2$.

Заметим, что псевдограница BdQ гильбертова куба Q является граничным множеством куба Q. Используем обозначения, введенные в конце предыдущего п. 1.

Дополнительное определение [10]. Пространство X называется слабосчетномерным, если X является счетным объединением своих замкнутых конечномерных подпространств.

Определение [7]. Топологическое пространство X называется многообразием, моделированным на пространстве Y, или Y-многообразием, если всякая точка пространства X имеет окрестность, гомеоморфную открытому подмножеству пространства Y.

Заметим, что для любого метризуемого невырожденного компакта X пространства $\lambda(X)$ и $N(X)$ гомеоморфны гильбертовому кубу Q. Для каждого $n \geqslant 3$ подпространства $\lambda_n(X)$ замкнуты в $\lambda(X)$. Пространства $\lambda(X) \backslash \lambda_n(X)$ $(n \geqslant 3)$ есть открытые подмножества компакта $\lambda(X)$.

С другой стороны, нами было замечено, что в этих случая компакт $\lambda(X)$ есть подмножество компакта $N(X)$, т. е. $N(X) \backslash \lambda(X)$ открыто в $N(X)$. Открытые подмножества гильберотова куба Q есть Q-многообразия. Следовательно, имеют место представленные ниже теоремы.

Теорема 1. Для любого метризуемого невырожденного континуума X имеем:
а) $N(X) \backslash \lambda_n(X)$ является Q-многообразием для любого $n \geqslant 2$,
б) $\lambda(X) \backslash \lambda_n(X)$ является Q-многообразием для любого $n \geqslant 2$.

Теорема 2. Для любого метризуемого невырожденного континуума имеет место:
а) $N(X) \backslash \lambda(X)$ является Q-многообразием;
б) $K\lambda(X) \backslash N(X)$ является Q-многообразием.

Напомним, что для компакта X непустой компакт $G \subseteq \exp X$ называется гиперпространством роста, если то, что $A \in G$, $B \in \exp X$, $A \subset B$ и каждая компонента связности множества B пересекается с А, это далее влечет $B \in G$ [7; 8].

Это пространство обозначается через $G(X)$. Если в этом определении опущены требования компоненты связности так, что соответствующее пространство называется гиперпространством вложения и обозначается через $G(X)$, то имеет место утверждение:
$G(X) \simeq Q \Leftrightarrow X -$ метризуемый континуум.

Пусть $\xi_1, \xi_2 \in N(X)$ и $\xi_1 \neq \xi_2$. Тогда без ограничения можно считать, что существует $F \in \xi_1$ и окрестность $OF \supset F$ такие, что ни один элемент ξ_2 не лежит в OF, т. е. для любого $\Phi \in \xi_2$ имеет место $\Phi \bigcap X \backslash OF \neq \emptyset$.

Таким образом, система $\xi_2' = \xi_2 \bigcup (X \backslash OF)$ сцепленная. Пусть η – м.с.с., содержащая ξ_2'. Имеем $\eta \in \xi_1^+$ и $\eta \notin \xi_2^+$, поскольку $F \in \xi_1$ и $F \in \eta$. Итог $\xi_1^+ \neq \xi_2^+$.

Замечание [8]. Для любых точек $\xi, \eta \in N(X)$ эквивалентны условия:
1) $\rho_H(\xi, \eta) \leqslant \varepsilon$;
2) $B(F, \varepsilon) \in \eta$ для любого $F \in \xi$ и $B(\Phi, \varepsilon) \in \xi$ для любого $\Phi \in \eta$.

Пусть X — метризуемый континуум. $A \subset X$, $intA \neq \emptyset$, $\bar{A} = A$. Тогда $A^+ = \{\xi \in \lambda(X) : A \in \xi\}$ есть Z-множество в $\lambda(X)$ [5], т. е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists f : \lambda(X) \to \lambda(X) \backslash A^+$ такое, что $\rho(\xi, f(\xi)) < \varepsilon$ для любого $\xi \in \lambda(X)$.

Множество $A \subset X$ называется гомотопически плотным в X [9], если существует гомотопия $h(x,t) : X \times [0,1] \to X$ такая, что $h(x,0) = id_X$ и $h(X,(0,1]) \subset A$.

Теорема 3. Для любого пеановского континуума X подпространство $N(X)\backslash\lambda_\omega(X)$ гомотопически плотно в $N(X)$.

Доказательство. Пусть $\xi \in \lambda(X)$. Для числа $t \in [0,1]$ и замкнутого множества $A \in \exp X$ положим $D(A,t) = \{x \in X : \rho(x,A) \leqslant t\}$. Мы будем считать, что $diam_\rho X \leqslant 1$. Очевидно, что для любого $t \in [0,1]$ множество $D(A,t) \in \exp X$.

Известно, что ξ есть м.с.с., состоящих из замкнутых множеств, т. е. $\xi = \{A_\alpha : A_\alpha \in \exp X$, $\alpha-$ индекс$\}$. Для ξ положим $\xi(t) = \{D(A_\alpha, t) : A_\alpha \in \xi\}$. Теперь построим гомотопию $h(\xi,t) : N(X) \times [0,1] \to N(X)$, полагая $h(\xi,t) = \xi(t)$.

Заметим, что:

а) если $\xi \in N(X)$, то $\xi(t) \in N(X)$;

б) если $\xi \in \lambda(X)$, $\xi(t) \in N(X)$ и $\xi(t) \bar{\in} \lambda_\omega(X)$;

в) если $\xi \in \lambda(X)$, то $\xi(0) \in \lambda(X)$.

Значит, подмножество $\lambda_{\nabla\omega}(X) \subset N(X)$ гомотопически плотно в $N(X)$. Теорема 3 доказана.

Используя результаты работ [7–9], доказываются следующие теоремы 4 и 5.

Теорема 4. Для любого метризуемого невырожденного компакта X подпространство $\lambda_\omega(X)$ является граничным множеством компакта $\lambda(X)$.

Теорема 5. Для любого метризуемого невырожденного компакта X подпространство $\lambda(X)\backslash\lambda_\omega(X)$ является полным сепарабельным бесконечной размерности метрическим AR-пространством.

3. Результаты для метризуемого невырожденного континуума

В результате для метризуемого невырожденного континуума сформулированы следующие теоремы.

Теорема 6. Для любого метризуемого невырожденного континуума X имеет место:

а) $\lambda_\omega(X)$ является гомотопически плотным множеством компакта $\lambda(X)$;

б) $N_\omega(X)$ является гомотопически плотным множеством компакта $N(X)$;

в) $N_\omega(X)$ является гомотопически плотным множеством компакта $K\lambda(X)$.

Для любого слабосчетномерного компакта X пространств $\lambda_\omega(X)$ слабосчетномерно. Пространства ℓ_2^f и Q^f слабосчетномерны [5].

Теорема 7. Для любого метризуемого невырожденного континуума X имеем:

а) $N(X)\backslash N_n(X)$ — гомотопически плотное подмножество для любого $n \geqslant 2$;

б) $\lambda(X)\backslash\lambda_n(X)$ является гомотопически плотным подмножеством для любого $n \geqslant 2$;

в) $N(X)\backslash N^n(X)$ является гомотопически плотным подмножеством для любого $n \geqslant 2$.

Теорема 8. Для любого метризуемого невырожденного континуума X имеет место:

а) пространство $N^\omega(X)$ является $\sum$-многообразием;

б) пространство $N_\omega(X)$ является $\sum$-многообразием, если $N_\omega(X)$ содержит гильбертов куб Q;

в) пространство $\lambda_\omega(X)$ является $\sum$-многообразием, если $\lambda_\omega(X)$ содержит гильбертов куб Q.

Для любого метризуемого невырожденного континуума X имеет место:

а) пространство $N^\omega(X)$ является ℓ_2^f- (или Q^f-) многообразием, если X конечномерно;

б) пространство $\lambda_\omega(X)$ является ℓ_2^f- (или Q^f-) многообразием, если X конечномерно;

в) пространство $\lambda_\omega(X)$ является ℓ_2^f- (или Q^f-) многообразием, если $\lambda_\omega(X)$ не содержит гильбертов куб Q;

г) пространство $N_\omega(X)$ является ℓ_2^f- (или Q^f-) многообразием, если $N_\omega(X)$ не содержит гильбертов куб Q.

Заключение

В заключение подведем итог, что на основе доказательства свойств топологических и геометрических подпространств множеств сцепленных систем, являющихся гомотопически плотными, сформулированы теоремы для метризуемого невырожденного континуума, определены условия для гомотопически плотного множества компакта и условия определения многообразия для конечномерного множества в зависимости от того, что оно не содержит гильбертов куб.

В доказательствах и теоремах использованы следующие утверждения. Для любого метризуемого невырожденного континуума подпространства полных сцепленных систем гомеоморфны гильбертову кубу. При этом открытые подмножества гильбетрова куба есть Q-многообразия. Следовательно, определяются теоремы о соответствии подмножеств подпространств полных сцепленных систем Q-многообразию для любого количества точек носителя от двух.

Для любого пеановского континуума подпространство полных сцепленных систем гомотопически плотно во введенном классе множества всех полных сцепленных систем замкнутых подмножеств топологического пространства. Определены теоремами подпространство – граничное множество компакта и подпространство – полное сепарабельное бесконечной размерности метрическое пространство.

Литература

[1] Van Mill J. Superextensions of metrizable continua are Hilbert cubes // *Fundamenta Mathematicae*. 1980. Vol. 107, Number 3. Pp. 201–224. Available at: https://bibliotekanauki.pl/articles/1363946.

[2] Van de Vel M. Convex Hilbert cubes in superextensions // Topology and its Applications. 1986. Vol. 22, Issue 3, pp. 255–266. DOI: https://doi.org/10.1016/0166-8641(86)90024-6.

[3] Иванов А.В. О пространстве полных сцепленных систем // Сибирский математический журнал. 1986, Т. 27, № 6, С. 95–110. URL: https://www.mathnet.ru/rus/smj7212.

[4] Beshimov R.B., Mukhammadiyev F.G. Some cardinal properties of complete linked systems with compact elements and absolute regular spaces // Mathematica Aeterna. 2013. Vol. 3, No. 8. Pp. 625–633. URL: https://www.longdom.org/articles/some-cardinal-properties-of-complete-linked-systems-with-compact-elements-and-absolute-regular-spaces.pdf.

[5] Bessaga C., Pelczynski A. Selected Topics in Infinite-dimensional Topology. Monografie matematyczne. Warsaw: PWN-Polish Scientific Publisher, 1975, Vol. 58, 353 p. URL: https://onlybooks.org/selected-topics-in-infinite-dimensional-topology-monografie-matematyczne-no-58.

[6] Makhmud T. Cardinal-valued invariants of spaces of linked systems. Candidate thesis in Physics and Mathematics. Moscow State University, Moscow, 1993, 87 p.

[7] Богатый С.А., Федорчук В.В. Теория ретрактов и бесконечномерные многообразия // Итоги науки и техники. Сер.: Алгебра. Топология. Геометрия. 1986. Т. 24. С. 195–270. URL: https://www.mathnet.ru/rus/inta115.

[8] Жураев Т.Ф. Геометрические и топологические свойства пространств, являющихся значениями некоторых ковариантных функторов: дис. ... д-ра физ-мат. наук. Ташкент: Институт математики АН Республики Узбекистан, 2022. 198 с.

[9] Banakh T., Radul T., Zarichny M. Absorbing sets in infinite-dimensional manifolds. Mathematical Studies Monograph Series 1. L'viv: VNTL Publishers, 1996, 232 p.

[10] Федорчук В.В. Слабо бесконечномерные пространства // Успехи математических наук. 2007, Т. 62, Вып. 2 (374). С. 109–164. DOI: https://doi.org/10.4213/rm6212.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-3-24-30

Submited: 19.07.2023
Revised: 21.08.2023
Accepted: 30.10.2023

M.V. Dolgopolov
Samara State Technical University , Samara, Russian Federation
E-mail: mikhaildolgopolov68@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8725-7831
K.R. Zhuvonov
Tashkent National Research University "Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers", Tashkent, Uzbekistan
E-mail: qamariddin.j@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0009-0008-7561-0862

ON HOMOTOPICALLY DENSE SUBSPACES OF THE SPACE OF COMPLETE LINKED SYSTEMS

ABSTRACT

This article discusses the topological and geometric properties of the set of coupled systems and the properties of its subspaces that are homotopically dense. Theorems for a metrizable nondegenerate continuum are presented, conditions for a homotopically dense set of a compact set and conditions for determining a manifold for a finite-dimensional set depending on the fact that it does not contain a Hilbert cube are determined.

Key words: subspace; topological properties of a set; geometric properties of a set; topological variety; homotopy dense subspace; metrizable non-degenerate continuum; finite-dimensional set; Hilbert cube.

Citation. Zhuvonov K.R., Dolgopolov M.V. On homotopically dense subspaces of the space of complete linked systems. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 3, pp. 24–30. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-3-24-30. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

Mikhail V. Dolgopolov — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, Department of Higher Mathematics, Samara State Technical University, 244, Molodogvardeyskaya Street, Samara, 443100, Russian Federation.

Qamariddin R. Zhuvonov — senior lecturer of the Department of Higher Mathematics, Tashkent National Research University "Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers", 39, Kari Niyazov Street, Tashkent, 100000, Republic of Uzbekistan.

References

[1] Van Mill J. Superextensions of metrizable continua are Hilbert cubes. *Fundamenta Mathematicae*, 1980, vol. 107, no. 3, pp. 201–224. Available at: https://bibliotekanauki.pl/articles/1363946.

[2] Van de Vel M. Convex Hilbert cubes in superextensions. *Topology and its Applications*, 1986, vol. 22, issue 3, pp. 255–266. DOI: https://doi.org/10.1016/0166-8641(86)90024-6.

[3] Ivanov A.V. A space of complete linked systems. *Siberian Mathematical Journal*, 1986, vol. 27, issue 6, pp. 863–875. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00970004. (In English; original in Russian)

[4] Beshimov R.B., Mukhammadiyev F.G. Some cardinal properties of complete linked systems with compact elements and absolute regular spaces. *Mathematica Aeterna*, 2013, vol. 3, no. 8, pp. 625–633. Available at: https://www.longdom.org/articles/some-cardinal-properties-of-complete-linked-systems-with-compact-elements-and-absolute-regular-spaces.pdf.

[5] Bessaga C., Pelczynski A. Selected Topics in Infinite-dimensional Topology. Monografie matematyczne. Warsaw: PWN-Polish Scientific Publisher, 1975, Vol. 58, 353 p. URL: https://onlybooks.org/selected-topics-in-infinite-dimensional-topology-monografie-matematyczne-no-58.

[6] Makhmud T. Cardinal-valued invariants of spaces of linked systems. Candidate thesis in Physics and Mathematics. Moscow State University, Moscow, 1993, 87 p.

[7] Bogatyi S.A., Fedorchuk V.V. Theory of retracts and infinite-dimensional manifolds. *Journal of Soviet Mathematics*, vol. 44, issue 3, pp. 372–423. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01676870. (In English; original in Russian)

[8] Zhuraev T.F. Geometric and topological properties spaces which value some covariant functors: Doctoral of Physical and Mathematical Sciences thesis. Tashkent: Institut matematiki imeni V.I. Romanovskogo AN Respubliki Uzbekistan, 198 p. (In Russ.)

[9] Banakh T., Radul T., Zarichny M. Absorbing sets in infinite-dimensional manifolds. Mathematical Studies Monograph Series 1. L'viv: VNTL Publishers, 1996, 232 p.

[10] Fedorchuk V.V. Weakly infinite-dimensional spaces. *Russian Mathematical Surveys*, 2007, vol. 62, issue 2, pp. 109–164. DOI: https://doi.org/10.1070/RM2007v062n02ABEH004397. (In English; original in Russian)