МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-3-8-17

УДК 517.95

Дата: поступления статьи: 24.07.2023
после рецензирования: 31.08.2023
принятия статьи: 30.10.2023

Я.С. Бунтова
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: ynbuntova@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0009-0003-7786-8019

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ПЕРВОГО РОДА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ

АННОТАЦИЯ

В статье рассматривается задача с интегральными нелокальными условиями первого рода. Основной целью является доказательство однозначной разрешимости нелокальной задачи с интегральными условиями 1 рода, если ядра этих условий зависят не только от пространственной переменной, но и от времени. Показана эквивалентность нелокальной задачи с интегральными условиями 1 рода и нелокальной задачи с интегральными условиями 2 рода. Получены ограничения на входные данные, обеспечивающие единственность обобщенного решения поставленной задачи.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, нелокальная задача, интегральные условия, обобщенное решение.

Цитирование. Бунтова Я.С. Нелокальная задача с интегральными условиями первого рода для уравнения колебания струны // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия / Vestnik of Samara University. Natural Science Series. 2023. Т. 29, № 3. С. 8–17. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-3-8-17.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Яна Сергеевна Бунтова — аспирант кафедры дифференциальных уравнений и теории управления, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

1. Постановка задачи

Рассмотрим в области $Q = (0, l) \times (0, T)$, где $l, T < \infty$, уравнение

$$u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x = f(x,t) \tag{1}$$

и поставим следующую задачу: найти в области Q решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0) = \phi(x), u_t(x,0) = \psi(x) \tag{2}$$

и нелокальным условиям

$$\int_0^l K_1(x,t)u(x,t)dx = h_1(t), \int_0^l K_2(x,t)u(x,t)dx = h_2(t). \tag{3}$$

Будем считать, что $a(x,t) > 0$ в $\overline{Q}_T$.

Особенность поставленной задачи заключается не только в том, что условия (3) являются нелокальными интегральными условиями первого рода, но и в том, что их ядра $K_i(x,t)$ зависят и от переменной t.

Напомним, что нелокальными условиями принято называть соотношения, связывающие значения искомого в области Ω решения на некотором внутреннем многообразии и в точках границы области Ω.

В случае одной пространственной переменной нелокальные интегральные условия могут быть представлены следующим соотношением:

$$\alpha u(x,t) + \beta u_x(x,t) + \lambda \int_0^l K(x,t)u(x,t)dx = 0. \tag{$*$}$$

Если α и β не обращаются в ноль одновременно, то условие называется интегральным условием второго рода.

Если $\alpha = \beta = 0$, то условие называется интегральным условием первого рода. [3]

К настоящему времени имеется значительное количество статей, посвященых исследованию нелокальных задач с интегральными условиями [5–8; 11]. Разработаны методы исследования разрешимости нелокальной задачи с интегральными условиями второго рода [2; 5; 10]. Если в $(*)$ $\beta \neq 0$, то эффективным оказался метод, впервые реализованный в [4] для многомерного уравнения. Если же в $(*)$ $\alpha = \beta = 0$, то есть нелокальные условия первого рода, при обосновании рассуждения возникает много трудностей, отмеченных и в статьях [2; 6; 9]. Одним из способов преодолеть возникающие трудности является сведение условий первого рода к условиям второго рода, причем так, чтобы они оказались эквивалентными. Условия на входные данные, обеспечивающие возможность этой процедуры, отражены в следующей лемме.

Лемма. Пусть

$$\begin{gathered} K_i(x,t) \in C^2(\overline{Q}_T), \phi(x) \in W_2^1(0,l), \psi(x) \in L_2(0,l), h_i(t) \in C^2(0,T), \\ f(x,t) \in L_2(Q_T), \quad a(x,t), a_x(x,t) \in C(Q_T), \\ \triangle \equiv K_1(0,t)K_2(l,t) - K_1(l,t)K_2(0,t)) \neq 0, \forall t \in [0,T] \end{gathered}$$

и выполняются условия согласования

$$\begin{gathered} \int_0^l K_i(x,0)\phi(x)dx = h_i(0), \\ \int_0^l [K_i(x,0)\psi(x) + K_{it}(x,0)\phi(x)]dx = h_i'(0). \end{gathered} \tag{4}$$

Тогда нелокальные условия первого рода (3) эквивалентны нелокальным условиям второго рода

$$\begin{aligned} u_x(0,t) = \alpha_{11}u(0,t) + \alpha_{12}u(l,t) + \int_0^l P_1(x,t)u(x,t)dx + 2\int_0^l P_2(x,t)u_t(x,t)dx + G_1(t), \\ u_x(l,t) = \alpha_{21}u(0,t) + \alpha_{22}u(l,t) + \int_0^l P_3(x,t)u(x,t)dx + 2\int_0^l P_4(x,t)u_t(x,t)dx + G_2(t), \end{aligned} \tag{5}$$

где $\alpha_{ij}, P_i(x,t), G_i(x,t)$ выражаются через $K_i(x,t), a(x,t), f(x,t), h_i(t)$ и их производные.

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2), (3). Дифференцируя равенство (3) дважды по t, получим

$$\begin{gathered} \int_0^l (K_1(x,t)u_{tt}(x,t) + 2K_{1t}(x,t)u_t(x,t) + K_{1tt}(x,t)u(x,t))dx = h"_1(t), \\ \int_0^l (K_2(x,t)u_{tt}(x,t) + 2K_{2t}(x,t)u_t(x,t) + K_{2tt}(x,t)u(x,t))dx = h"_2(t). \end{gathered} \tag{6}$$

Теперь выразим из уравнения (1) $u_{tt}(x,t)$ и подставим в (6), получим

$$\begin{gathered} \int_0^l (K_1(x,t)(f + (a(x,t)u_x)_x) + 2K_{1t}(x,t)u_t(x,t) + K_{1tt}(x,t)u(x,t))dx = h"_1(t), \\ \int_0^l (K_2(x,t)(f + (a(x,t)u_x)_x) + 2K_{2t}(x,t)u_t(x,t) + K_{2tt}(x,t)u(x,t))dx = h"_2(t). \end{gathered} \tag{7}$$

Проинтегрируем теперь слагаемые, содержащие u_{xx} дважды, и получим

$$\begin{gathered}\int_0^l K_1(x,t)(a(x,t)u_x)_x dx = K_1(l,t)a(l,t)u_x(l,t) - K_1(0,t)a(0,t)u_x(0,t)+\\ +K_{1x}(0,t)a(0,t)u(0,t) - K_{1x}(l,t)a(l,t)u(l,t) + \int_0^l (K_{1x}(x,t)a(x,t))_x u(x,t)dx,\\ \int_0^l K_2(x,t)(a(x,t)u_x)_x dx = K_2(l,t)a(l,t)u_x(l,t) - K_2(0,t)a(0,t)u_x(0,t)+\\ +K_{2x}(0,t)a(o,t)u(0,t) - K_{2x}(l,t)a(l,t)u(l,t) + \int_0^l (K_{2x}(x,t)a(x,t))_x u(x,t)dx.\end{gathered} \tag{8}$$

Подставим (8) в (7)

$$\begin{gathered}\int_0^l K_1(x,t)fdx + K_1(l,t)a(l,t)u_x(l,t) - K_1(0,t)a(0,t)u_x(0,t) + K_{1x}(0,t)a(0,t)u(0,t)-\\ -K_{1x}(l,t)a(l,t)u(l,t) + \int_0^l (K_{1x}(x,t)a(x,t))_x u(x,t)dx + 2\int_0^l K_{1t}(x,t)u_t(x,t)dx+\\ +\int_0^l K_{1tt}(x,t)u(x,t)dx = h"_1(t),\\ \int_0^l K_2(x,t)fdx + K_2(l,t)a(l,t)u_x(l,t) - K_2(0,t)a(0,t)u_x(0,t) + K_{2x}(0,t)a(0,t)u(0,t)-\\ -K_{2x}(l,t)a(l,t)u(l,t) + \int_0^l K_{2x}(x,t)a(x,t))_x u(x,t)dx + 2\int_0^l K_{2t}(x,t)u_t(x,t)dx+\\ +\int_0^l K_{2tt}(x,t)u(x,t)dx = h"_2(t).\end{gathered} \tag{9}$$

Так как

$$\triangle \equiv K_1(0,t)K_2(l,t) - K_1(l,t)K_2(0,t)) \neq 0,$$

то (9) можно разрешить относительно $u_x(0,t)$ и $u_x(l,t)$. Выразим их из (9) и получим нелокальные условия второго рода:

$$\begin{gathered}u_x(0,t) = \alpha_{11}u(0,t) + \alpha_{12}u(l,t) + \int_0^l P_1(x,t)u(x,t)dx+\\ +2\int_0^l P_2(x,t)u_t(x,t)dx + G_1(t),\\ u_x(l,t) = \alpha_{21}u(0,t) + \alpha_{22}u(l,t) + \int_0^l P_3(x,t)u(x,t)dx+\\ +2\int_0^l P_4(x,t)u_t(x,t)dx + G_2(t),\end{gathered}$$

где

$$\alpha_{11} := \frac{1}{\triangle}[K_{1x}(0,t)K_2(l,t) - K_1(l,t)K_{2x}(0,t)],$$

$$\alpha_{12} := -\frac{a(l,t)}{a(0,t)\triangle}[K_{1x}(l,t)K_2(l,t) - K_1(l,t)K_{2x}(l,t)],$$

$$\begin{gathered}P_1(x,t) := \frac{1}{a(0,t)\triangle}[a(x,t)K_{1x}(x,t))_x K_2(l,t) - (a(x,t)K_{2x}(x,t))_x K_2(l,t)+\\ +K_{1tt}(x,t)K_2(l,t) - K_1(l,t)K_{2tt}(x,t)],\end{gathered}$$

$$P_2(x,t) := \frac{1}{a(0,t)\triangle}[K_{1t}(x,t)K_2(l,t) - K_1(l,t)K_{2t}(x,t)],$$

$$\begin{gathered}G_1(t) := -\tfrac{1}{a(0,t)\triangle}(\textstyle\int_0^l [K_1(x,t)K_2(l,t) - K_1(l,t)K_2(x,t)]fdx+\\ +h_{1tt}(t)K_2(l,t) - K_1(l,t)h_{2tt}(t)),\end{gathered}$$

$$\alpha_{21} := \frac{a(0,t)}{a(l,t)\triangle}[K_{1x}(0,t)K_2(0,t) - K_1(0,t)K_{2x}(0,t)],$$

$$\alpha_{22} := -\tfrac{1}{\triangle}[K_{1x}(l,t)K_2(0,t) - K_1(0,t)K_{2x}(l,t)],$$

$$P_3(x,t) := \frac{1}{a(l,t)\triangle}[(a(x,t)K_{1x}(x,t))_x K_2(0,t) - (a(x,t)K_{2x}(x,t))_x K_1(0,t)+$$
$$+K_{1tt}(x,t)K_2(0,t) - K_1(0,t)K_{2tt}(x,t)],$$

$$P_4(x,t) := \frac{1}{a(l,t)\triangle}[K_{1t}(x,t)K_2(0,t) - K_1(0,t)K_{2t}(x,t)],$$

$$G_2(t) := \frac{1}{a(l,t)\triangle}(\int_0^l [K_1(x,t)K_2(0,t) - K_1(0,t)K_2(x,t)]f dx-$$
$$-h_{1tt}(t)K_2(0,t) + K_1(0,t)h_{2tt}(t)).$$

Пусть теперь $u(x,t)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) и (5). Домножим уравнение (1) на $K_1(x,t)$ и проинтегрируем по отрезку $[0,l]$. Аналогичную процедуру проделаем с ядром $K_2(x,t)$, получим

$$\begin{aligned}
&\int_0^l K_1(x,t)u_{tt}(x,t)dx - \int_0^l K_1(x,t)(a(x,t)u_x)_x dx = \int_0^l K_1(x,t)f dx,\\
&\int_0^l K_2(x,t)u_{tt}(x,t)dx - \int_0^l K_2(x,t)(a(x,t)u_x)_x dx = \int_0^l K_2(x,t)f dx.
\end{aligned} \tag{10}$$

Подставим (8) в (10). Но тогда выполняются и равенства (6), из которых получены условия (5). Равенства (6) запишем в виде

$$\begin{aligned}
&\int_0^l (K_1(x,t)u(x,t))_{tt}dx - h"_1(t) = 0,\\
&\int_0^l (K_2(x,t)u(x,t))_{tt}dx - h"_2(t) = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Эти условия можно свернуть таким образом:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\int_0^l K_1(x,t)u(x,t)dx - h_1(t)\right] = 0,\\
&\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\int_0^l K_2(x,t)u(x,t)dx - h_2(t)\right] = 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Из условий согласования (4) вытекают начальные условия

$$\begin{aligned}
&\int_0^l K_i(x,0)u(x,0)dx = h_i(0),\\
&\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l K_i(x,t)u(x,t)dx|_{t=0} = h_i'(0), \forall i = 1,2.
\end{aligned} \tag{13}$$

Задача Коши (12), (13) имеет единственное решение

$$\begin{aligned}
&\int_0^l K_1(x,t)u(x,t)dx = h_1(t),\\
&\int_0^l K_2(x,t)u(x,t)dx = h_2(t),
\end{aligned}$$

что и означает выполнение условий (3).

2. Единственность решения задачи

Теперь рассмотрим частный случай этой задачи (1)–(3), в которой ядро представлено в виде $K_i(x,t) = \Phi_i(x)\Psi_i(t)$. Тогда условия (3) можно записать таким образом:

$$\int_0^l \Phi_i(x)\Psi_i(t)u(x,t)dx = h_i(t), i = 1,2. \tag{14}$$

Будем считать, что $\Psi_i(t) \neq 0$ всюду в $[0,T]$ и обозначим $\dfrac{h_i(t)}{\Psi_i(t)} = T_i(t)$, тогда (14) можно представить так:

$$\begin{aligned} &\int_0^l \Phi_1(x)u(x,t)dx = T_1(t), \\ &\int_0^l \Phi_2(x)u(x,t)dx = T_2(t). \end{aligned} \tag{15}$$

Условия (5) для этого частного случая выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} u_x(0,t) &= \alpha_{11}u(0,t) + \alpha_{12}u(l,t) + \int_0^l P_1(x,t)u(x,t)dx + G_1(t), \\ u_x(l,t) &= \alpha_{21}u(0,t) + \alpha_{22}u(l,t) + \int_0^l P_2(x,t)u(x,t)dx + G_2(t), \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\begin{gathered} \alpha_{11} := \frac{1}{\triangle}[\Phi_1'(0)\Phi_2(l) - \Phi_1(l)\Phi_2'(0)], \\ \alpha_{12} := -\frac{a(l,t)}{a(0,t)\triangle}[\Phi_1'(l)\Phi_2(l) - \Phi_1(l)\Phi_2'(l)], \\ P_1(x,t) := \frac{a_x}{a(0,t)\triangle}[\Phi_1''\Phi_2(l) - \Phi_1(l)\Phi_2''], \\ G_1(t) := \frac{1}{a(0,t)\triangle}(\int_0^l [\Phi_1(l)\Phi_2(x) - \Phi_1(x)\Phi_2(l)]fdx- \\ -T_1''(t)\Phi_2(l) + \Phi_1(l)T_2''(t)), \\ \alpha_{21} := \frac{a(0,t)}{a(l,t)\triangle}[\Phi_1'(0)\Phi_2(0) - \Phi_1(0)\Phi_2'(0)], \\ \alpha_{22} := -\frac{1}{\triangle}[\Phi_1'(l)\Phi_2(0) - \Phi_1(0)\Phi_2'(l)], \\ P_2(x,t) := \frac{a_x}{a(l,t)\triangle}[\Phi_1''\Phi_2(0) - \Phi_1(0)\Phi_2''], \\ G_2(t) := \frac{1}{a(l,t)\triangle}(\int_0^l [\Phi_1(0)\Phi_2(x) - \Phi_1(x)\Phi_2(0)]fdx- \\ -T_1''(t)\Phi_2(0) + \Phi_1(0)T_2''(t)), \\ \triangle := \Phi_1(0)\Phi_2(l) - \Phi_1(l)\Phi_2(0) \neq 0. \end{gathered} \tag{17}$$

Введем понятие обобщенного решения. Следуя известной процедуре [1], считая что u — классическое решение, умножим равенство (1) на гладкую функцию, проинтегрируем по области Q_T и, подставляя краевые условия, получим равенство:

$$\begin{gathered} \int_0^T \int_0^l [-u_tv_t + au_xv_x]dxdt + \int_0^\tau \alpha_{21}v(l,t)a(l,t)v_t(0,t)dt+ \\ +\int_0^\tau \alpha_{22}v(l,t)a(l,t)v_t(l,t)dt + \int_0^\tau \int_0^l P_2(x,t)v(l,t)a(l,t)u(x,t)dxdt- \\ -\int_0^\tau \alpha_{11}v(0,t)a(0,t)v_t(0,t)dt - \int_0^\tau \alpha_{12}v(0,t)a(0,t)v_t(l,t)dt- \\ -\int_0^\tau \int_0^l P_1(x,t)v(0,t)a(0,t)u(x,t)dxdt = \\ = \int_0^l v(x,0)\psi(x)dx + \int_0^T \int_0^l v(x,t)fdxdt. \end{gathered} \tag{18}$$

Определение. Обобщенным решением задачи (1),(2), (16) будем называть функцию $u(x,t) \in$ $\in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(x,0) = \phi(x)$ и тождеству

$$\begin{gathered} \int_0^T \int_0^l [-u_tv_t + au_xv_x]dxdt - \int_0^T v(l,t)a(l,t)u_x(l,t)dt + \int_0^T v(0,t)a(0,t)u_x(0,t)dt = \\ = \int_0^l v(x,0)\psi(x)dx + \int_0^T \int_0^l v(x,t)fdxdt \end{gathered} \tag{19}$$

для любой функции $v(x,t) \in \widehat{W}_2^1(Q_T)$,

где $\widehat{W}_2^1(Q_T) = \{v(x,t) : v(x,t) \in W_2^1(Q_T), v(x,T) = 0\}$.

Теорема. Если выполнены условия

$$a(x,t), a_t(x,t) \in C(\overline{Q}_T),$$
$$\Phi_i \in C^2[0,l], \Psi_i(t) \neq 0 \qquad \forall t \in [0,T]$$
$$\alpha_{12}a(0,t) + \alpha_{21}a(l,t) = 0,$$
$$\alpha_{11}a(0,0)\xi_1^2 + 2\alpha_{12}a(0,0)\xi_1\xi_2 - \alpha_{22}a(l,0)\xi_2^2 \geqslant 0,$$

то существует не более одного обобщенного решения поставленной задачи.

Доказательство. Покажем, что существует не более одного решения задачи. Предположим, что существует два решения u_1 и u_2. Тогда $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет тождеству:

$$\begin{gathered}\int_0^T \int_0^l [-u_t v_t + a u_x v_x] dxdt + \int_0^\tau \alpha_{21} v(l,t) a(l,t) v_t(0,t) dt + \\ + \int_0^\tau \alpha_{22} v(l,t) a(l,t) v_t(l,t) dt + \int_0^\tau \int_0^l P_2(x,t) v(l,t) a(l,t) u(x,t) dxdt - \\ - \int_0^\tau \alpha_{11} v(0,t) a(0,t) v_t(0,t) dt - \int_0^\tau \alpha_{12} v(0,t) a(0,t) v_t(l,t) dt - \\ - \int_0^\tau \int_0^l P_1(x,t) v(0,t) a(0,t) u(x,t) dxdt = 0.\end{gathered} \tag{20}$$

Выберем в тождестве (18) с $f(x,t) = 0$ и $\psi(x) = 0$

$$v(x,t) = \begin{cases} \int_\tau^t u(x,\eta) d\eta, 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 0, \tau \leqslant t \leqslant T. \end{cases} \tag{21}$$

Проинтегрируем по частям некоторые слагаемые:

$$-\int_0^\tau \int_0^l u_t u dxdt = -\frac{1}{2} \int_0^l u^2(x,\tau) dx,$$
$$\int_0^\tau \int_0^l a u_x v_x dxdt = -\frac{1}{2}(\int_0^\tau \int_0^l a_t v_x^2 dxdt + \int_0^l a(x,0) v_x^2(x,0) dx).$$

Подставляя в (20), получим:

$$\begin{gathered}-\frac{1}{2} \int_0^l [u^2(x,\tau) + a(x,0) v_x^2(x,0)] dx = \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_0^l a_t v_x^2 dxdt + \int_0^\tau \alpha_{21} v(l,t) a(l,t) v_t(0,t) dt + \\ + \int_0^\tau \alpha_{22} v(l,t) a(l,t) v_t(l,t) dt + \int_0^\tau \int_0^l P_2(x,t) v(l,t) a(l,t) u(x,t) dxdt - \\ - \int_0^\tau \alpha_{11} v(0,t) a(0,t) v_t(0,t) dt - \int_0^\tau \alpha_{12} v(0,t) a(0,t) v_t(l,t) dt - \\ - \int_0^\tau \int_0^l P_1(x,t) v(0,t) a(0,t) u(x,t) dxdt.\end{gathered} \tag{22}$$

Проинтегрируем по частям и подставим в (22) такие интегралы:

$$\int_0^\tau \alpha_{11} v(0,t) a(0,t) v_t(0,t) dt = -\frac{1}{2} \alpha_{11} a(0,0) v^2(0,0) - \frac{1}{2} \int_0^\tau \alpha_{11} a_t(0,t) v^2(0,t) dt,$$
$$\begin{gathered}\int_0^\tau \alpha_{12} v(0,t) a(0,t) v_t(l,t) dt = -\alpha_{12} a(0,0) v(0,0) v(l,0) - \int_0^\tau \alpha_{12} a_t(0,t) v(0,t) v(l,t) dt - \\ - \int_0^\tau \alpha_{12} a(0,t) v_t(0,t) v(l,t) dt,\end{gathered}$$
$$\int_0^\tau \alpha_{22} v(l,t) a(l,t) v_t(l,t) dt = -\frac{1}{2} \alpha_{22} a(l,0) v^2(l,0) - \frac{1}{2} \int_0^\tau \alpha_{22} a_t(l,t) v^2(l,t) dt.$$

Учитывая условия теоремы $\alpha_{12}a(0,t) + \alpha_{21}a(l,t) = 0$, получим:

$$\begin{gathered}\int_0^l [u^2(x,\tau) + a(x,0) v_x^2(x,0)] dx = -\int_0^\tau \int_0^l a_t v_x^2 dxdt + [\alpha_{11} a(0,0) v^2(0,0) + \\ + 2\alpha_{12} a(0,0) v(0,0) v(l,0) - \alpha_{22} a(l,0) v^2(l,0)] + \int_0^\tau \alpha_{11} a_t(0,t) v^2(0,t) dt - \\ - \int_0^\tau \alpha_{22} a_t(l,t) v^2(l,t) dt + 2 \int_0^\tau \alpha_{12} a_t(0,t) v(0,t) v(l,t) dt - 2 \int_0^\tau \int_0^l [-P_1(x,t) v(0,t) a(0,t) + \\ + P_2(x,t) v(l,t) a(l,t)] u(x,t) dxdt.\end{gathered} \tag{23}$$

Из равенства (23) вытекает неравенство и, если учесть условие теоремы $\alpha_{11}a(0,0)\xi_1^2+2\alpha_{12}a(0,0)\xi_1\xi_2-$ $-\alpha_{22}a(l,0)\xi_2^2\geqslant 0$, получим:

$$\begin{aligned}\int_0^l[u^2(x,\tau)+a(x,0)v_x^2(x,0)]dx\leqslant\left|\int_0^\tau\int_0^l a_tv_x^2dxdt\right|+\left|\int_0^\tau\alpha_{11}a_t(0,t)v^2(0,t)dt\right|+\\+\left|\int_0^\tau\alpha_{22}a_t(l,t)v^2(l,t)dt\right|+2\left|\int_0^\tau\alpha_{12}a_t(0,t)v(0,t)v(l,t)dt\right|+\\+2\left|\int_0^\tau\int_0^l[-P_1(x,t)v(0,t)a(0,t)+P_2(x,t)v(l,t)a(l,t)]u(x,t)dxdt\right|.\end{aligned}\tag{24}$$

Обратимся теперь к правой части (24) Коши, Коши — Буняковского и

$$v^2(x_i,t)\leqslant 2l\int_0^l v_x^2(x,t)dx+\frac{2}{l}\int_0^l v^2(x,t)dx,$$

вывод которой показан в [3, с. 107]. Учитывая сказанное выше, получим оценки для таких слагаемых правой части неравенства (24):

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\tau\alpha_{11}a_t(0,t)v^2(0,t)dt\right|\leqslant\int_0^\tau\left|\alpha_{11}a_t(0,t)v^2(0,t)\right|dt\leqslant\int_0^\tau|\alpha_{11}||a_t(0,t)|v^2(0,t)dt\leqslant\\\leqslant A_1\int_0^\tau v^2(0,t)dt\leqslant 2lA_1\int_0^\tau\int_0^l v_x^2(x,t)dxdt+\frac{2A_1}{l}\int_0^\tau\int_0^l v^2(x,t)dxdt,\end{aligned}$$

где $A_1:=b_1\cdot a_2$,

$$\begin{aligned}2\left|\int_0^\tau\alpha_{12}a_t(0,t)v(0,t)v(l,t)dt\right|\leqslant 2\int_0^\tau|\alpha_{12}a_t(0,t)v(0,t)v(l,t)|\,dt\leqslant\\\leqslant 2\int_0^\tau|\alpha_{12}||a_t(0,t)||v(0,t)||v(l,t)|dt\leqslant A_2\int_0^\tau[v^2(0,t)+v^2(l,t)]dt,\end{aligned}$$

где $A_2:=b_2\cdot a_2$,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\tau\alpha_{22}a_t(l,t)v^2(l,t)dt\right|\leqslant\int_0^\tau\left|\alpha_{22}a_t(l,t)v^2(l,t)\right|dt\leqslant\int_0^\tau|\alpha_{22}||a_t(l,t)|v^2(l,t)dt\leqslant\\\leqslant A_3\int_0^\tau v^2(l,t)dt\leqslant 2lA_3\int_0^\tau\int_0^l v_x^2(x,t)dxdt+\frac{2A_3}{l}\int_0^\tau\int_0^l v^2(x,t)dxdt,\end{aligned}$$

где $A_3:=c_2\cdot a_2$,

$$\begin{aligned}2\left|\int_0^\tau\int_0^l[-P_1(x,t)v(0,t)a(0,t)+P_2(x,t)v(l,t)a(l,t)]u(x,t)dxdt\right|\leqslant\\\leqslant 2\int_0^\tau\int_0^l|P_1(x,t)v(0,t)a(0,t)u(x,t)|dxdt+2\int_0^\tau\int_0^l|P_2(x,t)v(l,t)a(l,t)u(x,t)|dxdt\leqslant\\\leqslant 2\int_0^\tau\int_0^l|P_1(x,t)||v(0,t)||a(0,t)||u(x,t)|dxdt+2\int_0^\tau\int_0^l|P_2(x,t)||v(l,t)||a(l,t)||u(x,t)|dxdt\leqslant\\\leqslant D_1l\int_0^\tau v^2(l,t)dt+D_2l\int_0^\tau v^2(0,t)dt+(D_1+D_2)\int_0^\tau\int_0^l u^2(x,t)dxdt,\end{aligned}$$

где $D_1:=d_1\cdot a_1, D_2:=d_2\cdot a_1$.

Преобразуем (24), учитывая оценки, написанные выше:

$$\begin{aligned}\int_0^l[u^2(x,\tau)+a(x,0)v_x^2(x,0)]dx\leqslant\left|\int_0^\tau\int_0^l a_tv_x^2dxdt\right|+2lA_1\int_0^\tau\int_0^l v_x^2(x,t)dxdt+\\+\frac{2A_1}{l}\int_0^\tau\int_0^l v^2(x,t)dxdt+A_2\int_0^\tau[v^2(0,t)+v^2(l,t)]dt+2lA_3\int_0^\tau\int_0^l v_x^2(x,t)dxdt+\\+\frac{2A_3}{l}\int_0^\tau\int_0^l v^2(x,t)dxdt+D_1l\int_0^\tau v^2(l,t)dt+D_2l\int_0^\tau v^2(0,t)dt+\\+(D_1+D_2)\int_0^\tau\int_0^l u^2(x,t)dxdt.\end{aligned}\tag{25}$$

Введем некоторые обозначения:

$$C_1=2l(A_1+A_3), C_2=A_2+D_2l, C_3=A_2+D_1l, C_4=D_1+D_2, C_5=\frac{2}{l}(A_1+A_3).$$

Преобразуем (25):

$$\int_0^l [u^2(x,\tau)+a(x,0)v_x^2(x,0)]dx \leqslant \left|\int_0^\tau\int_0^l a_t v_x^2 dxdt\right| + C_1\int_0^\tau\int_0^l v_x^2(x,t)dxdt+ \\ +C_2\int_0^\tau v^2(0,t)dt + C_3\int_0^\tau v^2(l,t)dt + C_4\int_0^\tau\int_0^l u^2(x,t)dxdt+ \\ +C_5\int_0^\tau\int_0^l v^2(x,t)dxdt. \tag{26}$$

Используя неравенство, полученное в [2], получим:

$$\int_0^\tau v^2(0,t)dt \leqslant 2l\int_0^\tau\int_0^l v_x^2(x,t)dxdt + \frac{2}{l}\int_0^\tau\int_0^l v^2(x,t)dxdt,$$
$$\int_0^\tau v^2(l,t)dt \leqslant 2l\int_0^\tau\int_0^l v_x^2(x,t)dxdt + \frac{2}{l}\int_0^\tau\int_0^l v^2(x,t)dxdt,$$
$$\int_0^\tau\int_0^l v^2(x,t)dxdt \leqslant \tau^2\int_0^\tau\int_0^l u^2(x,t)dxdt.$$

Учитывая оценки, написанные выше, получим:

$$\int_0^l [u^2(x,\tau)+a(x,0)v_x^2(x,0)]dx \leqslant \int_0^\tau\int_0^l \left[(a_2+B_1)v_x^2(x,t)+B_2u^2(x,t)\right]dxdt, \tag{27}$$

где

$$B_1 := C_1 + 2l(C_2+C_3), \;\; B_2 := \max_{[0,T]}\{\frac{2}{l}(C_2+C_3)\tau^2 + C_4 + C_5\tau^2\}.$$

Теперь введем функцию $w(x,t)=\int_0^t u_x d\eta$. Тогда, используя преставления функции v, получим

$$v_x^2(x,0)=w^2(x,\tau), \;\; v_x(x,0)=-w(x,\tau), \;\; v_x(x,t)=w(x,t)-w(x,\tau).$$

Тогда в (27) $v_x^2(x,t)\leqslant 2w^2(x,t)+2w^2(x,\tau)$. Подставляя это неравенство, получим:

$$\int_0^l [u^2(x,\tau)+a(x,0)w^2(x,\tau)]dx \leqslant \int_0^\tau\int_0^l \left[2(a_2+B_1)(w^2(x,t)+w^2(x,\tau))+B_2u^2(x,t)\right]dxdt. \tag{28}$$

Заметим, что $w^2(x,\tau)$ не зависит от t и $a(x,t)\geqslant a_0>0 \quad \forall x,t\in\overline{Q}_T$. Тогда

$$\int_0^l [u^2(x,\tau)+a_0w^2(x,\tau)]dx \leqslant \int_0^\tau\int_0^l \left[2(a_2+B_1)w^2(x,t)+B_2u^2(x,t)\right]dxdt+ \\ +2\tau(a_2+B_1)\int_0^l w^2(x,\tau)dx. \tag{29}$$

Выберем τ так, чтобы $a_0-2\tau(a_2+B_1)>0$. Тогда последнее слагаемое в (29) можно перенести в левую часть:

$$\int_0^l [u^2(x,\tau)+\nu w^2(x,\tau)]dx \leqslant \int_0^\tau\int_0^l \left[2(a_2+B_1)w^2(x,t)+B_2u^2(x,t)\right]dxdt, \tag{30}$$

где $\nu=a_0-2\tau(a_2+B_1)$. Выберем в (30) $m=min\{1;\nu\}$ и $M=max\{2(a_2+B_1);B_2\}$, получим

$$m\int_0^l [u^2(x,\tau)+w^2(x,\tau)]dx \leqslant M\int_0^\tau\int_0^l \left[w^2(x,t)+u^2(x,t)\right]dxdt. \tag{31}$$

Применив к последнему неравенству лемму Гроноулла, получим $u(x,t)=0$ в $[0,\tau]$, где $\tau<\dfrac{a_0}{2(a_2+B_1)}$. Так же, как и в [1, с. 212], повторяя рассуждения для $t\in[\tau,\tau_1]$, убедимся, что $u(x,t)=0$ на этом промежутке ($\tau\leqslant\tau_1<T$). И так в конечное число шагов докажем обращение в нуль для всех $t\in[0,T]$.

Таким образом, доказано утверждение о том, что не может существовать более одного решения поставленной задачи.

Литература

[1] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. Москва: Наука, 1973. 407 с. URL: https://djvu.online/file/Rh97R3cVXNcZE?ysclid=lntxmubmb390280080.

[2] Пулькина Л.С. Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода // Известия высших учебных заведений. Сер.: Математика. 2012. № 4. С. 74—83. URL: https://www.mathnet.ru/rus/ivm8596.

[3] Пулькина Л.С. Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений: монография. Самара: Изд-во "Самарский университет", 2012. 194 с.

[4] Дмитриев В.Б. Нелокальная задача с интегральными условиями для волнового уравнения // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2006. № 2 (42). С. 15–27. URL: http://vestniksamgu.ssau.ru/est/2006web2/math/200620002.pdf.

[5] Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quarterly of Applied Mathematics. 1963. Vol. 21. Pp. 155–160. DOI: https://doi.org/10.1090/QAM/160437.

[6] Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения, 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304. URL: https://www.mathnet.ru/rus/de2993.

[7] Камынин Л.И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими краевыми условиями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1964. Т. 4, № 6. С. 1006–1024. URL: https://www.mathnet.ru/rus/zvmmf7694.

[8] Пулькина Л.С. О разрешимости в L_2 нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения, 2000. Т. 36, № 2. С. 279–280. URL: https://www.mathnet.ru/rus/de10101.

[9] Пулькина Л.С. Нелокальная задача для гиперболического уравнения с интегральными условиями I рода с ядрами, зависящими от времени // Известия высших учебных заведений. Сер.: Математика. 2012. № 10. С. 32–44. URL: https://www.mathnet.ru/rus/ivm8743.

[10] Пулькина Л.С., Савенкова А.Е. Нелокальная задача с интегральными условиями второго рода для гиперболического уравнения // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2016. № 1–2. С. 33–45. URL: https://www.mathnet.ru/rus/vsgu499; https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29345215. EDN: https://www.elibrary.ru/wfyota.

[11] Пулькина Л.С. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 7. С. 887–892. URL: https://www.mathnet.ru/rus/de11100.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-3-8-17

Submited: 24.07.2023
Revised: 31.08.2023
Accepted: 30.10.2023

Y.S. Buntova
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: ynbuntova@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0009-0003-7786-8019

A NON-LOCAL PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS OF THE FIRST KIND FOR THE STRING VIBRATION EQUATION

ABSTRACT

In this article, we consider a problem with nonlocal integral conditions of the 1st kind for the one-dimensional wave equation. The kernels of the integral conditions depend on both spatial and time variables. In order to study this problem we reduce first the integral conditions of the 1st kind to he integral conditions of the 2nd kind. Under certain additional assumptions these nonlocal conditions are equivalent. Obtained restriction on input data enable to show uniqurness of generalized solution to the problem.

Key words: hyperbolic equation; nonlocal problem; integral conditions; generalized solution.

Citation. Buntova Y.S. A non-local problem with integral conditions of the first kind for the string vibration equation. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya / Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 3, pp. 8–17. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-3-8-17. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: author and reviewers declare no conflict of interests.

Yana S. Buntova — postgraduate student of the Department of Differential Equations and Control Theory, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

References

[1] Ladyzhenskaya O.A. Boundary value problems of mathematical physics. Moscow: Nauka, 1973, 407 p. Available at: https://djvu.online/file/Rh97R3cVXNcZE?ysclid=lntxmubmb390280080. (In Russ.)

[2] Pul'kina L.S. Boundary-value problems for a hyperbolic equation with nonlocal conditions of the I and II kind. *Russian Mathematics*, 2012, vol. 56, issue 4, pp. 62-–69. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X12040081. (In English; original in Russian)

[3] Pul'kina L.S. Problems with non-classical conditions for hyperbolic equations: monograph. Samara: Izdatel'stvo "Samarskii universitet", 2012, 194 p. (In Russ.)

[4] Dmitriev V.B. A non-local problem with integral conditions for a wave equation. *Vestnik of Samara State University. Natural Science Series*, 2006, no. 2 (42), pp. 15–27. Available at: http://vestniksamgu.ssau.ru/est/2006web2/math/200620002.pdf. (In Russ.)

[5] Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1963, vol. 21, pp. 155–160. DOI: https://doi.org/10.1090/QAM/160437.

[6] Ionkin N.I. The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition. *Differential Equations*, 1977, vol. 13, no. 2, pp. 294–304. Available at: https://www.mathnet.ru/rus/de2993. (In Russ.)

[7] Kamynin L.I. A boundary value problem in the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1964, vol. 4, issue 6, pp. 33—59. DOI: https://doi.org/10.1016/0041-5553(64)90080-1. (In English; original in Russian)

[8] Pulkina L.S. The L_2 solvability of a nonlocal problem with integral conditions for a hyperbolic equation. *Differential Equations*, 2000, vol. 36, issue 2, pp. 316-–318. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02754219. (In English; original in Russian)

[9] Pulkina L.S. A non-local problem for a hyperbolic equation with integral conditions of the 1st kind with time-dependent kernels. *Russian Mathematics*, 2012, vol. 56, issue 10, pp. 26–37. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X12100039. (in English; original in Russian)

[10] Pulkina L.S., Savenkova A.E. A problem with second kind integral conditions for hyperbolic equation. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2016, no. 1-2, pp. 33–45. Available at: https://www.mathnet.ru/rus/vsgu499; https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29345215. EDN: https://www.elibrary.ru/wfyota. (In Russ.)

[11] Pulkina L.S. A Nonlocal Problem with Integral Conditions for a Hyperbolic Equation. *Differential Equations*, 2004, vol. 40, no. 7, pp. 887–892. DOI: https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000047025.64101.16 (In English; original in Russian)