



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-2-72-80



УДК 517.9; 519.7; 530.145.83

Дата: поступления статьи: 27.04.2023  
после рецензирования: 08.06.2023  
принятия статьи: 30.06.2023

**Р.К. Захаров**

Самарский национальный исследовательский университет  
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация  
E-mail: rk.zakharov@yandex.ru ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8450-2248>

**Е.К. Башкиров**

Самарский национальный исследовательский университет  
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация  
E-mail: bashkirov.ek@ssau.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8682-4956>

## ПЕРЕПУТЫВАНИЕ В НЕЛИНЕЙНОЙ ДВУХКУБИТНОЙ МОДЕЛИ ТАВИСА — КАММИНГСА

### АННОТАЦИЯ

В данной статье исследована динамика перепутывания двух идентичных сверхпроводящих кубитов, резонансно взаимодействующих с выделенной модой поля компланарного микроволнового резонатора без потерь посредством однофотонных переходов при наличии нелинейностей третьего и пятого порядков. На основе решения уравнения эволюции системы для фоковских начальных состояний поля резонатора рассчитан критерий перепутанности кубитов – отрицательности. Результаты вычисления отрицательности показывают, что для начальных сепарабельных состояний нелинейность резонатора может приводить к существенному увеличению максимальной степени перепутывания кубитов. Показано, что для начальных перепутанных состояний кубитов и интенсивных полей резонатора учет нелинейностей приводит к стабилизации степени перепутывания кубитов в резонаторе, способствует исчезновению эффекта мгновенной смерти перепутывания кубитов.

**Ключевые слова:** кубиты; резонансное взаимодействие; нелинейный резонатор; однофотонные переходы; фоковское состояние поля резонатора; перепутывание; отрицательность; мгновенная смерть перепутывания.

**Цитирование.** Захаров Р.К., Башкиров Е.К. Перепутывание в нелинейной двухкубитной модели Тависа — Каммингса // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2023. Т. 29, № 2. С. 72–80. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-2-72-80>

**Информация о конфликте интересов:** авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Захаров Р.К., Башкиров Е.К., 2023

*Родион Константинович Захаров* — аспирант кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

*Евгений Константинович Башкиров* — доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

## Введение

Одной из наиболее изученных модельных систем в квантовой оптике является двухуровневый атом, взаимодействующий с выделенной модой электромагнитного поля резонатора без потерь. Эта предельно простая квантовая система имеет тем не менее нетривиальную квантовую динамику, описываемую гамильтонианом Джейнса — Каммингса [1]. Экспериментальная реализация такой модели на микроволновых частотах позволила наблюдать все основные эффекты квантовой оптики, такие как коллапс и восстановление осцилляций Раби, сжатие и антипуассоновскую статистику поля, резонаторы и др. [2]. Многоатомное расширение модели также часто называют моделью Тависа — Каммингса. Новый импульс к изучению модели Джейнса — Каммингса и ее обобщений, в частности многоатомной модели Джейнса — Каммингса, связан с ее использованием в квантовой информатике, а именно для описания динамики сверхпроводящих колец с джозефсоновскими переходами, примесных спинов и других искусственных атомов в резонаторах [3–9]. Такие искусственные атомы могут использоваться в качестве логических элементов квантовых компьютеров и квантовых сетей. Поля резонаторов при этом используются для генерации, контроля и управления перепутанными состояниями сверхпроводящих кубитов и других искусственных атомов. В этой связи представляет большой интерес исследовать случай, когда резонатор, с которым связан кубит, обладает нелинейностью, вызывая неэквидистантность энергетических уровней поля резонатора. Кубиты в нелинейном резонаторе описываются нелинейным гамильтонианом многоатомной модели Джейнса — Каммингса. Включение нелинейности значительно обогащает физику системы, позволяя, в частности, значительно более эффективно использовать поле резонатора для управления степенью перепутывания кубитов. Динамика кубитов в нелинейных резонаторах активно исследовалась в последнее время в большом количестве теоретических и экспериментальных работ [10–17]. В частности, в работе П. Бертега с соавторами [18] теоретически и экспериментально изучена динамика сверхпроводящего кубита в резонаторе с нелинейностями третьего и пятого порядка. Представляет интерес обобщить указанную модель на случай двух кубитов в неидеальном резонаторе. В настоящей статье нами исследована динамика перепутывания двух сверхпроводящих кубитов, взаимодействующих с полем идеального нелинейного компланарного резонатора в рамках нелинейной двухкубитной модели Тависа — Каммингса.

## 1. Модель и точное решение квантового уравнения Лиувилля

Рассмотрим систему, состоящую из двух джозефсоновских сверхпроводящих кубитов, вставленных в середине линии передачи компланарного резонатора. Джозефсоновские кубиты могут рассматриваться с электротехнической точки зрения как сосредоточенная бездиссипативная нелинейная индуктивность. В результате модовая структура резонатора глубоко модифицируется. В пределе, когда частоты управляющих сигналов генерируют гармоники, резонансные с высшими модами резонатора, резонатор можно аппроксимировать только одной нелинейной модой. В этом случае, следуя работе [18], запишем гамильтониан нашей системы в резонансном приближении в виде

$$H = \hbar\gamma \sum_{i=1}^2 (a^+ \sigma_i^- + \sigma_i^+ a) - K a^{+2} a^2 - \tilde{K} a^{+3} a^3, \quad (1)$$

где  $a^+$  ( $a^-$ ) — оператор рождения (уничтожения) фотонов резонаторной моды поля,  $\sigma_i^+$  и  $\sigma_i^-$  — повышающий и понижающий оператор в  $i$ -м кубите и  $\gamma$  — константа взаимодействия кубитов с полем резонатора и  $K$  и  $\tilde{K}$  — константы нелинейности соответственно третьего (постоянная Керра) и пятого порядка, имеющие вид

$$K = \frac{\pi p^3 \omega_r Z e^2}{h},$$

$$\tilde{K} = \frac{2K^2(9 - 10p)}{3p\omega_r}.$$

Здесь  $\omega_r = 1/\sqrt{LC}$ , где  $L_t$  — полная индуктивность системы, равная  $L_t = L_q + L_c$ , где  $L_q$  и  $L_c$  — индуктивности кубитов и резонатора соответственно и  $p = L_q/L_t$ .  $Z$  — импеданс резонатора.

В частности, в работе П. Бертега с соавторами [18] рассматриваемая модель была реализована со следующими параметрами в Гц

$$\frac{K}{2\pi} \approx 7 \cdot 10^5, \quad \frac{\omega_r}{2\pi} \approx 6 \cdot 10^9, \quad \frac{\gamma}{2\pi} \approx 4 \cdot 10^7.$$

Таким образом, отношение константы нелинейности третьего порядка к константе кубит-полевого взаимодействия составляло  $K/g \approx 2 \cdot 10^{-2}$ . Константа  $\tilde{K}$  в работе [18] не измерялась. Проведем оценку

возможных значений константы нелинейности пятого порядка. Индуктивности сверхпроводящих кубитов лежат в интервале от 1 до 10 нГн, а индуктивности компланарных резонаторов в интервале от 100 до 1000 нГн. Тогда значения безразмерного параметра  $p$  лежат в интервале от 0.001 до 0.1. В результате для минимального значения параметра  $p$  отношение констант пятого и третьего порядков  $\tilde{K}/K$  может достигать значений порядка  $10^{-2}$ .

Обозначим через  $|+\rangle_i$  и  $|-\rangle_i$  возбужденное и основное состояние  $i$ -го кубита. Выберем в качестве начальных состояний подсистемы кубитов сепарабельные состояния вида

$$|\Psi(0)\rangle_{Q_1 Q_2} = |+, -\rangle, \quad (2)$$

$$|\Psi(0)\rangle_{Q_1 Q_2} = |+, +\rangle, \quad (3)$$

а также перепутанные состояния вида

$$|\Psi(0)\rangle_{Q_1 Q_2} = \cos \theta |+, -\rangle + \sin \theta |+, +\rangle, \quad (4)$$

где параметр  $\theta$  определяет начальную степень перепутывания кубитов.

В качестве начального состояния поля резонатора выберем фоковские состояния вида

$$|\Psi(0)\rangle_F = |n\rangle \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

где  $n$  — число фотонов в резонаторной моде.

Для исследования динамики перепутывания кубитов найдем вначале временную волновую функцию системы для фоковского начального состояния поля. Для это необходимо решить квантовое уравнение Шрёдингера

$$i \frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} = [H, |\Psi(t)\rangle] \quad (5)$$

с начальным условием

$$|\Psi(0)\rangle = |\Psi(0)\rangle_{Q_1 Q_2} |\Psi(0)\rangle_F.$$

Решение уравнения (5) будем искать в виде

$$|\Psi(t)\rangle_n = X_{1,n}(t)|-, -, n+2\rangle + X_{2,n}(t)|+, -, n+1\rangle + X_{3,n}(t)|-, +, n+1\rangle + X_{4,n}(t)|+, +, n\rangle. \quad (6)$$

Для коэффициентов  $X_i$  из (6) получаем уравнения

$$\begin{aligned} i\dot{X}_{1,n}(t) &= -\mu n(n+2)(n+1)X_{1,n}(t) - \chi(n+2)(n+1)X_{1,n}(t) + \sqrt{n+2}X_{2,n}(t) + \sqrt{n+2}X_{3,n}(t), \\ i\dot{X}_{2,n}(t) &= \sqrt{n+2}X_{1,n}(t) - \mu n(n+1)(n-1)X_{2,n}(t) - \chi(n+1)nX_{2,n}(t) + \sqrt{n+1}X_{4,n}(t), \\ i\dot{X}_{3,n}(t) &= \sqrt{n+2}X_{1,n}(t) - \mu n(n+1)(n-1)X_{3,n}(t) - \chi(n+1)nX_{3,n}(t) + \sqrt{n+1}X_{4,n}(t), \\ i\dot{X}_{4,n}(t) &= \sqrt{n+1}X_{2,n}(t) + \sqrt{n+1}X_{3,n}(t) - \mu n(n-2)(n-1)X_{4,n}(t) - \chi n(n-1)X_{4,n}(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Решение системы уравнений (7) имеет чрезвычайно громоздкий вид. Поэтому мы ограничимся в дальнейшем численным решением.

Имея явный вид временной волновой функции системы (6), мы можем вычислить параметр перепутывания кубитов — отрицательность. Для этого необходимо найти редуцированную двухкубитную матрицу плотности. Найдем вначале временную матрицу плотности полной системы "два кубита+мода поля" стандартным для чистых состояний образом

$$\rho_n(t) = |\Psi(t)\rangle_n \langle \Psi(t)|. \quad (8)$$

Редуцированную матрицу плотности двух кубитов мы можем вычислить, усредняя (8) по переменным поля

$$\rho_{n,qubit-qubit}(t) = Sp_F \rho_n(t).$$

Перейдем к вычислению критерия перепутывания кубитов.

## 2. Вычисление отрицательности и обсуждение результатов

Определим отрицательность для двух кубитов стандартным образом [19; 20]

$$N(t) = -2 \sum_k w_k^-, \quad (9)$$

где  $w_k^-$  — отрицательные собственные значения частично транспонированной по переменным одного кубита редуцированной двухкубитной матрицы плотности. Для перепутанных состояний  $N < 0$ . Для

перепутанных состояний  $0 < N \leq 1$ . Максимальной степени перепутывания соответствует значение  $N = 1$ .

Для сепарабельных начальных состояний кубитов (2) и (3) и перепутанного состояния (4) двухкубитная редуцированная матрица плотности имеет вид

$$\rho_{n,qubit-qubit}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{n,11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{n,22} & \rho_{n,23} & 0 \\ 0 & \rho_{n,23}^* & \rho_{n,33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{n,44} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Матричные элементы (10) для начальных состояний (2)–(4) имеют вид

$$\rho_{n,11}(t) = |X_{1,n}(t)|^2, \quad \rho_{n,22}(t) = |X_{2,n}(t)|^2, \quad \rho_{n,33}(t) = |X_{3,n}(t)|^2, \\ \rho_{n,44}(t) = |X_{4,n}(t)|^2, \quad \rho_{n,23}(t) = X_{2,n}(t)X_{3,n}^*(t).$$

Частично транспонированная по переменным одного кубита редуцированная матрица плотности кубитов для (10) может быть представлена в виде

$$\rho_{n,qubit-qubit}^{T_1}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{n,11} & 0 & 0 & \rho_{n,23}^* \\ 0 & \rho_{n,22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{n,33} & 0 \\ \rho_{n,23} & 0 & 0 & \rho_{n,44} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Матрица (11) имеет всего одно собственное значение, которое может быть отрицательным. В результате отрицательность (9) может быть записана как

$$N(t) = \sqrt{(\rho_{n,44} - \rho_{n,11})^2 + 4 \cdot |\rho_{n,23}|^2} - \rho_{n,11} - \rho_{n,44}.$$

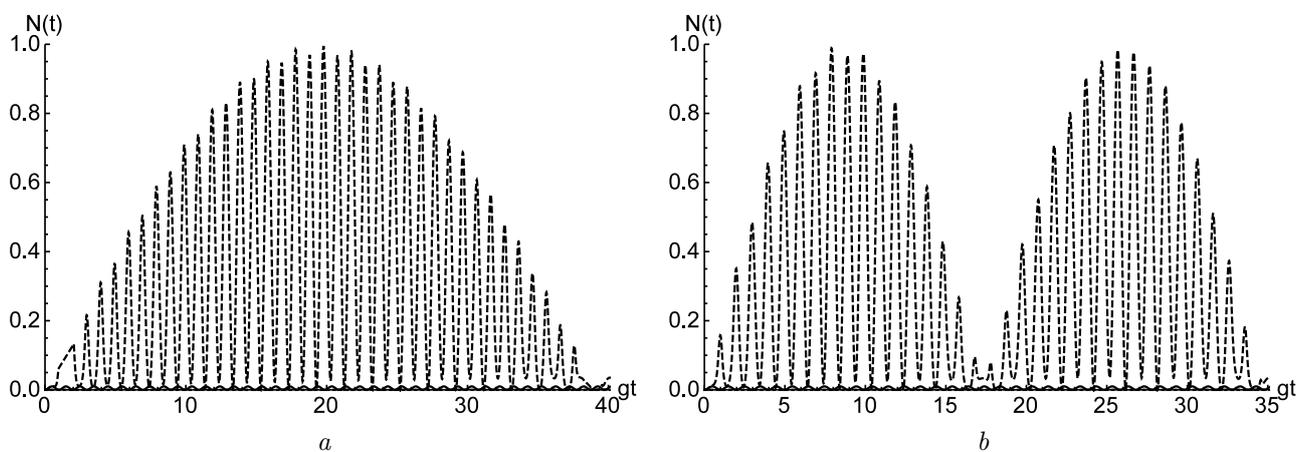


Рис. 1. Зависимость отрицательностей  $N(t)$  от приведенного времени  $gt$  для начального состояния кубитов  $|+, -\rangle$ . Число фотонов в моде  $n = 2$ . Значения нелинейностей  $\chi = \mu = 0$  (сплошная линия) и  $\chi = 0.1, \mu = 0$  (штриховая линия) (a) и  $\chi = \mu = 0$  (сплошная линия) и  $\chi = 0, \mu = 0.1$  (штриховая линия) (b)

Fig. 1. The negative dependence  $N(t)$  on the time  $gt$  for the initial state of qubits  $|+, -\rangle$ . Number of photons in mode  $n = 2$ . Mode of nonlinearities  $\chi = \mu = 0$  (solid line) and  $\chi = 0.1, \mu = 0$  (dashed line) (a) and  $\chi = \mu = 0$  (solid line) and  $\chi = 0, \mu = 0.1$  (dashed line) (b)

Результаты компьютерного моделирования временной зависимости отрицательностей  $N(t)$  для начального состояния кубитов  $|+, -\rangle$  и различных значений параметров нелинейности  $\chi$  и  $\mu$  представлены на рис. 1, a, b и рис. 2, a. Число фотонов в резонаторной моде для этих графиков и всех последующих выбрано равным  $n = 2$ . Из графиков хорошо видно, что при включении нелинейности степень перепутывания кубитов резко возрастает, достигая для некоторых времен максимального значения  $N = 1$ . Интересно отметить, что такое поведение параметра перепутывания кубитов характерно для любых значений параметров нелинейности. При этом при увеличении параметров нелинейности времена, для которых отрицательность достигает максимального значения, уменьшаются в случае фоковских состояний поля резонатора. Например, для значений параметров нелинейностей, достигнутых в эксперименте П. Бертета с соавторами [18] ( $\chi = 0.02, \mu = 0$ ), время, для которого наблюдается первый максимум

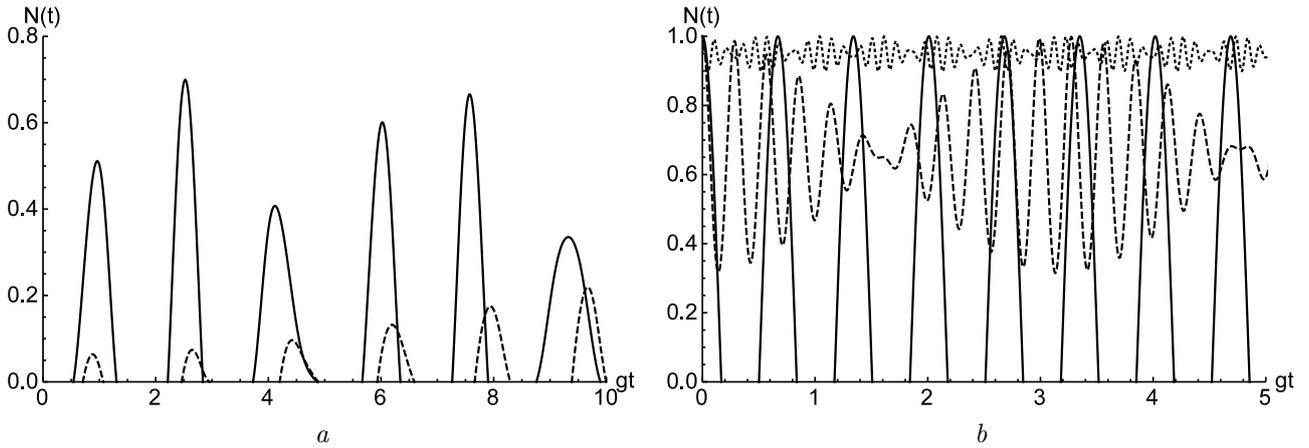


Рис. 2. Зависимость отрицательностей  $N(t)$  от приведенного времени  $gt$  для начального состояния кубитов  $|+, +\rangle$  (a) и перепутанного состояния  $1/\sqrt{2}(|+, -\rangle + |- , +\rangle)$  (b). Число фотонов в моде  $n = 2$  (a) и  $n = 10$  (b). Значения нелинейностей  $\chi = 1, \mu = 0$  (сплошная линия) и  $\chi = 0, \mu = 0.5$  (штриховая линия) (a) и  $\chi = \mu = 0$  (сплошная линия),  $\chi = 1, \mu = 0$  (штриховая линия) и  $\chi = 0, \mu = 0.2$  (точечная линия)

Fig. 2. The negative dependence  $N(t)$  on the time  $gt$  for the initial state of qubits  $|+, +\rangle$  (a) and entangled state  $1/\sqrt{2}(|+, -\rangle + |- , +\rangle)$  (b). Number of photons in mode  $n = 2$  and  $n = 10$  (b). Meaning of non-linearity  $\chi = 1, \mu = 0$  (solid line) and  $\chi = 0, \mu = 0.5$  (dashed line) (a) and  $\chi = \mu = 0$  (solid line),  $\chi = 1, \mu = 0$  (dashed line) and  $\chi = 0, \mu = 0.2$  (dotted line)

отрицательности, составляет  $t \approx 450 g$ , что значительно превосходит время когерентности в рассматриваемых системах кубитов в резонаторе. Таким образом, для наблюдения предсказываемого эффекта необходимо добиться экспериментально увеличения параметров нелинейностей более, чем на порядок. В силу вышесказанного численное моделирование временного поведения отрицательности проводилось для таких значений параметров нелинейности. Заметим также, что с увеличением числа фотонов в резонаторной моде времена, для которых наблюдаются максимумы отрицательности, увеличиваются.

На рис. 2, a представлена временная зависимость отрицательности от приведенного времени  $gt$  для начального состояния кубитов  $|+, +, -\rangle$  и различных значений параметров нелинейности. Заметим, что в отсутствие нелинейности резонатора для такого начального состояния кубитов перепутывание не возникает ни для каких начальных состояний кубитов [21]. При учете нелинейности появляется перепутывание кубитов. Расчеты показывают, что зависимость максимальной степени перепутывания кубитов от нелинейности третьего порядка  $\chi$  немонотонная. В интервале значений безразмерного параметра нелинейности  $0 < \chi < 1$  с увеличением нелинейности  $\chi$  максимальная степень перепутывания кубитов растет, а для  $\chi > 1$ , наоборот, уменьшается. Для нелинейности пятого порядка  $\mu$  ситуация иная. С увеличением параметра  $\mu$  растет и максимальная степень перепутывания кубитов, достигая максимальных значений при  $\mu \geq 5$ . На рис. 2, b показана временная зависимость отрицательности от приведенного времени  $gt$  для начального перепутанного состояния кубитов (4) при  $\theta = \pi/4$  и различных значений параметров нелинейности. Число фотонов в моде равно  $n = 10$ . Для выбранного начального состояния кубитов нелинейности третьего и пятого порядков приводят к уменьшению амплитуд колебаний отрицательности и, соответственно, к стабилизации перепутывания кубитов в резонаторе. Кроме того, они способствуют исчезновению эффекта мгновенной смерти перепутывания кубитов, т. е. исчезновению перепутывания кубитов на временах меньших времени декогеренции [22; 23]. Описанные эффекты характерны для состояний поля с большим числом фотонов. Для малых чисел фотонов влияние нелинейностей на поведение отрицательности незначительно.

## Выводы

Таким образом, в данной статье мы рассмотрели динамику системы, состоящей из двух идентичных кубитов, взаимодействующих с модой поля идеального резонатора с нелинейностями третьего и пятого порядков. Для количественной оценки меры перепутывания кубитов использовалась отрицательность. Вычисления отрицательности произведены для сепарабельных и белловских начальных состояний кубитов и фоковского состояния поля резонатора. Показано, что для сепарабельного состояния  $|+, -\rangle$  учет нелинейностей как третьего, так и пятого порядков приводит к существенному увеличению степени пе-

репутывания кубитов. Хорошо известно, что для резонансной модели Тависа — Каммингса в случае начального состояния  $|+, +\rangle$  перепутывание состояний кубитов не возникает ни для каких начальных состояний поля резонатора [21]. При включении нелинейности резонатора возможно перепутывание кубитов в процессе их дальнейшей эволюции. Для фоковских состояний поля резонатора расчеты показывают, что для малых значений безразмерного параметра нелинейности третьего порядка  $\chi < 1$  увеличение параметра нелинейности приводит к увеличению максимальной степени перепутывания кубитов, а для больших значений безразмерного параметра нелинейности  $\chi > 1$  имеет место обратная зависимость. С увеличением безразмерного параметра нелинейности пятого порядка  $\mu$  растет максимальная степень перепутывания кубитов, достигая максимальных значений при  $\mu \geq 5$ . Для белловского начального перепутанного состояния кубитов (4) учет нелинейностей третьего и пятого порядков приводит к уменьшению амплитуд колебаний отрицательности и, соответственно, к стабилизации перепутывания кубитов в резонаторе. Наличие нелинейностей способствуют также исчезновению эффекта мгновенной смерти перепутывания кубитов. Указанные эффекты проявляются заметным образом лишь для состояний поля с большим числом фотонов. Для малых чисел фотонов влияние нелинейностей на поведение отрицательности незначительно.

## Литература

- [1] Jaynes E.T. Comparison of quantum and semiclassical radiation theory with application to the beam maser // Proceedings of the IEEE. 1963. Vol. 51, Issue 1. P. 89–109. DOI: <https://doi.org/10.1109/PROC.1963.1664>.
- [2] Shore B.W., Knight P.L. The Jaynes-Cummings model // Journal of Modern Optics. 1993. Vol. 40, Issue 7. P. 1195–1238. DOI: <https://doi.org/10.1080/09500349314551321>.
- [3] Buluta I., Ashhab S., Nori F. Natural and artificial atoms for quantum computation // Reports on Progress in Physics. 2011. Vol. 74, Number 10. Article number 104401. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/74/10/104401>.
- [4] Xiang Z.L., Ashhab S., You J.Y., Nori F. Hybrid quantum circuits: Superconducting circuits interacting with other quantum systems // Reviews of Modern Physics. 2013. Vol. 85, Issue 2. P. 623–653. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.85.623>.
- [5] Gu X., Kockum A.F., Miranowicz A., Liu Y.X., Nori F. Microwave photonics with superconducting quantum circuits // Physics Reports. 2017. Vol. 718–719. P. 1–102. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2017.10.002>.
- [6] Georgescu I.M., Ashhab S., Nori P. Quantum simulation // Reviews of Modern Physics. 2014. Vol. 86, Issue 1. P. 153–185. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153>.
- [7] Wendin G. Quantum information processing with superconducting circuits: a review // Reports on Progress in Physics. 2017. Vol. 80, Number 10. Article number 106001. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6633/aa7e1a>.
- [8] Huang H.-L., Wu D., Fan D., Zhu X. Superconducting Quantum Computing: A Review // Science China. Information Sciences. 2020. Vol. 63. Article number 180501. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11432-020-2881-9>.
- [9] Kjaergaard M., Schwartz M.E., Braumüller J., Krantz P., Wang I.-J., Gustavsson S., Oliver W.D. Superconducting Qubits: Current State of Play // Annual Review of Condensed Matter Physics. 2020. Vol. 11. Pp. 369–395. DOI: <https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031119-050605>.
- [10] Du S., Feng H. Dynamics of Entanglement in the Cavity with Nonlinear Medium // Journal of Modern Physics. 2013. Vol. 4. Number 5. Pp. 604–607. DOI: <http://dx.doi.org/10.4236/jmp.2013.45086>.
- [11] De los Santos-Sánchez O., González-Gutiérrez C., Récamier J. Nonlinear Jaynes-Cummings model for two interacting two-level atoms // Journal of Physics B: Atomic Molecular and Optical Physics. 2016. Vol. 49, Number 16. Article number 165503. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/0953-4075/49/16/165503>.
- [12] Gómez-Rosas R., González-Gutiérrez C.A., Torres J.M. Entangling operations in nonlinear two-atom Tavis-Cummings models // Physical Review A. 2021. Vol. 104, Issue 6. Article number 063701. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.104.063701>.
- [13] Obada A.-S.F., Ahmed M.M.A., Habeba H.F. Some Statistical Properties for a Non-Linear Tavis — Cummings Model // Applied Mathematics & Information Sciences. 2017. Vol. 11, Issue 1. Pp. 147–154. DOI: <http://dx.doi.org/10.18576/amis/110117>.
- [14] Yu D., Kwek L.C., Amico L., Dumke R. Nonlinear circuit quantum electrodynamics based on the charge-qubit-resonator interface // Physical Review A. 2018. Vol. 98, Issue 3. Article number 033833. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.98.033833>.
- [15] Chen Q., Wen J., Yang W.L., Feng M., Du J. Nonlinear coupling between a nitrogen-vacancy-center ensemble and a superconducting qubit // Optics Express. 2015. Vol. 23, Issue 2. Pp. 1615–1626. DOI: <https://doi.org/10.1364/OE.23.001615>.

- [16] Bashkirov E.K. Entanglement in Tavis-Cummings model with Kerr nonlinearity induced by a thermal noise // Proc. SPIE 11846, Saratov Fall Meeting 2020: Laser Physics, Photonic Technologies, and Molecular Modeling, 118460W (4 May 2021). DOI: <https://doi.org/10.1117/12.2588673>.
- [17] Bashkirov E.K. Thermal entanglement in Tavis-Cummings models with Kerr media // Proc. SPIE 12193, Laser Physics, Photonic Technologies, and Molecular Modeling, 121930Q (29 April 2022). DOI: <https://doi.org/10.1117/12.2625838>.
- [18] Bertet P., Ong F. R., Boissonneault M., Bolduc A., Mallet F., Doherty A.C., Blais A., Vion D., Esteve D. Circuit quantum electrodynamics with a nonlinear resonator // arXiv:1111.0501v1 [quant-ph]. 2011. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1111.0501>
- [19] Peres A. Separability Criterion for Density Matrices // Physical Review Letters. 1996. Vol. 77, Issue 8. Pp. 1413–1415. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413>.
- [20] Horodecki R., Horodecki M., Horodecki P. Separability of Mixed States: Necessary and Sufficient Condition // Physics Letters A. 1996. Vol. 223, Issue 1. Pp. 1–8. DOI: [https://www.doi.org/10.1016/S0375-9601\(96\)00706-2](https://www.doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2).
- [21] Kim M.S., Lee J., Ahn D., Knight P.L. Entanglement induced by a single-mode heat environment // Physical review A. Atomic, molecular, and optical physics. 2002. Vol. 65. Issue 4. Article number 040101(R). DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.65.040101>.
- [22] Yu T., Eberly J.H. Environment-Induced Sudden Death of Entanglement // Physical Review Letters. 2004. Vol. 93. Article number 140104.
- [23] Sadiq G., Al-Drees W., Abdallah M.S. Manipulating entanglement sudden death in two coupled two-level atoms interacting off-resonance with a radiation field: an exact treatment // Optics Express. 2019. Vol. 27, Issue 23. Pp. 33799–33825. DOI: <https://doi.org/10.1364/OE.27.033799>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-2-72-80

Submitted: 27.04.2023

Revised: 08.06.2023

Accepted: 30.06.2023

**R.K. Zakharov**

Samara National Research University, Samara, Russian Federation  
E-mail: alexander.bagrov00@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8450-2248>

**E.K. Bashkirov**

Samara National Research University, Samara, Russian Federation  
E-mail: bashkirov.ek@ssau.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8682-4956>

## ENTANGLEMENT IN NONLINEAR TWO-QUBIT TAVIS — CUMMINGS MODEL

### ABSTRACT

In this work, we have studied the dynamics of entanglement of two identical superconducting qubits resonantly interacting with the one-mode field of a coplanar microwave cavity without loss through single-photon transitions in the presence of third- and fifth-order nonlinearities. Based on the solution of the equation of evolution of the system for the Fock initial states of the cavity field, the criterion of qubits entanglement – negativity is calculated. The results of the negativity calculation show that for the initial separable states, the cavity nonlinearity can lead to a significant increase in the maximum degree of qubit entanglement. It is shown that for the initial entangled states of qubits and intense cavity fields, taking into account nonlinearities leads to stabilization of the degree of entanglement of qubits in the cavity and contributes to the disappearance of the effect of the entanglement sudden death of qubits.

**Key words:** qubits; resonant interaction; nonlinear cavity; fock state of the cavity field; entanglement; negativity; sudden death of entanglement.

**Citation.** Zakharov R.K., Bashkirov E.K. Entanglement in nonlinear two-qubit Tavis — Cummings model. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 2, pp. 72–80. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-2-72-80>. (In Russ.)

**Information about the conflict of interests:** authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Zakharov R.K., Bashkirov E.K., 2023

Rodion K. Zakharov — postgraduate student of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

© Bashkirov E.K., 2023

Eugene K. Bashkirov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

## References

- [1] Jaynes E.T. Comparison of quantum and semiclassical radiation theory with application to the beam maser. *Proceedings of the IEEE*, 1963, vol. 51, issue 1, pp. 89–109. DOI: <https://doi.org/10.1109/PROC.1963.1664>.
- [2] Shore B.W., Knight P.L. The Jaynes-Cummings model. *Journal of Modern Optics*, 1993, vol. 40, issue 7, pp. 1195–1238. DOI: <https://doi.org/10.1080/09500349314551321>.
- [3] Buluta I., Ashhab S., Nori F. Natural and artificial atoms for quantum computation. *Reports on Progress in Physics*, 2011, vol. 74, no. 10, Article number 104401. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/74/10/104401>.
- [4] Xiang Z.L., Ashhab S., You J.Y., Nori F. Hybrid quantum circuits: Superconducting circuits interacting with other quantum systems. *Reviews of Modern Physics*, 2013, vol. 85, issue 2, pp. 623–653. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.85.623>.
- [5] Gu X., Kockum A.F., Miranowicz A., Liu Y.X., Nori F. Microwave photonics with superconducting quantum circuits. *Physics Reports*, 2017, vol. 718–719, pp. 1–102. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2017.10.002>.
- [6] Georgescu I.M., Ashhab S., Nori P. Quantum simulation. *Review of Modern Physics*, 2014, vol. 86, issue 1, pp. 153–185. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153>.
- [7] Wendin G. Quantum information processing with superconducting circuits: a review. *Reports on Progress in Physics*, 2017, vol. 80, number 10, Article number 106001. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6633/aa7e1a>.
- [8] Huang H.-L., Wu D., Fan D., Zhu X. Superconducting Quantum Computing: A Review. *Science China. Information Sciences*, 2020, vol. 63, Article number 180501. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11432-020-2881-9>.
- [9] Kjaergaard M., Schwartz M.E., Braumüller J., Krantz P., Wang I.-J., Gustavsson S., Oliver W.D. Superconducting Qubits: Current State of Play. *Annual Reviews of Condensed Matter Physics*, 2020, vol. 11, pp. 369–395. DOI: <https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031119-050605>.
- [10] Du S., Feng H. Dynamics of Entanglement in the Cavity with Nonlinear Medium. *Journal of Modern Physics*, 2013, vol. 4, no. 5, pp. 604–607. DOI: <http://dx.doi.org/10.4236/jmp.2013.45086>.
- [11] De los Santos-Sánchez O., González-Gutiérrez C., Récamier J. Nonlinear Jaynes–Cummings model for two interacting two-level atoms. *Journal of Physics B: Atomic Molecular and Optical Physics*, 2016, Vol 49, Number 16, Article number 165503. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/0953-4075/49/16/165503>.
- [12] Gómez-Rosas R., González-Gutiérrez C.A., Torres J.M. Entangling operations in nonlinear two-atom Tavis-Cummings models. *Physical Review A*, 2021, Vol. 104, Issue 6, Article number 063701. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.104.063701>.
- [13] Obada A.-S.F., Ahmed M.M.A., Habeba H.F. Some Statistical Properties for a Non-Linear Tavis – Cummings Model. *Applied Mathematics & Information Sciences*, 2017, vol. 11, issue 1, pp. 147–154. DOI: <http://dx.doi.org/10.18576/amis/110117>.
- [14] Yu D., Kwek L.C., Amico L., Dumke R. Nonlinear circuit quantum electrodynamics based on the charge-qubit–resonator interface. *Physical Review A*, 2018, vol. 98, issue 3, Article number 033833. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.98.033833>.
- [15] Chen Q., Wen J., Yang W.L., Feng M., Du J. Nonlinear coupling between a nitrogen-vacancy-center ensemble and a superconducting qubit. *Optics Express*, 2015, vol. 23, issue 2, pp. 1615–1626. DOI: <https://doi.org/10.1364/OE.23.001615>.
- [16] Bashkirov E.K. Entanglement in Tavis-Cummings model with Kerr nonlinearity induced by a thermal noise. *Proc. SPIE 11846, Saratov Fall Meeting 2020: Laser Physics, Photonic Technologies, and Molecular Modeling, 118460W (4 May 2021)*. DOI: <https://doi.org/10.1117/12.2588673>.
- [17] Bashkirov E.K. Thermal entanglement in Tavis-Cummings models with Kerr media. *Proc. SPIE 12193, Laser Physics, Photonic Technologies, and Molecular Modeling, 121930Q (29 April 2022)*. DOI: <https://doi.org/10.1117/12.2625838>.
- [18] Bertet P., Ong F.R., Boissonneault M., Bolduc A., Mallet F., Doherty A.C., Blais A., Vion D., Esteve D. Circuit quantum electrodynamics with a nonlinear resonator. *arXiv:1111.0501v1 [quant-ph]*, 2011. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1111.0501>.
- [19] Peres A. Separability Criterion for Density Matrices. *Physical Review Letters*, 1996, vol. 77, issue 8, pp. 1413–1415. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413>.
- [20] Horodecki R., Horodecki M., Horodecki P. Separability of Mixed States: Necessary and Sufficient Condition. *Physics Letters A*, 1996, vol. 223, issue 1, pp. 1–8. DOI: [https://www.doi.org/10.1016/S0375-9601\(96\)00706-2](https://www.doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2).

- [21] Kim M.S., Lee J., Ahn D., Knight P.L. Entanglement induced by a single-mode heat environment. *Physical review A. Atomic, molecular, and optical physics*, 2002, vol. 65, issue 4, article number 040101(R). DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.65.040101>.
- [22] Yu T., Eberly J.H. Environment-Induced Sudden Death of Entanglement. *Physics Review Letters*, 2004, vol. 93, article 140104.
- [23] Sadiek G., Al-Drees W., Abdallah M.S. Manipulating entanglement sudden death in two coupled two-level atoms interacting off-resonance with a radiation field: an exact treatment. *Optics Express*, 2019, Vol. 27, Issue 23, Pp. 33799–33825. DOI: <https://doi.org/10.1364/OE.27.033799>.