



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-2-62-71

УДК 517.9; 519.7; 530.145.83

Дата: поступления статьи: 25.04.2023
после рецензирования: 06.06.2023
принятия статьи: 30.06.2023



Е.К. Башкиров

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: bashkirov.ek@ssau.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8682-4956>

ПЕРЕПУТЫВАНИЕ ДВУХ СВЕРХПРОВОДЯЩИХ ЗАРЯДОВЫХ КУБИТОВ

АННОТАЦИЯ

В настоящей статье исследована динамика перепутывания двух идентичных зарядовых кубитов с джозефсоновскими переходами в случае, когда на один из кубитов действует микроволновое поле в когерентном или тепловом состоянии. Найдено точное решение квантового временного уравнения эволюции рассматриваемой системы для статистического оператора в случае начальных сепарабельных и перепутанных состояний кубитов. Точное решение для полного статистического оператора использовано для вычисления критерия перепутывания кубитов – согласованности. Результаты численного моделирования временной зависимости согласованности в случае когерентного поля показали, что при определенном выборе параметров модели в системе возможна реализация долгоживущих перепутанных состояний. Также показано, что для теплового состояния поля и перепутанного начального состояния кубитов они сохраняют определенную степень перепутывания в процессе эволюции даже в случае весьма интенсивных полей. При этом для любых интенсивностей теплового шума отсутствует эффект мгновенной смерти перепутывания.

Ключевые слова: зарядовые кубиты; микроволновое поле; когерентное состояние; тепловое состояние; перепутывание; согласованность; мгновенная смерть перепутывания.

Цитирование. Башкиров Е.К. Перепутывание двух сверхпроводящих зарядовых кубитов // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2023. Т. 29, № 2. С. 62–71. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-2-62-71>.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Башкиров Е.К., 2023

Евгений Константинович Башкиров — доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

Квантовые перепутанные состояния естественных и искусственных двухуровневых атомов (кубитов) в настоящее время являются незаменимым ресурсом для различных квантовых информационных процессов [1–5]. В настоящее время перепутанные состояния получены экспериментально для кубитов различной физической природы: нейтральных атомов, ионов в магнитных ловушках, примесных спинов, квантовых точек и др. При этом особое внимание уделяется теоретическому и экспериментальному изучению перепутанных состояний сверхпроводящих колец с джозефсоновским переходом, поскольку именно они оказались наиболее удобными квантовыми объектами при использовании в качестве логических элементов квантовых компьютеров [1]. Среди сверхпроводящих кубитов одним из наиболее интересных

объектов для изучения являются зарядовые сверхпроводящие кольца с джозефсоновскими переходами [6–8]. Важным свойством сверхпроводящих кубитов является возможность контролируемого изменения ширины энергетической щели между основным и первым возбужденным энергетическим уровнями кубита. В частности, в случае зарядового сверхпроводящего кубита таким воздействием являются напряжение на емкостном порте и постоянный магнитный момент. Динамика перепутывания многокубитных систем исследовалась в большом количестве работ [6–14]. Строгие количественные критерии перепутывания в настоящее время удалось ввести только для двухкубитных систем. К таким критериям относятся согласованность (критерий Вуутерса) [15] и отрицательность (критерий Переса — Хородецких) [16; 17]. Поэтому в настоящее время при теоретическом описании динамики систем сверхпроводящих кубитов особое внимание уделяется рассмотрению двухкубитных систем. Так, в работе [18] рассмотрена интересная модель, состоящая из двух связанных посредством большого джозефсоновского перехода сверхпроводящих зарядовых кубитов, при наличии не только постоянного магнитного поля, но и микроволнового электромагнитного поля. При этом микроволновое поле действует на один кубит и большой джозефсоновский переход. При выполнении условия $\omega = \omega_1 + \omega_2$ где ω — частота микроволнового поля, а ω_1 и ω_2 — резонансные частоты переходов в кубитах (в этом случае оба кубита могут одновременно совершать "перевороты", т. е. одновременно переходить из основного состояния в первое возбужденное и обратно), рассматриваемой системе можно сопоставить достаточно простую модель, допускающую аналитическое решение. Представляет интерес рассмотреть особенности перепутывания кубитов в рамках такой модели.

В настоящей статье исследована динамика перепутывания двух идентичных сверхпроводящих зарядовых кубитов, связанных большим джозефсоновским переходом, в предположении, что магнитный поток, пронизывающий контур, включающий первый кубит и большой джозефсоновский переход, состоит из постоянного магнитного потока и магнитного потока, создаваемого микроволновым полем с варьируемой частотой. Рассмотрены когерентное и тепловое начальные состояния микроволнового поля.

1. Модель и ее точное решение

Рассмотрим два идентичных сверхпроводящих зарядовых кубита Q_1 и Q_2 , связанных между собой большим джозефсоновским переходом. Предположим, что магнитный поток, пронизывающий контур, включающий первый кубит и большой джозефсоновский переход, состоит из двух частей: статического постоянного магнитного потока и магнитного потока, создаваемого микроволновым полем с варьируемой частотой. Микроволновое поле будем считать квантованным. Положим также, что частота одномодового микроволнового квантованного поля подобрана так, что оба кубита могут одновременно совершать переход из основного в возбужденное состояние и обратно. В этом случае эффективный гамильтониан взаимодействия квантового магнитного потока с двумя зарядовыми кубитами можно представить в виде [18]

$$H = \hbar g_{12} (a^+ \sigma_1^- \sigma_2^- + \sigma_1^+ \sigma_2^+ a), \quad (1)$$

где a^+ (a) — оператор рождения (уничтожения) фотонов моды микроволнового поля, σ_i^+ и σ_i^- — повышающий и понижающий оператор в i -м кубите ($i = 1, 2$) и g_{12} — эффективная константа взаимодействия кубитов с полем.

Обозначим через $|+\rangle_i$ и $|-\rangle_i$ возбужденное и основное состояние i -го кубита. Выберем в качестве начального состояния подсистемы кубитов перепутанное состояние вида

$$|\Psi(0)\rangle_{Q_1 Q_2} = \cos \theta |-, -\rangle + e^{i\phi} \sin \theta |+, +\rangle, \quad (2)$$

где θ — параметр, определяющий начальную степень перепутывания кубитов и ϕ — относительная фаза для векторов состояния основного и возбужденного состояния кубитов.

В качестве начального состояния микроволнового поля будем выбирать когерентное и тепловое состояние. Заметим, что для когерентного начального состояния микроволнового поля динамика кубитов с гамильтонианом (1) исследовалась ранее в работе [19]. Однако авторы получили неверное решение квантового уравнения Шредингера. Поэтому представляет интерес найти верное решение уравнения эволюции и на его основе исследовать временное поведение параметра перепутывания кубитов — согласованности.

А. Когерентное состояние микроволнового поля

Для рассматриваемого случая начальную волновую функцию микроволнового поля выберем в виде

$$|\Psi(0)\rangle_F = \sum_{n=0}^{\infty} F_n |n\rangle, \quad (3)$$

где $|n\rangle$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) — фоковские состояния поля. Весовые коэффициенты F_n для когерентного состояния есть

$$F_n = e^{-\bar{n}/2} \frac{\bar{n}^{n/2}}{\sqrt{n!}}.$$

Решение временного уравнения Шредингера для волновой функции в момент времени t имеет вид

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (X_{1,n}(t)|+, +, n\rangle + X_{2,n}(t)|-, -, n+1\rangle + X_0(t)|-, -, 0\rangle), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} X_{1,n}(t) &= -iF_{n+1}\sqrt{1+n}\cos\theta\sin(\Omega_n t) + F_n\sin\theta e^{i\phi}(\Omega_n\cos(\Omega_n t)), \\ X_{2,n}(t) &= -iF_n\sqrt{1+n}\sin\theta e^{i\phi}\sin(\Omega_n t) + F_{n+1}\cos\theta(\Omega_n\cos(\Omega_n t)), \end{aligned}$$

$$X_0(t) = \cos\theta F_0$$

и

$$\Omega_n = \sqrt{n+1}g_{12}.$$

В качестве критерия перепутывания кубитов выберем согласованность. Для ее вычисления нам потребуется редуцированная кубит-кубитная матрица плотности. Имея явный вид временной волновой функции (4), мы можем представить временной статистический оператор полной системы "два кубита+поле" как

$$\rho_{Q_1 Q_2 F}(t) = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|. \quad (5)$$

Редуцированный двухкубитный статистический оператор мы можем вычислить, усредняя выражение (5) по переменным поля

$$\rho_{Q_1 Q_2}(t) = Sp_F \rho_{Q_1 Q_2 F}(t). \quad (6)$$

В базисе двухкубитных состояний

$$|+, +\rangle, |+, -\rangle, |-, +\rangle, |-, -\rangle$$

двухкубитному статистическому оператору соответствует матрица плотности вида

$$\rho_{Q_1 Q_2}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho_{14}^* & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_{11}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} |X_{1,n}(t)|^2, & \rho_{44}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} |X_{2,n}(t)|^2 + |X_0(t)|^2, \\ \rho_{14}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} X_{2,n+1}(t)X_{2,n}^*(t) + |X_{1,0}(t)X_0(t)|^2. \end{aligned}$$

Согласованность $C(t)$, введенную Вуутерсом [7], вычисляем стандартным образом как

$$C(t) = \max[0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4],$$

где λ_i — собственные значения в убывающем порядке эрмитовой матрицы

$$[\sqrt{\rho_{Q_1 Q_2}} \tilde{\rho}_{Q_1 Q_2} \sqrt{\rho_{Q_1 Q_2}}]^{1/2}.$$

Здесь

$$\tilde{\rho}_{Q_1 Q_2} = \sigma_y \otimes \sigma_y \rho_{Q_1 Q_2}^* \sigma_y \otimes \sigma_y,$$

где σ_y — матрица Паули.

Согласованность меняется в пределах от 0 до 1. Для сепарабельных состояний $C = 0$. Для перепутанных состояний $0 < C \leq 1$. Для максимально перепутанных состояний $C = 1$. Для двухкубитной системы, описываемой матрицей плотности вида (7), согласованность может быть представлена простой аналитической формулой

$$C(t) = 2|\rho_{14}|. \quad (8)$$

В. Тепловое состояние микроволнового поля

Для рассматриваемого случая начальный статистический оператор для одномодового поля есть

$$\rho_F(0) = \sum_n p_n |n\rangle \langle n|. \quad (9)$$

Весовые коэффициенты в (9) равны

$$p_n = \frac{\bar{n}^n}{(1 + \bar{n})^{n+1}},$$

где \bar{n} – среднее число тепловых фотонов.

В рассматриваемом случае удобно вначале найти временную волновую функцию системы для фоковского начального состояния поля $|n\rangle$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). А затем обобщить результаты на случай теплового поля.

Для числа фотонов в моде $n \geq 1$ решение квантового уравнения Шредингера для волновой функции в момент времени t можно представить как

$$|\Psi(t)\rangle_n = Y_{1,n-1}|-, -n\rangle + Y_{2,n-1}|+, +n-1\rangle + Y_{3,n}|-, -n+1\rangle + Y_{4,n}|+, +, n\rangle, \quad (10)$$

где

$$Y_{1,n} = \cos \theta \cos(\Omega_n t), \quad Y_{2,n} = -i \cos \theta \cos(\Omega_n t),$$

$$Y_{3,n} = -ie^{i\phi} \sin \theta \sin(\Omega_n t), \quad Y_{4,n} = e^{i\phi} \sin \theta \cos(\Omega_n t).$$

Для числа фотонов в моде $n = 0$ соответствующее решение есть

$$|\Psi(t)\rangle_0 = Z_1|-, -0\rangle + Z_2|-, -1\rangle + Z_{3,n}|+, +, 0\rangle, \quad (11)$$

где

$$Z_1 = \cos \theta, \quad Z_{2,n} = -ie^{i\phi} \sin \theta \sin(g_{12}t), \quad Z_3 = e^{i\phi} \sin \theta \cos(g_{12}t).$$

Имея формулы (10), (11), мы можем вычислить временной статистический оператор полной системы в случае теплового поля

$$\rho_{Q_1 Q_2 F}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n |\Psi(t)\rangle_n \langle \Psi(t)| + p_0 |\Psi(t)\rangle_0 \langle \Psi(t)|. \quad (12)$$

Духкубитный редуцированный статистический оператор получаем, усредняя (12) по переменным поля:

$$\rho_{Q_1 Q_2}(t) = S p_F \rho_{Q_1 Q_2 F}(t). \quad (13)$$

В двухкубитном базисе матрица плотности, соответствующая статистическому оператору (13), также имеет вид (7), где

$$\rho_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n |Y_{1,n-1}(t)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n |Y_{3,n}(t)|^2 + p_0 (|Z_1(t)|^2 + |Z_2(t)|^2),$$

$$\rho_{44} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n |Y_{2,n-1}(t)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n |Y_{4,n}(t)|^2 + p_0 |Z_3(t)|^2,$$

$$\rho_{14} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n Y_{1,n-1}(t) Y_{4,n}^*(t) + p_0 Z_1(t) Z_3^*(t).$$

Согласованность для рассматриваемого случая также задается аналитической формулой (8).

2. Численное моделирование согласованности и обсуждение результатов

На рис. 1–2 представлена временная эволюция параметра перепутывания двух джозефсоновских кубитов в случае, когда на область, содержащую один из кубитов и большой джозефсоновский переход, действует одномодовое микроволновое поле в когерентном состоянии. Рисунок 1 представляет зависимость согласованности для начального сепарабельного состояния кубитов $|-, -\rangle$ ($|+, +\rangle$) от приведенного времени $g_{12}t$ для коротких и длинных временных интервалов. Вычисления показывают, что в рассматриваемой модели имеет место сильная корреляция состояний двух кубитов в процессе их эволюции. Из рис. 1, а видно, что поведение согласованности, отражающее поведение перепутывания кубитов,

для сепарабельных состояний на коротких временах для любых средних чисел фотонов носит осцилляторный характер, что соответствует процессам поглощения и испускания фотонов. Кроме того, на коротких временах согласованность уменьшается с течением времени и обращается в нуль для некоторых времен. В эти моменты времени состояния двух зарядовых кубита оказываются распутанными. При увеличении среднего числа фотонов в моде распутывание состояний кубитов происходит на меньших временах. На рис. 1, *b* представлена длинновременная эволюция согласованности для тех же сепарабельных состояний кубитов. Среднее число фотонов выбрано равным $\bar{n} = 30$. Из рисунка видно, что осцилляции согласованности быстро распадаются, после чего кубиты оказываются в смешанном состоянии с максимальной степенью перепутывания. Через некоторое время согласованность вновь возвращается в осцилляторный режим, что указывает на то, что информация о начальном состоянии возвращается к кубитам от микроволнового поля. На рис. 2 представлена зависимость согласованности для начального перепутанного состояния кубитов $1/\sqrt{2}(|-, -\rangle + e^{i\phi}|+, +\rangle)$ от приведенного времени $g_{12}t$ для различных значений параметров модели. Рисунок 2, *a* показывает, как временная эволюция параметра перепутывания зависит от относительной фазы ϕ . Для выбрванного начального состояния кубитов начальное значение согласованности для всех значений параметра ϕ равно единице, то есть соответствует максимальной степени перепутывания. Поведение согласованности имеет осцилляторный характер. При этом с течением времени степень перепутывания кубитов уменьшается. Из рисунка также видно, что с ростом относительной фазы от 0 до $\pi/2$ наблюдается существенное увеличение скорости уменьшения степени перепутывания. Для значения относительной фазы $\phi = \pi/2$ состояние двух зарядовых кубитов распутывается для некоторых определенных моментов времени. При уменьшении относительной фазы процесс распутывания происходит для больших времен. Для значения относительной фазы $\phi = 0$ значение согласованности на достаточно длительных временах остается практически равным единице, т. е. для такого значения начальной фазы мы имеем дело с долгоживущим максимально перепутанным состоянием кубитов. Такой результат показывает возможность использования определенных начальных состояний кубитов для контроля и управления степенью перепутывания кубитов. На рис. 2, *b* показана зависимость согласованности для начального перепутанного состояния кубитов $1/\sqrt{2}(|-, -\rangle + |+, +\rangle)$ от приведенного времени $g_{12}t$ для различных значений среднего числа фотонов микроволнового поля. Хорошо видно, что увеличение среднего числа фотонов в поле приводит к уменьшению скорости затухания параметра перепутывания в процессе эволюции. Таким образом, контроль и управление степенью перепутывания кубитов могут быть осуществлены не только с помощью адекватного выбора относительной фазы, но и интенсивности микроволнового поля.

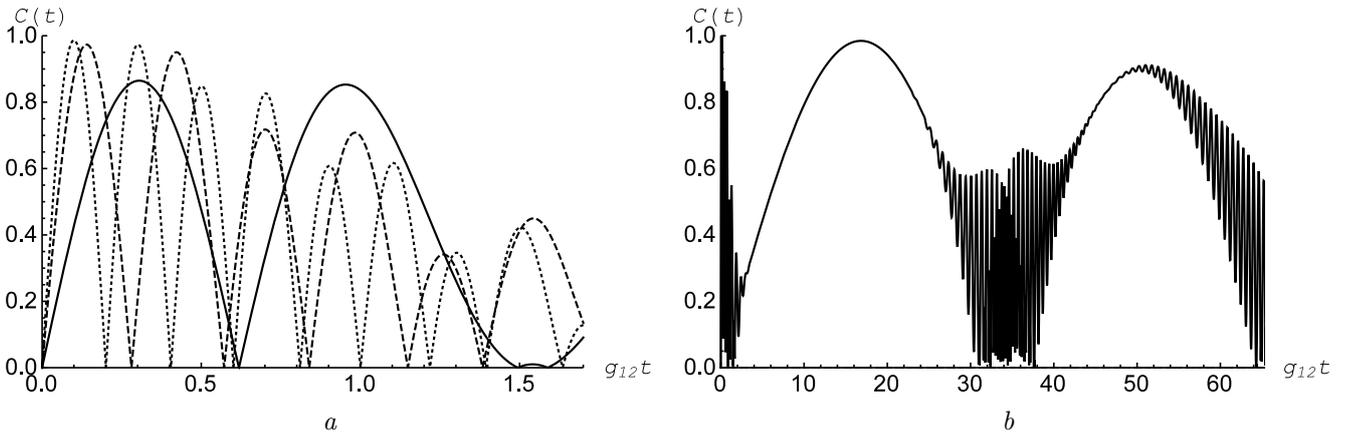


Рис. 1. Зависимость согласованности $C(t)$ от приведенного времени $g_{12}t$ для сепарабельного начального состояния кубитов $|+, +\rangle$ ($|-, -\rangle$) и когерентного состояния микроволнового поля. Случай (a) соответствует коротким приведенным временам. Среднее число фотонов $\bar{n} = 5$ (сплошная линия), $\bar{n} = 30$ (штриховая линия) и $\bar{n} = 60$ (точечная линия). Случай (b) соответствует длинным приведенным временам. Среднее число фотонов $\bar{n} = 30$

Fig. 1. Concurrence $C(t)$ vs scaled time $g_{12}t$ for initial separable qubits state $|+, +\rangle$ ($|-, -\rangle$) and coherent microwave field. Case (a) corresponds to short scaled times. Mean photon number $\bar{n} = 5$ (solid), $\bar{n} = 30$ (dashed) and $\bar{n} = 60$ (dotted). Case (b) corresponds to long scaled times. Mean thermal photon number $\bar{n} = 30$

На рис. 3 представлена временная эволюция параметра перепутывания двух джозефсоновских кубитов в случае, когда одномодовое микроволновое поле находится в тепловом состоянии. Отметим, что в рассматриваемом случае для кубитов, приготовленных в сепарабельных состояниях $|-, -\rangle$ и $|+, +\rangle$, перепутывание кубитов в процессе эволюции не возникает ни для каких значений среднего числа тепловых

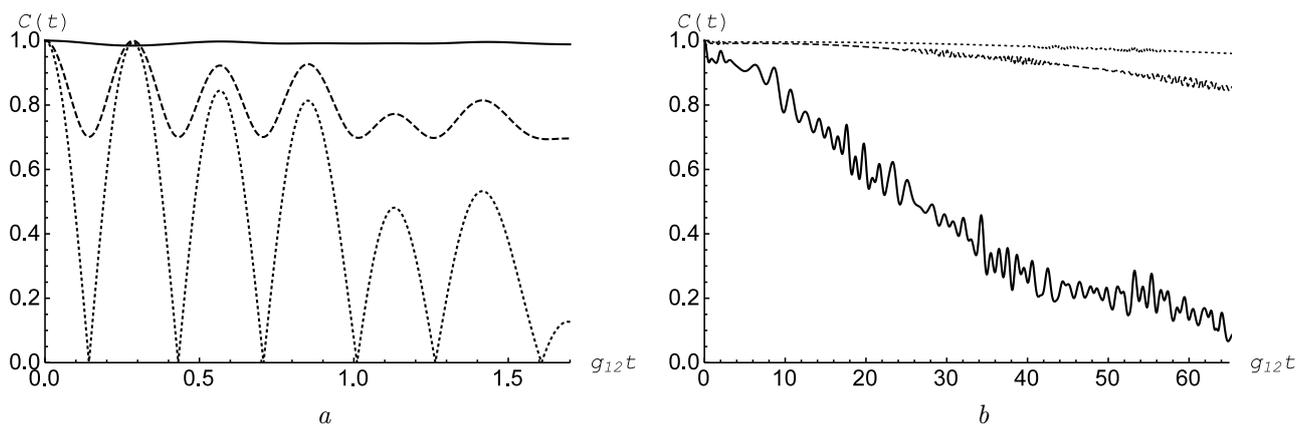


Рис. 2. Зависимость согласованности $C(t)$ от приведенного времени $g_{12}t$ для перепутанного начального состояния кубитов $1/\sqrt{2}(|+, +\rangle + |-, -\rangle)$ и когерентного состояния микроволнового поля. Случай (a) соответствует коротким приведенным временам. Среднее число фотонов $\bar{n} = 30$. Параметр $\phi = 0$ (сплошная линия), $\phi = \pi/4$ (штриховая линия) и $\phi = \pi/2$ (точечная линия). Случай (b) соответствует длинным приведенным временам. Среднее число фотонов $\bar{n} = 10$ (сплошная линия), $\bar{n} = 30$ (штриховая линия) и $\bar{n} = 60$ (точечная линия)

Fig. 2. Concurrence $C(t)$ vs scaled time $g_{12}t$ for initial entangled qubits state $1/\sqrt{2}(|+, +\rangle + |-, -\rangle)$ and coherent microwave field. Case (a) corresponds to short scaled times. Mean photon number $\bar{n} = 30$. Parameter $\phi = 0$ (solid), $\phi = \pi/4$ (dashed) and $\phi = \pi/2$ (dotted). Case (b) corresponds to long scaled times. Mean thermal photon number $\bar{n} = 10$ (solid), $\bar{n} = 30$ (dashed) and $\bar{n} = 60$ (dotted)

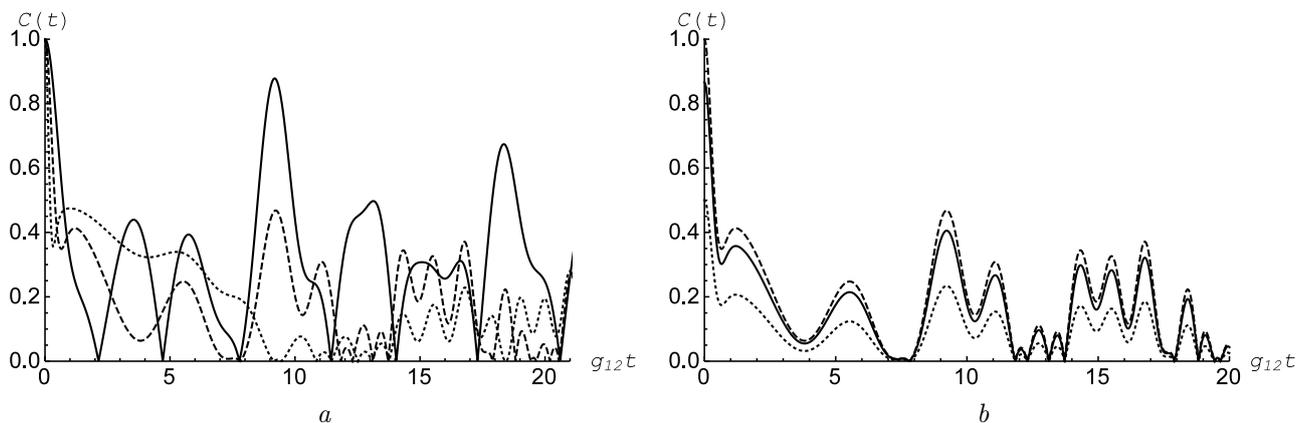


Рис. 3. Зависимость согласованности $C(t)$ от приведенного времени $g_{12}t$ для перепутанного начального состояния кубитов $1/\sqrt{2}(|+, +\rangle + |-, -\rangle)$ и теплового состояния микроволнового поля. Для случая (a) среднее число тепловых фотонов $\bar{n} = 1$ (сплошная линия), $\bar{n} = 5$ (штриховая линия) и $\bar{n} = 20$ (точечная линия). Для случая (b) среднее число фотонов $\bar{n} = 5$. Параметр $\theta = \pi/6$ (сплошная линия), $\theta = \pi/4$ (штриховая линия) и $\theta = 5/12\pi$ (точечная линия)

Fig. 3. Concurrence $C(t)$ vs scaled time $g_{12}t$ for initial entangled qubits state $1/\sqrt{2}(|+, +\rangle + |-, -\rangle)$ and thermal microwave field. For case (a) the mean thermal photon number $\bar{n} = 1$ (solid), $\bar{n} = 5$ (dashed) and $\bar{n} = 20$ (dotted). Case (b) the mean thermal photon number $\bar{n} = 5$. Parameter $\theta = \pi/6$ (solid), $\theta = \pi/4$ (dashed) and $\theta = 5/12\pi$ (dotted)

фотонов. Для перепутанных состояний кубитов временная эволюция согласованности не чувствительна к изменениям относительной фазы ϕ , а зависит от среднего числа тепловых фотонов в моде и параметра θ . Рисунок 3, a демонстрирует временную зависимость согласованности. Из него хорошо видно, что с увеличением интенсивности теплового поля для изначально максимально перепутанных кубитов максимальная степень их перепутывания в последующие моменты времени уменьшается с ростом интенсивности теплового поля. Однако следует отметить, что в отличие от модели двух кубитов, которые взаимодействуют с общим тепловым полем [20], для рассматриваемой модели кубиты сохраняют определенную степень перепутывания даже для достаточно больших интенсивностей теплового шума. Еще одной интересной особенностью поведения параметра перепутывания в рассматриваемой модели

является отсутствие паразитного эффекта мгновенной смерти перепутывания [21] для любой интенсивности теплового поля. На рис. 3, *b* показана временная зависимость согласованности для фиксированного среднего числа фотонов $\bar{n} = 5$ и различных значений параметра θ , определяющего начальную степень перепутывания кубитов. Из рисунка видно, что для значений параметра θ вблизи значения $\theta = \pi/4$, соответствующего максимальному начальному перепутыванию, существенно отличаются только начальные значения согласованности. В процессе эволюции различия в значениях параметра перепутывания сглаживаются. Такие различия в поведении согласованности имеют место только при приближении параметра θ к нулю (нулевому значению соответствует сепарабельное состояние $|-, -\rangle$) или к значению $\theta = \pi/2$ (этому значению θ соответствует сепарабельное состояние $|+, +\rangle$). Для сепарабельных состояний, как уже отмечалось выше, перепутывания состояний кубитов в процессе эволюции не возникает.

Выводы

Таким образом, в данной статье нами была найдена точная динамика системы, состоящей из двух идентичных зарядовых кубитов, соединенных большим джозефсоновским переходом. Рассмотрен случай, когда на один из кубитов и большой джозефсоновский переход действует одномодовое микроволновое поле в когерентном или тепловом состоянии. На основе точного решения уравнения эволюции найдена временная матрица плотности рассматриваемой системы. Полученное явное выражение для полной матрицы плотности использовано для вычисления критерия перепутывания кубитов для начальных сепарабельных и перепутанных состояний кубитов. В качестве количественного критерия перепутывания кубитов выбрана согласованность. Результаты численного моделирования временного поведения согласованности показали, что на коротких временах состояния двух зарядовых кубитов оказываются распутанными для некоторых выделенных моментов времени. На длинных временах кубиты вновь оказываются в состоянии с максимальной степенью перепутывания. Для начальных сепарабельных состояний кубитов в случае теплового поля перепутывания кубитов не возникает в процессе эволюции. Для начальных перепутанных состояний кубитов в случае когерентного поля показано, что при уменьшении относительной фазы процесс распутывания состояний кубитов происходит существенно быстрее. Для значения относительной фазы $\phi = 0$ реализуются долгоживущие перепутанные состояния, для которых начальная степень перепутывания остается постоянной. Наиболее интересными результатами для перепутанного начального состояния кубитов и теплового поля является то, что кубиты сохраняют определенную степень перепутывания даже для больших интенсивностей теплового шума. Еще одной интересной особенностью поведения параметра перепутывания в рассматриваемой модели является отсутствие эффекта мгновенной смерти перепутывания [21] для любой интенсивности теплового поля.

В результате показано, что, выбирая определенным образом тип состояния микроволнового поля, среднее число фотонов и начальные состояния кубитов, мы можем контролировать и управлять эволюцией кубитов, а также степенью их перепутывания. Полученные в работе результаты могут быть использованы в области квантовой обработки информации.

Литература

- [1] X. Gu X., Kockum A.F., Miranowicz A., Liu Y.X., Nori F. Microwave photonics with superconducting quantum circuits // *Physics Reports*. 2017. Vol. 718–719. Pp. 1–102. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2017.10.002>.
- [2] Wendin G. Quantum information processing with superconducting circuits: a review // *Reports on Progress in Physics*. 2017. Vol. 80. Number 10. Article number 106001. DOI: <http://doi.org/10.1088/1361-6633/aa7e1a>.
- [3] Kjaergaard M., Schwartz M.E., Braumüller J., Krantz P., Wang J.-I., Gustavsson S., Oliver W.D. Superconducting Qubits: Current State of Play // *Annual Reviews of Condensed Matter Physics*. 2020. Vol. 11. P. 369–395. DOI: <http://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031119-050605>.
- [4] Huang H.-L., Wu D., Fan D., Zhu X. Superconducting quantum computing: a review. // *Science China Information Sciences*. 2020. Vol. 63. Article number 180501. DOI: <http://doi.org/10.1007/S11432-020-2881-9>.
- [5] Chen J. Review on Quantum Communication and Quantum Computation // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. Vol. 1865. Article number 022008. DOI: <http://doi.org/10.1088/1742-6596/1865/2/022008>.
- [6] Pashkin Yu.A., Astafiev O., Yamamoto T., Nakamura Y., Tsai J.S. Josephson charge qubits: a brief review // *Quantum Information Processing*. 2009. Vol. 8. Pp. 55–80. DOI: <http://doi.org/10.1007/s11128-009-0101-5>.
- [7] Shi J. Entanglement Research for the Coupled Superconducting Phase Qubit and a Two-Level System // *Advances in Condensed Matter Physics*. 2020. Vol. 2020. Article number 3838106. DOI: <https://doi.org/10.1155/2020/3838106>.

- [8] Berrada K., Abdel-Khalek S., Algarni M. Coherence, purity and correlation for superconducting charge qubits // Results in Physics. 2023. Vol. 48. Article number 106414. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2023.106414>.
- [9] Mohamed A.-B.A., Rahman A.U., Eleuch H. Measurement Uncertainty, Purity, and Entanglement Dynamics of Maximally Entangled Two Qubits Interacting Spatially with Isolated Cavities: Intrinsic Decoherence Effect // Entropy. 2022. Vol. 24, Issue 4. Article number 545. DOI: <https://doi.org/10.3390/e24040545>.
- [10] Abdel-Khalek S., Berrada K., Khalil E.M., Eleuch H., Obada A.-S.F., Reda E. Tavis–Cummings Model with Moving Atoms // Entropy. 2021. Vol. 23, Issue 4. Article number 452. DOI: <https://doi.org/10.3390/e23040452>.
- [11] Movahedi R., Afshar D., Jafarpour M. Improvement of the entanglement generation in atomic states using a single-mode field in the Tavis–Cummings model // The European Physical Journal D. 2023. Vol. 77. Article number 59. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjd/s10053-023-00647-z>.
- [12] Abdel-Khalek S., Berrada K., Khalil E.M., Obada A.-S. F., Reda E., Eleuch H. Quantumness Measures for a System of Two Qubits Interacting with a Field in the Presence of the Time-Dependent Interaction and Kerr Medium // Entropy. 2021. Vol. 23, Issue 5. Article number 635. DOI: <https://doi.org/10.3390/e23050635>.
- [13] Algarni M., Berrada K., Abdel-Khalek S., Eleuch H. Parity Deformed Tavis-Cummings Model: Entanglement, Parameter Estimation and Statistical Properties // Mathematics. 2022. Vol. 10, Issue 17. Article number 3051. DOI: <https://doi.org/10.3390/math10173051>.
- [14] Ali S.I. Influence of deformed cavity field and atomic dipole interaction on the quantum correlations of two qubit system // Optical and Quantum Electronics. 2023. Vol. 55. Article number 47. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11082-022-04288-1>.
- [15] Wootters W.K. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits // Physical Review Letters. 1998. Vol. 80, Issue 10. Pp. 2245–2248. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2245>.
- [16] Peres A. Separability Criterion for Density Matrices // Physical Review Letters. 1996. Vol. 77, Issue 8. Pp. 1413–1415. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413>.
- [17] Horodecki R., Horodecki M., Horodecki P. Separability of Mixed States: Necessary and Sufficient Condition // Physics Letters A. 1996. Vol. 223. Pp. 333–339. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0375-9601\(96\)00706-2](http://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2).
- [18] He X.-L., Liu Y.-X., You J.Q., Franco Nori F. Variable-frequency-controlled coupling in charge qubit circuits: Effects of microwave field on qubit-state readout // Physical Review A. Atomic, molecular and optical physics. 2007. Vol. 76, Issue 2. Article number 22317. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.76.022317>.
- [19] Liao Q.-H., Fang G.-Yu, Wang J.-C., Ahmad M.A., Liu S.-T. Control of the Entanglement between Two Josephson Charge Qubits // Chinese Physics Letters. 2011. Vol. 28, Number 6. Article number 060307. DOI: <http://doi.org/10.1088/0256-307X/28/6/060307>.
- [20] Kim M.S., Lee J., Ahn D., Knight P.L. Entanglement induced by a single-mode heat environment. // Physical Review A. Atomic, molecular and optical physics, 2002, Vol. 65, Issue 4. Article number 040101. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevA.65.040101>.
- [21] Yu T., Eberly J. H. Sudden death of entanglement // Science. 2009. Vol. 323, Issue 5914. P. 598–601. DOI: <http://doi.org/10.1126/science.1167343>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-2-62-71

Submitted: 25.04.2023

Revised: 06.06.2023

Accepted: 30.06.2023

E.K. Bashkirov

Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: bashkirov.ek@ssau.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8682-4956>

ENTANGLEMENT BETWEEN TWO SUPERCONDUCTING CHARGE QUBITS

ABSTRACT

In this paper, we investigated the dynamics of entanglement of two identical charge qubits with Josephson junctions in the case when one of the qubits is exposed to a microwave field in a coherent or thermal state. We have found the exact solution of the quantum time equation of evolution of the system under consideration for the statistical operator in the case of initial separable and entangled states of qubits. The exact solution for the complete statistical operator is used to calculate the qubit entanglement criterion - concurrence. The

results of numerical simulation of the time dependence of the concurrence in the case of the coherent field showed that, with a certain choice of model parameters, the system can realize long-lived entangled states. It is also shown that for the thermal state of the field and the entangled initial state of qubits, the qubits retain a certain degree of entanglement during evolution even in the case of very intensive fields. In this case, for any intensities of thermal noise, there is no effect of the sudden death of entanglement.

Key words: charge qubits; microwave field; coherent state; thermal state; entanglement; concurrence; sudden death of entanglement.

Citation. Bashkirov E.K. Entanglement between two superconducting charge qubits. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 2, pp. 62–71. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-2-62-71>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: author and reviewers declare no conflict of interests.

© Bashkirov E.K., 2023

Eugene K. Bashkirov — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

- [1] X. Gu X., Kockum A.F., Miranowicz A., Liu Y.X., Nori F. Microwave photonics with superconducting quantum circuits. *Physics Reports*, 2017, vol. 718–719, pp. 1–102. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.physrep.2017.10.002>.
- [2] Wendin G. Quantum information processing with superconducting circuits: a review. *Reports on Progress in Physics*, 2017, vol. 80, number 10, Article number 106001. DOI: <http://doi.org/10.1088/1361-6633/aa7e1a>.
- [3] Kjaergaard M., Schwartz M.E., Braumüller J., Krantz P., Wang J.-I., Gustavsson S., Oliver W.D. Superconducting Qubits: Current State of Play. *Annual Reviews of Condensed Matter Physics*, 2020, vol. 11, pp. 369–395. DOI: <http://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031119-050605>.
- [4] Huang H.-L., Wu D., Fan D., Zhu X. Superconducting quantum computing: a review. *Science China Information Sciences*, 2020, vol. 63, Article number 180501. DOI: <http://doi.org/10.1007/S11432-020-2881-9>.
- [5] Chen J. Review on Quantum Communication and Quantum Computation. *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, vol. 1865, Article number 022008. DOI: <http://doi.org/10.1088/1742-6596/1865/2/022008>.
- [6] Pashkin Yu.A., Astafiev O., Yamamoto T., Nakamura Y., Tsai J.S. Josephson charge qubits: a brief review. *Quantum Information Processing*, 2009, vol. 8, pp. 55–80. DOI: <http://doi.org/10.1007/s11128-009-0101-5>.
- [7] Shi J. Entanglement Research for the Coupled Superconducting Phase Qubit and a Two-Level System. *Advances in Condensed Matter Physics*, 2020, vol. 2020, Article number 3838106. DOI: <https://doi.org/10.1155/2020/3838106>.
- [8] Berrada K., Abdel-Khalek S., Algarni M. Coherence, purity and correlation for superconducting charge qubits. *Results in Physics*, 2023, vol. 48, Article number 106414. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2023.106414>.
- [9] Mohamed A.-B.A., Rahman A.U., Eleuch H. Measurement Uncertainty, Purity, and Entanglement Dynamics of Maximally Entangled Two Qubits Interacting Spatially with Isolated Cavities: Intrinsic Decoherence Effect. *Entropy*, 2022, vol. 24, issue 4, Article number 545. DOI: <https://doi.org/10.3390/e24040545>.
- [10] Abdel-Khalek S., Berrada K., Khalil E.M., Eleuch H., Abdel-Shafy F., Obada A.-S.F., Reda E. Tavis–Cummings Model with Moving Atoms. *Entropy*, 2021, vol. 23, issue 4, Article number 452. DOI: <https://doi.org/10.3390/e23040452>.
- [11] Movahedi R., Afshar D., Jafarpour M. Improvement of the entanglement generation in atomic states using a single-mode field in the Tavis–Cummings model. *The European Physical Journal D*, 2023, vol. 77, Article number 59. DOI: <https://doi.org/10.1140/epjd/s10053-023-00647-z>.
- [12] Abdel-Khalek S., Berrada K., Khalil E.M., Obada A.-S. F., Reda E., Eleuch H. Quantumness Measures for a System of Two Qubits Interacting with a Field in the Presence of the Time-Dependent Interaction and Kerr Medium. *Entropy*, 2021, vol. 23, issue 5, Article number 635. DOI: <https://doi.org/10.3390/e23050635>.
- [13] Algarni M., Berrada K., Abdel-Khalek S., Eleuch H. Parity Deformed Tavis-Cummings Model: Entanglement, Parameter Estimation and Statistical Properties. *Mathematics*, 2022, vol. 10, issue 17, Article number 3051. DOI: <https://doi.org/10.3390/math10173051>.
- [14] Ali S.I. Influence of deformed cavity field and atomic dipole interaction on the quantum correlations of two-qubit system. *Optical and Quantum Electronics*, 2023, vol. 55, Article number 47. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11082-022-04288-1>.

- [15] Wootters W.K. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits. *Physical Review Letters*, 1998, vol. 80, issue 10, pp. 2245–2248. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2245>.
- [16] Peres A. Separability Criterion for Density Matrices. *Physical Review Letters*, 1996, vol. 77, issue 8, pp. 1413–1415. DOI: <http://doi.or/10.1103/PhysRevLett.77.1413>.
- [17] Horodecki R., Horodecki M., Horodecki P. Separability of Mixed States: Necessary and Sufficient Condition. *Physics Letters A*, 1996, vol. 223, pp. 333–339. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0375-9601\(96\)00706-2](http://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2).
- [18] He X.-L., Liu Y.-X., You J.Q., Franco Nori F. Variable-frequency-controlled coupling in charge qubit circuits: Effects of microwave field on qubit-state readout. *Physical Review A. Atomic, molecular and optical physics*, 2007, vol. 76, issue 2, Article number 22317. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.76.022317>.
- [19] Liao Q.-H., Fang G.-Yu, Wang J.-C., Ahmad M.A., Liu S.-T. Control of the Entanglement between Two Josephson Charge Qubits. *Chinese Physics Letters*, 2011, vol. 28, number 5, Article number 060307. DOI: <http://doi.org/10.1088/0256-307X/28/6/060307>.
- [20] Kim M.S., Lee J., Ahn D., Knight P.L. Entanglement induced by a single-mode heat environment. *Physical Review A. Atomic, molecular and optical physics*, 2002, vol. 65, issue 4, Article number 040101. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevA.65.040101>.
- [21] Yu T., Eberly J. H. Sudden death of entanglement. *Science*, 2009, vol. 323, issue 5914, pp. 598–601. DOI: <http://doi.org/10.1126/science.1167343>.