

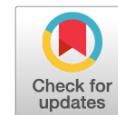
## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ MATHEMATICAL MODELLING



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-2-7-18

УДК 517; 519.6; 519.8



Дата: поступления статьи: 01.03.2023  
после рецензирования: 11.04.2023  
принятия статьи: 30.06.2023

**С.В. Борзунов**

Воронежский государственный университет,  
г. Воронеж, Российская Федерация

E-mail: sborzunov@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5099-9655>

### ТРАНСФОРМАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ НЕУСТОЙЧИВОЙ СИСТЕМЫ В ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕ-НАКОПИТЕЛЕ ЭНЕРГИИ

#### АННОТАЦИЯ

В настоящей статье предложена простая модель преобразователя-запасателя энергии, трансформирующего энергию неустойчивых механических колебаний в полезную электрическую энергию. Механическая часть системы представлена в виде перевернутого маятника. Электрическая часть состоит из преобразователя механической энергии, основанного на прямом пьезоэлектрическом эффекте, и полезной нагрузки. Динамика системы рассматривается в линеаризованной постановке, определены области устойчивости, идентифицированы различные режимы динамики в пространстве параметров. Установлено, что стабилизирующее маятник управление, основанное на принципах обратной связи, позволяет перевести систему в устойчивый режим функционирования. Найдены оптимальные характеристики системы, отвечающие максимальной мощности.

**Ключевые слова:** преобразователь-запасатель энергии; перевернутый маятник; устойчивость системы

**Цитирование.** Борзунов С.В. Трансформация колебаний неустойчивой системы в преобразователе-накопителе энергии // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2023. Т. 29, № 2. С. 7–18. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-2-7-18>.

**Информация о конфликте интересов:** авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Борзунов С.В., 2023

Сергей Викторович Борзунов — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры цифровых технологий, Воронежский государственный университет, 394018, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская пл., 1.

## Введение

В настоящее время совершенствование конструкции и повышение производительности преобразователей-запасателей энергии — устройств, предназначенных для трансформации энергии колебаний механических составляющих сложных систем, — являются предметом интенсивных исследований. Современные достижения в науках о материалах, электронике и теории управления позволили уменьшить размеры, надежность и стоимость таких устройств, но тем не менее достижение характеристик, сравнимых с традиционными электрическими батареями, продолжает оставаться актуальной научно-технической задачей.

Процесс запасания энергии, как известно, заключается в перераспределении кинетической энергии колеблющегося массивного тела в электрическую форму энергии.

Различные механизмы поддержания резонансных режимов посредством вибрационных колебательных систем с настраиваемыми характеристиками рассматривались в работах [1–6]. Однако рассматриваемые в этих работах системы требуют прецизионной настройки параметров, не всегда реализуемой в реальных технических системах. В частности, большое внимание уделяется величинам электрического напряжения [7], температурным условиям [8], шумовым воздействиям [9].

В частности, ряд работ посвящен электрическим цепям, включающим в свой состав пьезоэлектрические материалы, т. е. вещества, в которых при упругих деформациях возникает электрическая поляризация. Они представляют собой кристаллические вещества без центра симметрии и характеризуются сложной, нелинейной зависимостью между приложенным механическим напряжением и создаваемым электрическим полем. Среди пьезоэлектриков выделяют класс сегнетоэлектрических материалов, которые обладают в определенном диапазоне температур ненулевой поляризацией, изменяющейся за счет внешних воздействий [10; 11]. Именно сегнетоэлектрики служат материалом для построения микроэлектромеханических систем (microelectromechanical systems, MEMS): излучателей звука, акселерометров, прецизионных датчиков микроперемещений [8; 12; 13].

Существует максимальное значение внешнего поля, при котором сегнетоэлектрический материал может эксплуатироваться без повреждения (пробоя). Таким образом, приложенное поле материала не может достичь положения насыщения. Но в приложениях входное значение часто не достигает этого фиксированного максимального значения, и иногда начальное входное значение может быть просто нулевым.

Экспериментальные данные показывают, что известные модели с достаточной точностью описывают пьезокерамический преобразователь, когда он подвергается воздействию низкочастотного электрического напряжения. Точность моделей ухудшается, если диапазон частот напряжения становится шире, а также в случае относительно больших механических нагрузок [14].

## 1. Модель преобразователя-запасателя энергии в линейном приближении

Как было указано выше, важнейшими частями преобразователя-запасателя энергии являются механическая колебательная система и связанная с ней электромагнитная система, воспринимающая энергию осцилляций. В настоящей статье механическую часть преобразователя энергии предлагается выбрать в виде обратного маятника.

Модель изучаемой системы состоит из перевернутого математического маятника, закрепленного на легкой горизонтальной платформе и соединенного механической связью с сегнетоэлектрическим конденсатором, который включен в замкнутую электрическую цепь. Платформа  $P$  может перемещаться в горизонтальном направлении. Обозначим угол отклонения маятника относительно вертикали через  $\varphi(t)$ , координату платформы — через  $u(t)$  (рис. 1.1). Длина маятника равна  $l$ , масса его груза равна  $m$ . Связь между механической и электрической подсистемами содержит звено, подчиняющееся закону вязкого трения с коэффициентом диссипации  $c$  [соответствующая сила трения равна  $F_{\text{тр}} = cv(t) = c \frac{d}{dt}(l\varphi/2 + u)$ ].

Пьезоэлектрический материал, образующий конденсатор с емкостью  $C$ , включен в электрическую цепь с внешней омической нагрузкой  $R$ . Напряжение на нагрузке обозначим через  $V(t)$ .

Рассматриваемая динамическая система описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} ml\ddot{\varphi} + c(l\dot{\varphi}/2 + \dot{u}) - mg \sin \varphi + AV = -m\ddot{u}, \\ C\dot{V} + \frac{V}{R} = B(l\dot{\varphi}/2 + \dot{u}). \end{cases} \quad (1.1)$$

Первое из уравнений системы (1.1) представляет собой уравнение движения груза  $m$  в условиях действия сил механического происхождения и силы инерции, а второе — баланс токов в электрической цепи. Точкой над символом обозначена производная по времени  $t$ .

В приближении небольших отклонений маятника от положения равновесия  $\sin \varphi \sim \varphi$  получаем (далее введены обозначения  $\gamma_0 = c/(2m)$ ,  $\omega_0^2 = g/l$ ):

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} + \gamma_0\dot{\varphi} - \omega_0^2\varphi + \frac{A}{ml}V = -\frac{1}{l}\ddot{u} - 2\frac{\gamma_0}{l}\dot{u}, \\ \dot{V} + \frac{1}{RC}V - \frac{Bl}{2C}\dot{\varphi} = \frac{B}{C}\dot{u}. \end{cases} \quad (1.2)$$

В этой системе  $A$  и  $B$  — параметры связи (coupling) механической и электрической подсистем, которые выводятся на основе следующих рассуждений. Уравнение относительно неизвестной функции  $\varphi(t)$  представляет собой уравнение движение осциллятора, находящегося под воздействием, помимо механических сил, внешней силы немеханического происхождения [ $F_{\text{ext}}(t) = AV(t)$ ], а также силы инерции  $F_{\text{iner}}(t) = -m\ddot{u}(t)$ .

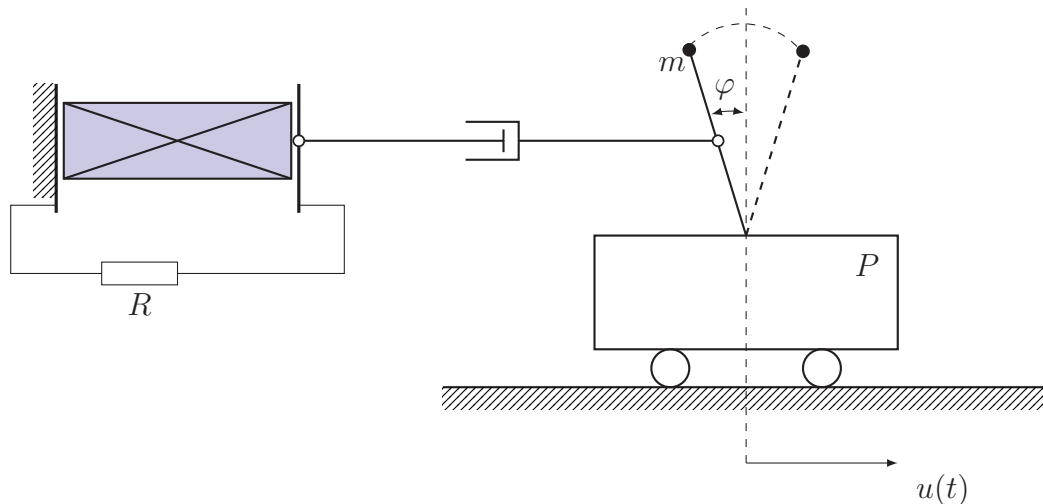


Рис. 1.1. Схематическое описание математического маятника, связанного с пьезоэлектрическим генератором

Fig. 1.1. Scheme of a mathematical pendulum associated with a piezoelectric generator

Закон упругих деформаций (закон Гука) связывает натяжение  $\sigma$  и относительную деформацию (для однородных и изотропных материалов в случае умеренных абсолютных величин упругих деформаций):

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (1.3)$$

где  $E$  — модуль Юнга, зависящий только от материала пьезоэлектрика и его физического состояния [в нелинейном случае  $\sigma = E\varepsilon + E_2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^2)$ ].

Если нет касательных напряжений, то поляризация пьезоэлектрического образца при растяжении или сжатии определяется выражением

$$P_x = d_{11}(\tau_x - \tau_y), \quad (1.4)$$

где  $\tau_x$  и  $\tau_y$  — механические натяжения, действующие параллельно осям  $Ox$  и  $Oy$ , а  $d_{11}$  — постоянная, называемая пьезоэлектрическим модулем. Выразим заряд  $Q = CV(t)$ , сформированный на гранях образца (примем за  $S$  площадь одной грани,  $C$  — электрическая емкость конденсатора, образованного пьезоэлектрической пластинкой):

$$Q = p_x S, \quad (1.5)$$

$$Q = d_{11}F. \quad (1.6)$$

Следовательно, между упругой силой, действующей со стороны пьезоэлектрика на груз  $m$ , и смещением  $\delta(t) = l\varphi/2 + u$  существует связь в виде линейной пропорциональности:

$$F = \frac{d_{11}}{C}V = AV, \quad (1.7)$$

где  $A$  — константа, зависящая только от материала и его диэлектрика термодинамических свойств. Другими словами, напряжение линейно зависит от смещения по формуле  $V(\delta) = \frac{ES}{AL}\delta(t)$ , где  $L$  — длина пьезоэлектрической пластинки [т. к. закон Гука можно представить в виде  $F/S = E \times (\delta/L)$ ].

Для того чтобы использовать поляризационные заряды, появляющиеся на противоположных гранях кварцевой пластинки при ее деформации, грани снабжены металлическими обкладками. На таких обкладках индуцируются заряды, равные и противоположные по знаку поляризационным, а во внешних проводах, соединяющих обкладки, возникает электрический ток.

В электрической цепи, состоящей из внешнего источника тока (за счет поляризации пластин диэлектрика) и параллельно соединенных конденсатора  $C$  и резистора  $R$  (выполняющего роль активной нагрузки), действует закон Ома:

$$C\dot{V} + \frac{V}{R} = B\dot{\delta}, \quad (1.8)$$

где  $B = \frac{CES}{AL} = \frac{C^2ES}{d_{11}L} = const.$

Заметим, что в литературе, посвященной моделям накопителей энергии, описаны электрические подсистемы, построенные на тех же принципах, но удовлетворяющие другим дифференциальным уравнениям, в частности,

в работе [15]:

$$\tilde{B}\ddot{x} + C\ddot{V} + \frac{\dot{V}}{R} + \frac{V}{L} = 0, \quad (1.9)$$

в работах [16; 17]:

$$R\dot{Q} - \frac{d(x)}{C}x + \frac{Q}{C} = 0 \quad (1.10)$$

(здесь  $d(x)$  — зависящий от механического параметра  $x$  коэффициент связи между механической и электрической подсистемами).

Среди многих вариантов механической колебательной системы на основе маятника, предлагаемых для использования в накопителях энергии, отметим маятник на перевернутой балке [18], перевернутый маятник с ограничителями амплитуды (inverted pendulum amplitude limiters) [19], перевернутая консольная балка с массой на конце (cantilever beam with a tip mass) [20].

### 1.1. Приведение системы к безразмерному виду

Перейдем от переменных  $t$  и  $V$  к безразмерным переменным по следующему правилу:

$$t = t_c \cdot \tau, \quad V = V_c \cdot v, \quad (1.11)$$

где характерные величины времени  $t_c$  и напряжения  $V_c$  будут определены ниже. Угол отклонения маятника  $\varphi(t)$  является безразмерной величиной.

Система (1.1) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{l^2} \ddot{\varphi} + \frac{\gamma_0}{t_c} \dot{\varphi} - \omega_0^2 \varphi + \frac{A}{ml} V_c v = -\frac{1}{l^2} \ddot{u}(t_c \tau) - 2 \frac{\gamma_0}{l t_c} \dot{u}(t_c \tau), \\ \frac{V_c}{t_c} \dot{v} + \frac{1}{RC} V_c v - \frac{Bl}{2C} \frac{1}{t_c} \dot{\varphi} = \frac{B}{C t_c} \dot{u}(t_c \tau). \end{cases} \quad (1.12)$$

Здесь и далее точкой над символом обозначена производная по безразмерному времени  $\tau$  (двумя точками — вторая производная по  $\tau$ ). Выполним алгебраические преобразования:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} + \gamma_0 t_c \dot{\varphi} - \omega_0^2 t_c^2 \varphi + \frac{A}{ml} V_c t_c^2 v = -\frac{1}{l} \ddot{u}(t_c \tau) - 2 \frac{\gamma_0 t_c}{l} \dot{u}(t_c \tau), \\ \dot{v} + \frac{1}{RC} t_c v - \frac{Bl}{2C} \frac{1}{V_c} \dot{\varphi} = \frac{B}{C V_c} \dot{u}(t_c \tau). \end{cases} \quad (1.13)$$

Пусть функция, определяющая движение платформы  $P$ , равна  $\tilde{u}(t) = u(t_c \tau)$ , а значения размерных коэффициентов:  $t_c = RC$ ,  $V_c = \frac{ml}{A(RC)^2}$ . Тогда получим основную систему в безразмерном виде:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} + \gamma_0 (RC) \dot{\varphi} - \omega_0^2 (RC)^2 \varphi + v = -\frac{1}{l} \ddot{\tilde{u}}(\tau) - 2 \frac{\gamma_0 (RC)}{l} \dot{\tilde{u}}(\tau), \\ \dot{v} + v - \frac{AB}{2m} R^2 C \dot{\varphi} = \frac{AB}{ml} R^2 C \dot{\tilde{u}}(\tau). \end{cases} \quad (1.14)$$

С целью упрощения и ясности дальнейших вычислений введем обозначения для безразмерных величин: коэффициента затухания, характеристической частоты маятника и внешнего воздействия:  $\gamma = \gamma_0 \cdot (RC)$ ,  $\omega = \omega_0 \cdot (RC)$ ,  $w = \tilde{u}(\tau)/l$ . Также удобно обозначить коэффициент связи электрической и механической подсистем через  $\sigma = \frac{AB}{2m} R^2 C$ . Окончательно

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} + \gamma \dot{\varphi} - \omega^2 \varphi + v = -\ddot{w}(\tau) - 2\gamma \dot{w}(\tau), \\ \dot{v} + v - \sigma \dot{\varphi} = 2\sigma \dot{w}(\tau), \end{cases} \quad (1.15)$$

или в более удобной матричной форме:

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \omega^2 & -\gamma & -1 \\ 0 & \sigma & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{w} - 2\gamma \dot{w} \\ 2\sigma \dot{w} \end{bmatrix}, \quad (1.16)$$

где  $\psi(\tau) = \dot{\varphi}(\tau)$  — угловая скорость маятника. Заметим, что согласно физической постановке задачи выполняются неравенства  $\omega > 0$ ,  $\gamma \geq 0$ .

## 1.2. Исследование устойчивости линеаризованной системы

Исследуем вопрос об устойчивости решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.16). Для этого выпишем характеристическое уравнение системы (1.16) в автономном случае:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ \omega^2 & -\gamma - \lambda & -1 \\ 0 & \sigma & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (1.17)$$

оно приводится к алгебраическому уравнению третьей степени с постоянными коэффициентами:

$$\lambda^3 + (\gamma + 1)\lambda^2 + (\gamma + \sigma - \omega^2)\lambda - \omega^2 = 0. \quad (1.18)$$

Как известно, необходимым и достаточным условием устойчивости системы дифференциальных уравнений является положительность всех трех главных диагональных миноров  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$  определителя Гурвица

$$\Gamma = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \quad (1.19)$$

где  $a_i$ ,  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$  — коэффициенты алгебраического уравнения (1.18), причем  $a_0 = 1$  (см., например, [21]). Поскольку  $a_3 = -\omega^2 < 0$ , то условия критерия Гурвица  $\Delta_1 > 0$ ,  $\Delta_2 > 0$ ,  $\Delta_3 > 0$ :

$$\begin{cases} a_1 > 0, \\ a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \\ a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) > 0, \end{cases} \quad (1.20)$$

как легко видеть, несовместны ни при каких допустимых значениях параметров  $\omega$ ,  $\gamma$ ,  $\sigma$ . Следовательно, система (1.16) является неустойчивой. Тем не менее введение управления с помощью внешнего воздействия  $w(\tau)$  позволяет в ряде случаев перевести динамическую систему в устойчивый режим колебаний. В следующем разделе рассмотрим, при каких значениях параметров задачи это возможно.

## 1.3. Управление амплитудой колебаний маятника

В настоящем разделе покажем, что введение управления с помощью внешнего воздействия  $w(\tau)$  позволяет стабилизировать движение маятника и предоставляет возможность управления амплитудой  $\varphi(\tau)$  его колебаний.

В настоящем разделе используется представление величин, изменяющихся по гармоническому закону, в виде вещественной части от экспоненциальной функции мнимого аргумента  $\sim \exp(i\Omega\tau)$ . Как известно, для линейных систем алгебраических или дифференциальных уравнений такой подход корректен и позволяет выполнять промежуточные выкладки в более компактной и наглядной форме.

Запишем систему уравнений (1.16) в условиях управления вида  $\dot{w}(t) = \alpha\varphi(t) + de^{i\Omega t}$ , где  $d \in \mathbb{C}$ :

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \omega^2 & -\gamma & -1 \\ 0 & \sigma & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha\dot{\varphi} - 2\gamma\alpha\varphi - e^{i\Omega\tau}(i\Omega + 2\gamma)d \\ 2\sigma\alpha\dot{\varphi} + 2\sigma i\Omega e^{i\Omega\tau}d \end{bmatrix}, \quad (1.21)$$

или

$$\frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \omega^2 - 2\gamma\alpha & -(\gamma + \alpha) & -1 \\ 2\sigma\alpha & \sigma & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -(i\Omega + 2\gamma)e^{i\Omega\tau} \\ 2\sigma i\Omega e^{i\Omega\tau} \end{bmatrix} d. \quad (1.22)$$

Как видно из (1.22), коэффициенты матрицы системы в результате действия управления изменились. Проверим условия критерия Гурвица в этом случае. Выпишем характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + (1 + \gamma + \alpha)\lambda^2 + [\gamma + \sigma - \omega^2 + (1 + 2\gamma)\alpha]\lambda + [-\omega^2 + 2(\gamma + \sigma)\alpha] = 0 \quad (1.23)$$

и матрицу Гурвица

$$\Gamma(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 + \gamma + \alpha & -\omega^2 + 2(\gamma + \sigma)\alpha & 0 \\ 1 & \gamma + \sigma - \omega^2 + (1 + 2\gamma)\alpha & 0 \\ 0 & 1 + \gamma + \alpha & -\omega^2 + 2(\gamma + \sigma)\alpha \end{bmatrix}, \quad (1.24)$$

которая приводит к следующим условиям:

$$\begin{cases} 1 + \gamma + \alpha > 0, \\ (1 + 2\gamma)\alpha^2 + (1 + 2\gamma + 2\gamma^2 - \sigma - \omega^2)\alpha + (1 + \gamma)(\gamma + \sigma) - \gamma\omega^2 > 0, \\ -\omega^2 + 2(\gamma + \sigma)\alpha > 0. \end{cases} \quad (1.25)$$

Итак, система (1.22) обладает устойчивостью тогда и только тогда, когда ее параметры удовлетворяют условиям (1.25). Ее решение относительно параметра управления  $\alpha$  не представляет сложностей:

$$\begin{cases} \alpha > \frac{\omega^2}{2(\gamma + \sigma)}, \text{ если } \mathcal{D} > 0, \\ \alpha > \max\left(\frac{\omega^2}{2(\gamma + \sigma)}, \alpha_b\right), \text{ если } \mathcal{D} \leq 0, \end{cases} \quad (1.26)$$

где  $\alpha_b$  — больший из двух корней квадратного уравнения (1.25),  $\mathcal{D}$  — его дискриминант:

$$\mathcal{D} = (1 + 2\gamma + 2\gamma^2 - \sigma - \omega^2)^2 - 4(1 + 2\gamma)(\gamma + \gamma^2 + \sigma + \gamma\sigma - \gamma\omega^2). \quad (1.27)$$

Запишем решение системы (1.22), представленное в виде суммы общего решения однородной системы и частного решения неоднородной:

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \\ v \end{bmatrix} = \text{Re} \left( C_1 e^{\lambda_1 \tau} \vec{f}_1 + C_2 e^{\lambda_2 \tau} \vec{f}_2 + C_3 e^{\lambda_3 \tau} \vec{f}_3 + \begin{bmatrix} A_\varphi \\ A_\psi \\ A_v \end{bmatrix} e^{i\Omega\tau} \right). \quad (1.28)$$

В формуле (1.28)  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — собственные значения матрицы системы (1.22), а  $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$  — отвечающие им собственные векторы.

В установившемся режиме, т. е. при достаточно больших значениях времени  $\tau \gg \gg \max(1/|\text{Re } \lambda_1|, 1/|\text{Re } \lambda_2|, 1/|\text{Re } \lambda_3|)$

$$\begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \\ v \end{bmatrix} = \text{Re} \begin{bmatrix} A_\varphi \\ A_\psi \\ A_v \end{bmatrix} e^{i\Omega\tau}. \quad (1.29)$$

Как видно из (1.29), решение в установившемся режиме содержит слагаемые, изменяющиеся по гармоническому закону  $\sim e^{i\Omega\tau}$ . Их амплитуды  $A_\varphi, A_\psi, A_v$ , как несложно показать непосредственной подстановкой  $\{\varphi(\tau) = A_\varphi e^{i\Omega\tau}, \psi(\tau) = A_\psi e^{i\Omega\tau}, v(\tau) = A_v e^{i\Omega\tau}\}$  в (1.22), удовлетворяют системе алгебраических уравнений:

$$\begin{bmatrix} -i\Omega & 1 & 0 \\ \omega^2 - 2\gamma\alpha & -(\gamma + \alpha + i\Omega) & -1 \\ 2\sigma\alpha & \sigma & -1 - i\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -(i\Omega + 2\gamma) \\ 2\sigma i\Omega \end{bmatrix} d = 0. \quad (1.30)$$

Таким образом, для амплитуды колебаний маятника в зависимости от амплитуды гармонического члена с частотой  $\Omega$  в управлении  $\dot{w}(\tau)$  получаем формулу:

$$A_\varphi = \frac{1}{\mathcal{F}(\Omega)} [2\gamma + i(1 + 2\gamma + 2\sigma)\Omega - \Omega^2] d, \quad (1.31)$$

где  $\mathcal{F}(\Omega) = \omega^2 - 2\alpha(\gamma + \sigma) - i\Omega [(1 + 2\gamma)\alpha + \gamma + \sigma - \omega^2] + \Omega^2(\alpha + \gamma + 1) + i\Omega^3$  — определитель системы (1.30) (заметим, что этот определитель также может быть получен из правой части (1.23) путем выполнения формальной замены  $\lambda \rightarrow i\Omega$ ). Установившиеся колебания возможны при условии  $\mathcal{F}(\Omega) \neq 0$ .

Аналогичным образом вычисляются амплитуды колебаний угловой скорости маятника и напряжения:

$$A_\psi = \frac{i\Omega}{\mathcal{F}(\Omega)} [2\gamma + i(1 + 2\gamma + 2\sigma)\Omega - \Omega^2] d, \quad (1.32)$$

$$A_v = \frac{\sigma}{\mathcal{F}(\Omega)} [4\alpha\gamma + 2i(\alpha + \gamma - 2\alpha\gamma + \omega^2)\Omega + (2\alpha + 2\gamma - 1)\Omega^2 + 2i\Omega^3] d. \quad (1.33)$$

Результаты численных расчетов области устойчивости, корней характеристического уравнения и решения системы при различных значениях параметров представлены на рис. 1.2–1.3.

Графики зависимости амплитуды вынужденных колебаний маятника  $|A_\varphi|$  в пространстве параметров  $\{(d, \Omega)\}$  представлены на рис. 1.4–1.5. На этих рисунках видны убывание максимальной амплитуды с увеличением  $\gamma$ , а также смещение резонансной области в сторону больших частот  $\Omega$  в этом случае. В силу линейности системы (1.30) величина  $|A_\varphi|$  пропорциональна параметру  $d$  в управляющей функции  $\dot{w}(t)$ .

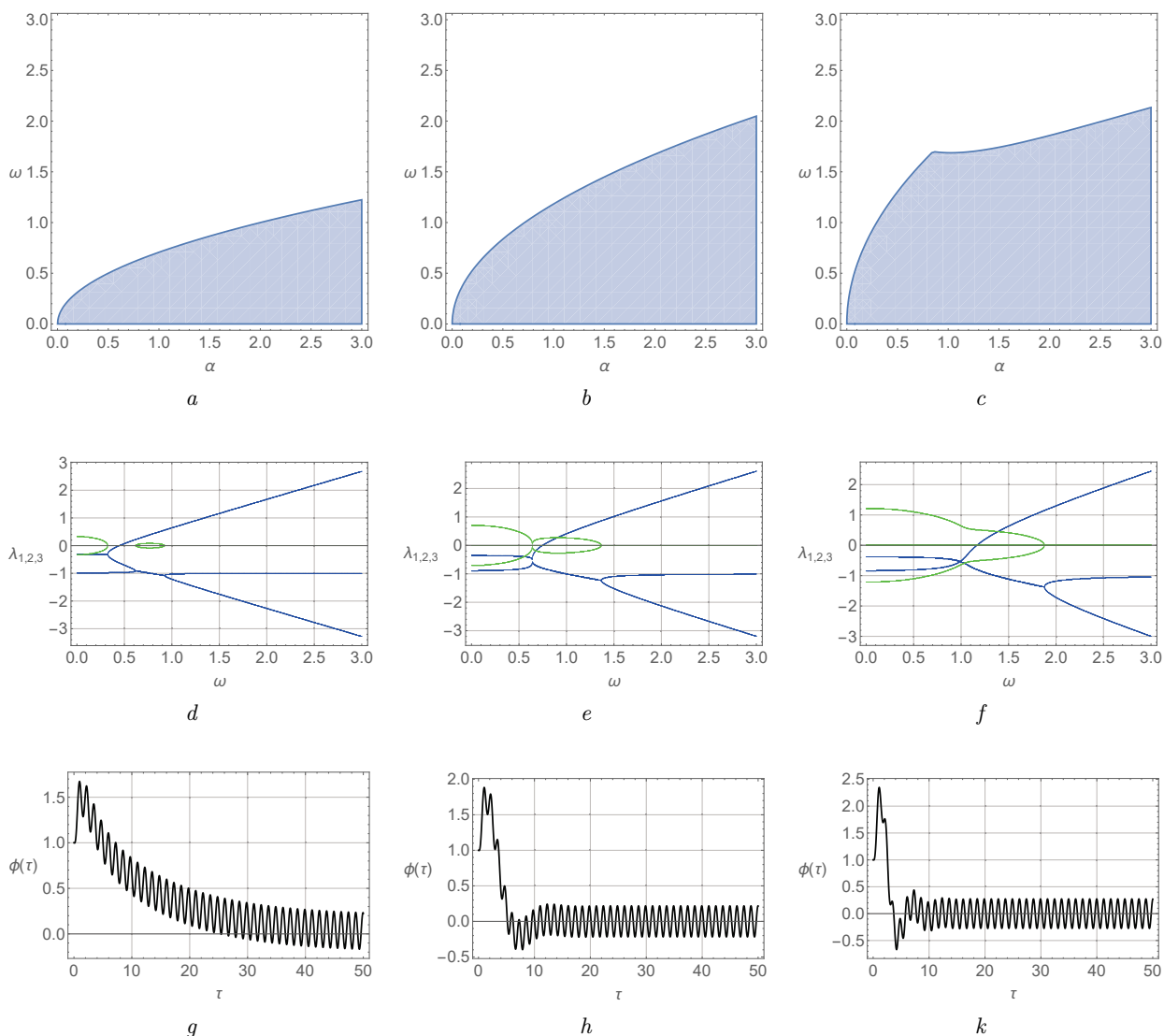


Рис. 1.2. Результаты численных расчетов области устойчивости (1.22), корней характеристического уравнения и решения (1.22) при  $\gamma = 0,2$ ,  $\alpha = 0,4$ . Параметры и начальные условия для угла отклонения  $\omega = 0,4$ ,  $d = 1,0$ ,  $\Omega = 5,0$ ,  $\varphi(0) = 1,0$ ,  $\psi(0) = 0,0$ ,  $v(0) = 1,0$ : *a* — область устойчивости для  $\sigma = 0,05$ ; *b* — область устойчивости для  $\sigma = 0,5$ ; *c* — область устойчивости для  $\sigma = 1,5$ ; *d* — вещественные (толстые линии) и мнимые части (тонкие линии) корней характеристического уравнения для  $\sigma = 0,05$ ; *e* — вещественные (толстые линии) и мнимые части (тонкие линии) корней характеристического уравнения для  $\sigma = 0,5$ ; *f* — вещественные (толстые линии) и мнимые части (тонкие линии) корней характеристического уравнения для  $\sigma = 1,5$ ; *g* — угол отклонения маятника для  $\sigma = 0,05$ ; *h* — угол отклонения маятника для  $\sigma = 0,5$ ; *k* — угол отклонения маятника для  $\sigma = 1,5$

Fig. 1.2. Results of numerical calculations of the stability region (1.22), roots of the characteristic equation and the solution (1.22) for  $\gamma = 0,2$ ,  $\alpha = 0,4$ . Parameters and initial conditions for the deflection angle are  $\omega = 0,4$ ,  $d = 1,0$ ,  $\Omega = 5,0$ ,  $\varphi(0) = 1,0$ ,  $\psi(0) = 0,0$ ,  $v(0) = 1,0$ : *a* — region of stability for  $\sigma = 0,05$ ; *b* — region of stability for  $\sigma = 0,5$ ; *c* — region of stability for  $\sigma = 1,5$ ; *d* — real (thick lines) and imaginary parts (thin lines) of the roots of the characteristic equation for  $\sigma = 0,05$ ; *e* — real (thick lines) and imaginary parts (thin lines) of the roots of the characteristic equation for  $\sigma = 0,5$ ; *f* — real (thick lines) and imaginary parts (thin lines) of the roots of the characteristic equation for  $\sigma = 1,5$ ; *g* — pendulum deflection angle for  $\sigma = 0,05$ ; *h* — pendulum deflection angle for  $\sigma = 0,5$ ; *k* — pendulum deflection angle for  $\sigma = 1,5$

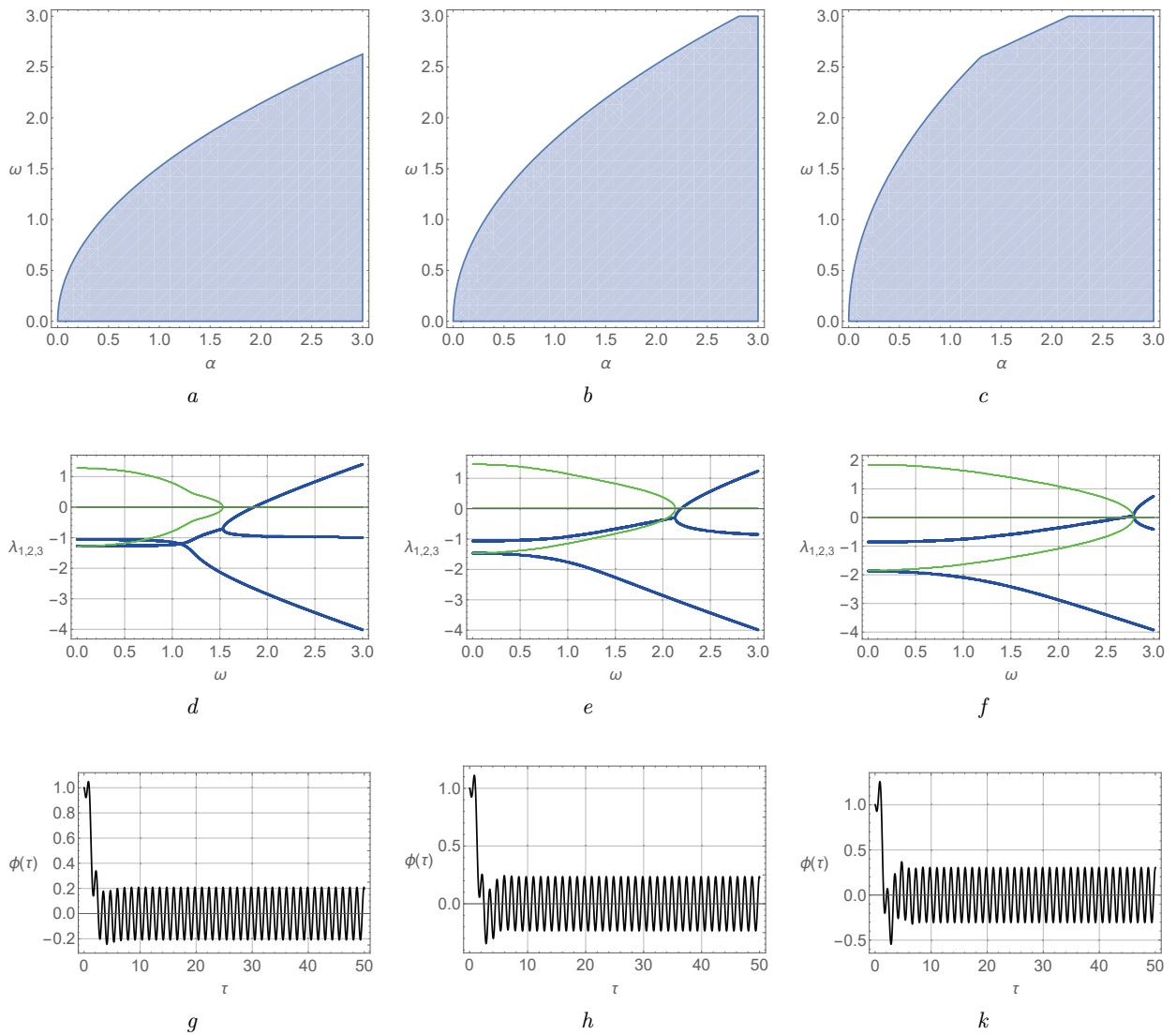


Рис. 1.3. Результаты численных расчетов области устойчивости (1.22), корней характеристического уравнения и решения (1.22) при  $\gamma = 1,1$ ,  $\alpha = 1,5$ . Параметры и начальные условия для угла отклонения  $\omega = 1,2$ ,  $d = 1,0$ ,  $\Omega = 5,0$ ,  $\varphi(0) = 1,0$ ,  $\psi(0) = 0,0$ ,  $v(0) = 1,0$ : *a* — область устойчивости системы для  $\sigma = 0,05$ ; *b* — область устойчивости системы для  $\sigma = 0,5$ ; *c* — область устойчивости системы для  $\sigma = 1,5$ ; *d* — вещественные (толстые линии) и мнимые части (тонкие линии) корней характеристического уравнения для  $\sigma = 0,05$ ; *e* — вещественные (толстые линии) и мнимые части (тонкие линии) корней характеристического уравнения для  $\sigma = 0,5$ ; *f* — вещественные (толстые линии) и мнимые части (тонкие линии) корней характеристического уравнения для  $\sigma = 1,5$ ; *g* — угол отклонения маятника для  $\sigma = 0,05$ ; *h* — угол отклонения маятника для  $\sigma = 0,5$ ; *k* — угол отклонения маятника для  $\sigma = 1,5$

Fig. 1.3. Results of numerical calculations of the stability region (1.22), roots of the characteristic equation and the solution (1.22) for  $\gamma = 1,1$ ,  $\alpha = 1,5$ . Parameters and initial conditions for the deflection angle are  $\omega = 1,2$ ,  $d = 1,0$ ,  $\Omega = 5,0$ ,  $\varphi(0) = 1,0$ ,  $\psi(0) = 0,0$ ,  $v(0) = 1,0$ : *a* — region of stability for  $\sigma = 0,05$ ; *b* — region of stability for  $\sigma = 0,5$ ; *c* — region of stability for  $\sigma = 1,5$ ; *d* — real (thick lines) and imaginary parts (thin lines) of the roots of the characteristic equation for  $\sigma = 0,05$ ; *e* — real (thick lines) and imaginary parts (thin lines) of the roots of the characteristic equation for  $\sigma = 0,5$ ; *f* — real (thick lines) and imaginary parts (thin lines) of the roots of the characteristic equation for  $\sigma = 1,5$ ; *g* — pendulum deflection angle for  $\sigma = 0,05$ ; *h* — pendulum deflection angle for  $\sigma = 0,5$ ; *k* — pendulum deflection angle for  $\sigma = 1,5$



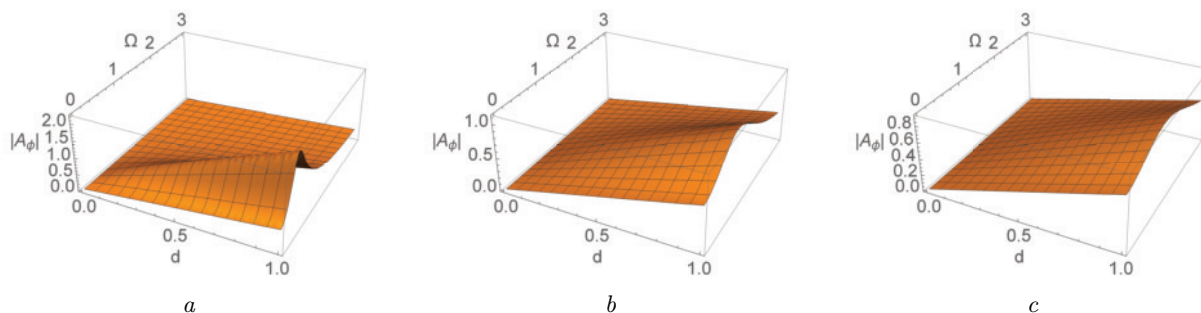


Рис. 1.4. Амплитуда вынужденных колебаний маятника  $|A_\varphi(d, \Omega)|$  согласно (1.31) для значений параметра  $\gamma$ , характеризующего трение:  $a - \gamma = 0.2$ ;  $b - \gamma = 1.1$ ;  $c - \gamma = 1.9$ . Расчет выполнен для  $\sigma = 0.5$ ,  $\alpha = 1.5$ ,  $\omega = 1.2$

Fig. 1.4. Amplitude of forced oscillations of the pendulum  $|A_\varphi(d, \Omega)|$  according to (1.31) for the values of the  $\gamma$  parameter characterizing the friction:  $a - \gamma = 0.2$ ;  $b - \gamma = 1.1$ ;  $c - \gamma = 1.9$ . The calculation was made for  $\sigma = 0.5$ ,  $\alpha = 1.5$ ,  $\omega = 1.2$

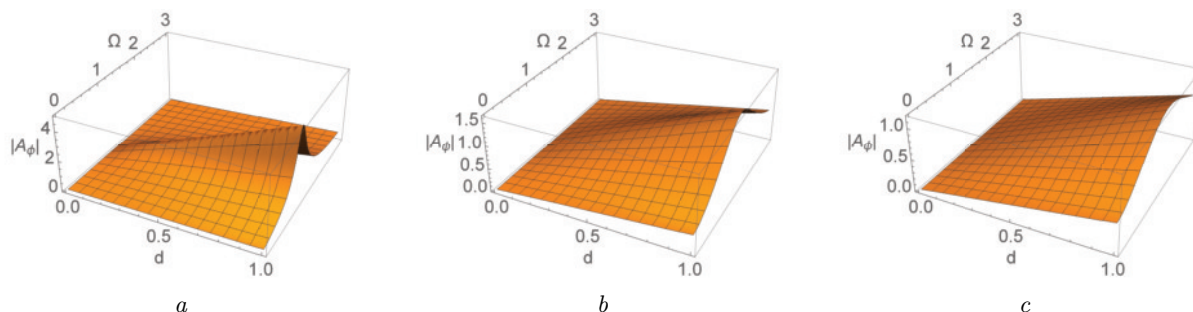


Рис. 1.5. Амплитуда вынужденных колебаний маятника  $|A_\varphi(d, \Omega)|$  согласно (1.31) для значений параметра  $\gamma$ , характеризующего трение:  $a - \gamma = 0.2$ ;  $b - \gamma = 1.1$ ;  $c - \gamma = 1.9$ . Расчет выполнен для  $\sigma = 1.5$ ,  $\alpha = 1.5$ ,  $\omega = 1.2$

Fig. 1.5. Amplitude of forced oscillations of the pendulum  $|A_\varphi(d, \Omega)|$  according to (1.31) for the values of the  $\gamma$  parameter characterizing the friction:  $a - \gamma = 0.2$ ;  $b - \gamma = 1.1$ ;  $c - \gamma = 1.9$ . The calculation was made for  $\sigma = 1.5$ ,  $\alpha = 1.5$ ,  $\omega = 1.2$

## Заключение

В настоящей статье предложена модель преобразователя-запасателя энергии, механической частью которого является обратный маятник. В рамках предложенной модели проведено исследование устойчивости линеаризованной системы. В частности, установлено, что стабилизирующее маятник управление, основанное на принципах обратной связи, позволяет перевести систему в устойчивый режим. В рамках численных экспериментов идентифицированы области в пространстве параметров, отвечающие максимальной мощности. Помимо этого идентифицированы области устойчивости в пространстве параметров, амплитудно-частотные характеристики, а также зависимость передаваемой мощности от параметра связи элементов преобразователя энергии.

## Литература

- [1] Зайцев В.В., Федюнин Э.Ю. Модель автоколебаний без гармоник основной частоты // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24, № 3. С. 53–59. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-3-53-59>. EDN: <https://elibrary.ru/ytbbet>.
- [2] Ibrahim P., Arafa M., Anis Y. An Electromagnetic Vibration Energy Harvester with a Tunable Mass Moment of Inertia // Sensors. 2021. Vol. 21, Issue 16. Article number 5611. DOI: <https://doi.org/10.3390/s21165611>.
- [3] Le Scornec J., Guiffard B., Seveno R., Le Camb V. Frequency tunable, flexible and low cost piezoelectric micro-generator for energy harvesting // Sensors and Actuators A: Physical. 2020. Vol. 312, Article number 112148. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.sna.2020.112148>.

- [4] Wang Y., Li L., Hofmann D., Andrade J.E., Daraio C. Structured fabrics with tunable mechanical properties // *Nature*. 2021. Vol. 596, pp. 238–243. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41586-021-03698-7>.
- [5] Semenov M.E., Solovyov A.M., Meleshenko P.A. Stabilization of coupled inverted pendula: From discrete to continuous case // *Journal of Vibration and Control*. 2021. Vol. 27, Issue 1–2, Pp. 43–56. DOI: <https://doi.org/10.1177/1077546320923436>. EDN: <https://elibrary.ru/uztjrc>.
- [6] Semenov M.E., Meleshenko P.A., Borzunov S.V., Reshetova O.O., Barsukov A.I. A Simple Model of the Energy Harvester within a Linear and Hysteresis Approach // *Micromachines*. 2023. Vol. 14, Issue 2, Article number 310. DOI: <https://doi.org/10.3390/mi14020310>.
- [7] Wang Z., He L., Zhang Z., Zhou Z., Zhou J., Cheng G. Research on a Piezoelectric Energy Harvester with Rotating Magnetic Excitation // *Journal of Electronic Materials*. 2021. Vol. 50, pp. 3228–3240. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11664-021-08910-y>.
- [8] Kovacova V., Glinsek S., Girod S., Defay E. High Electrocaloric Effect in Lead Scandium Tantalate Thin Films with Interdigitated Electrodes // *Sensors*. 2022. Vol. 22, Issue 11, article number 4049. DOI: <https://doi.org/10.3390/s22114049>.
- [9] Bouhedma S., Hu S., Schütz A., Lange F., Bechtold T., Ouali M., Hohlfeld D. Analysis and Characterization of Optimized Dual-Frequency Vibration Energy Harvesters for Low-Power Industrial Applications // *Micromachines*. 2022. Vol. 13, Issue 7. Article number 1078. DOI: <https://doi.org/10.3390/mi13071078>.
- [10] Damjanovic D. Ferroelectric, dielectric and piezoelectric properties of ferroelectric thin films and ceramics // *Reports of Progress in Physics*. 1998. Vol. 61, Number 9, Pp. 1267–1324. DOI: <https://doi.org/10.1088/0034-4885/61/9/002>.
- [11] Dawber M. Physics of thin-film ferroelectric oxides // *Review of Modern Physics*. 2005. Vol. 77, Issue 4. Article number 1083. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.77.1083>.
- [12] Cheng C., Peters T., Dangi A., Agrawal S., Chen H., Kothapalli S.-R., Trolier-McKinstry S. Improving PMUT Receive Sensitivity via DC Bias and Piezoelectric Composition // *Sensors*. 2022. Vol. 22, Issue 15. Article number 5614. DOI: <https://doi.org/10.3390/s22155614>.
- [13] Ge C., Cretu E. Simple and Robust Microfabrication of Polymeric Piezoelectric Resonating MEMS Mass Sensors // *Sensors*. 2022. Vol. 22, Issue 8, Article number 2994. DOI: <https://doi.org/10.3390/s22082994>.
- [14] Hu H., Ben Mrad R. On the classical Preisach model for hysteresis in piezoceramic actuators // *Mechatronics*. 2003. Vol. 13, Issue 2. Pp. 85–94. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0957-4158\(01\)00043-5](https://doi.org/10.1016/S0957-4158(01)00043-5).
- [15] Renno J.M., Daqaq M.F., Inman D.J. On the optimal energy harvesting from a vibration source // *Journal of Sound and Vibration*. 2009. Vol. 320, Issues 1–2, pp. 386–405. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.07.029>.
- [16] Triplett A., Quinn D.D. The effect of nonlinear piezoelectric coupling on vibration-based energy harvesting // *Proceedings of the IMECE2008 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Boston, MA, USA, 31 October – 6 November 2008; IMECE2008-66393*. Pp. 1–6.
- [17] Tusset A.M., Rocha R.T., Iliuk I., Balthazar J.M., Litak G. Dynamics and Control of Energy Harvesting from a Non-ideally Excited Portal Frame System with Fractional Damping // Balthazar J.M. (eds) *Vibration Engineering and Technology of Machinery. Mechanisms and Machine Science*, vol 95. Cham: Springer, 2021, pp. 383–395. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-60694-7\\_25](https://doi.org/10.1007/978-3-030-60694-7_25).
- [18] Pan J., Qin W., Deng W., Zhang P., Zhou Z. Harvesting weak vibration energy by integrating piezoelectric inverted beam and pendulum // *Energy*. 2021. Vol. 227. Article number 120374. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.energy.2021.120374>.
- [19] Lygas K., Wolszczak P., Litak G. Broadband frequency response of a nonlinear resonator with clearance for energy harvesting // *MATEC Web Conference*. 2018. Vol. 148, Article number 12003. DOI: <https://doi.org/10.1051/mateconf/201814812003>.
- [20] Friswell M.I., Ali S.F., Bilgen O., Adhikari S., Lees A.W., Litak G. Non-linear piezoelectric vibration energy harvesting from a vertical cantilever beam with tip mass // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2012. Vol. 23, Issue 13. Pp. 1505–1521. DOI: <https://doi.org/10.1177/1045389X12455722>.
- [21] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 560 с. ISBN 978-5-9221-0524-8. URL: <https://djvu.online/file/9RBsN3mYxlxaq>.



**S. V. Borzunov**

Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation

E-mail: sborzunov@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5099-9655>

## TRANSFORMATION OF OSCILLATIONS OF AN UNSTABLE SYSTEM IN AN ENERGY HARVESTER

### ABSTRACT

In this work, a simple model of energy harvester transforming the energy of unstable mechanical vibrations into useful electric energy is proposed. The mechanical part of the system is presented in the form of an inverted pendulum. The electric part consists of a converter of mechanical energy based on a direct piezoelectric effect, and a payload. The dynamics of the system is considered in the linearized production, the areas of stability are determined, various dynamics modes in the parameter space are identified. It was established that the stabilizing pendulum of management based on the principles of feedback allows you to transfer the system into a stable mode of functioning. The optimal characteristics of the system that meets maximum power were found.

**Key words:** energy harvester; inverted pendulum; stability of the system.

**Citation.** Borzunov S.V. Transformation of oscillations of an unstable system in an energy harvester. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 2, pp. 7–18. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-2-7-18>. (In Russ.)

**Information about the conflict of interests:** authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Borzunov S.V., 2023

*Sergei V. Borzunov* — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Digital Technologies, Voronezh State University, 1, Universitetskaya Square, Voronezh, 394018, Russian Federation.

## References

- [1] Zaitsev V.V., Fedyunin E.Yu. Model of self-oscillations without harmonicas of the base frequency. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2018, vol. 24, no. 3, pp. 53–59. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-3-53-59>. EDN: <https://elibrary.ru/ytbbet>. (In Russ.)
- [2] Ibrahim P., Arafa M., Anis Y. An Electromagnetic Vibration Energy Harvester with a Tunable Mass Moment of Inertia. *Sensors*, 2021, vol. 21, issue 16, article number 5611. DOI: <https://doi.org/10.3390/s21165611>.
- [3] Le Scornec J., Guiffard B., Seveno R., Le Camb V. Frequency tunable, flexible and low cost piezoelectric micro-generator for energy harvesting. *Sensors and Actuators A: Physical*, 2020, vol. 312, p. 112148. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.sna.2020.112148>.
- [4] Wang Y., Li L., Hofmann D., Andrade J.E., Daraio C. Structured fabrics with tunable mechanical properties. *Nature*, 2021, vol. 596, pp. 238–243. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41586-021-03698-7>.
- [5] Semenov M.E., Solovyov A.M., Meleshenko P.A. Stabilization of coupled inverted pendula: From discrete to continuous case. *Journal of Vibration and Control*, 2021, vol. 27, issue 1–2, pp. 43–56. <https://doi.org/10.1177/1077546320923436>
- [6] Semenov M.E., Meleshenko P.A., Borzunov S.V., Reshetova O.O., Barsukov A.I. A Simple Model of the Energy Harvester within a Linear and Hysteresis Approach. *Micromachines*, 2023, vol. 14, issue 2, p. 310. DOI: <https://doi.org/10.3390/mi14020310>.
- [7] Wang Z., He L., Zhang Z., Zhou Z., Zhou J., Cheng G. Research on a Piezoelectric Energy Harvester with Rotating Magnetic Excitation. *Journal of Electronic Materials*, 2021, vol. 50, pp. 3228–3240. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11664-021-08910-y>.
- [8] Kovacova V., Glinsek S., Girod S., Defay E. High Electrocaloric Effect in Lead Scandium Tantalate Thin Films with Interdigitated Electrodes. *Sensors*, 2022, vol. 22, issue 11, article number 4049. DOI: <https://doi.org/10.3390/s22114049>.
- [9] Bouhedma S., Hu S., Schütz A., Lange F., Bechtold T., Ouali M., Hohlfeld D. Analysis and Characterization of Optimized Dual-Frequency Vibration Energy Harvesters for Low-Power Industrial Applications. *Micromachines*, 2022, vol. 13, issue 7, article number 1078. DOI: <https://doi.org/10.3390/mi13071078>.

- [10] Damjanovic D. Ferroelectric, dielectric and piezoelectric properties of ferroelectric thin films and ceramics. *Reports of Progress in Physics*, 1998, vol. 61, number 9, pp. 1267–1324. DOI: <https://doi.org/10.1088/0034-4885/61/9/002>.
- [11] Dawber M. Physics of thin-film ferroelectric oxides. *Reviews of Modern Physics*, 2005, vol. 77, issue 4, article number 1083. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.77.1083>.
- [12] Cheng C., Peters T., Dangi A., Agrawal S., Chen H., Kothapalli S.-R., Trolier-McKinstry S. Improving PMUT Receive Sensitivity via DC Bias and Piezoelectric Composition. *Sensors*, 2022, vol. 22, issue 15, article number 5614. DOI: <https://doi.org/10.3390/s22155614>.
- [13] Ge C., Cretu E. Simple and Robust Microfabrication of Polymeric Piezoelectric Resonating MEMS Mass Sensors. *Sensors*, 2022, vol. 22, issue 8, article number 2994. DOI: <https://doi.org/10.3390/s22082994>.
- [14] Hu H., Ben Mrad R. On the classical Preisach model for hysteresis in piezoceramic actuators. *Mechatronics*. 2003. Vol. 13, Issue 2. P. 85–94. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0957-4158\(01\)00043-5](http://doi.org/10.1016/S0957-4158(01)00043-5).
- [15] Renno J.M., Daqaq M.F., Inman D.J. On the optimal energy harvesting from a vibration source. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, vol. 320, issues 1–2, pp. 386–405. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.07.029>.
- [16] Triplett A., Quinn D.D. The effect of nonlinear piezoelectric coupling on vibration-based energy harvesting. In: *Proceedings of the IMECE2008 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Boston, MA, USA, 31 October–6 November 2008*; IMECE2008-66393. pp. 1–6.
- [17] Tusset A.M., Rocha R.T., Iliuk I., Balthazar J.M., Litak G. Dynamics and Control of Energy Harvesting from a Non-ideally Excited Portal Frame System with Fractional Damping. In: *Balthazar J.M. (eds) Vibration Engineering and Technology of Machinery. Mechanisms and Machine Science*, vol. 95. Cham: Springer, 2021, pp. 383–395. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-60694-7\\_25](https://doi.org/10.1007/978-3-030-60694-7_25).
- [18] Pan J., Qin W., Deng W., Zhang P., Zhou Z. Harvesting weak vibration energy by integrating piezoelectric inverted beam and pendulum. *Energy*, 2021, vol. 227, article number 120374. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.energy.2021.120374>.
- [19] Lygas K., Wolszczak P., Litak G. Broadband frequency response of a nonlinear resonator with clearance for energy harvesting. In: *MATEC Web Conference*, 2018, vol. 148, article number 12003. DOI: <https://doi.org/10.1051/mateconf/201814812003>.
- [20] Friswell M.I., Ali S.F., Bilgen O., Adhikari S., Lees A.W., Litak G. Non-linear piezoelectric vibration energy harvesting from a vertical cantilever beam with tip mass. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2012, vol. 23, issue 13, pp. 1505–1521. DOI: <https://doi.org/10.1177/1045389X12455722>.
- [21] Gantmakher F.R. Theory of matrices. Moscow: FIZMATLIT, 2010, 560 p. ISBN 978-5-9221-0524-8. Available at: <https://djuv.online/file/9RBsN3mYxlxaq>. (In Russ.)