

## ФИЗИКА PHYSICS



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-1-89-101

УДК 517.9; 519.7; 530.145.83

Дата: поступления статьи: 08.02.2023  
после рецензирования: 29.03.2023  
принятия статьи: 30.05.2023

**А.Р. Багров**

Самарский национальный исследовательский университет  
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация  
E-mail: alexander.bagrov00@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1098-0300>

**Е.К. Башкиров**

Самарский национальный исследовательский университет  
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация  
E-mail: bashkirov.ek@ssau.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8682-4956>

### ПЕРЕПУТЫВАНИЕ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТРЕХКУБИТНОЙ МОДЕЛИ ДЖЕЙНСА — КАММИНГСА

#### АННОТАЦИЯ

В данной статье исследована динамика перепутывания пар кубитов в системе трех идентичных кубитов, нерезонансно взаимодействующих с выделенной модой микроволнового резонатора без потерь со средой Керра посредством однофотонных переходов. Найдено решение квантового временного уравнения Шредингера для полной волновой функции системы для начальных сепарабельных, бисепарабельных и истинных перепутанных состояний кубитов и фоковского начального состояния поля резонатора. На основе указанных решений проведено вычисление критерия перепутанности пар кубитов – отрицательности. Результаты численного моделирования отрицательности пар кубитов показали, что наличие расстройки и керровской нелинейности в случае начального перепутанного состояния пары кубитов может приводить к существенному увеличению степени их перепутывания. В случае начального перепутанного состояния пары кубитов расстройка и керровская среда могут приводить к существенной стабилизации начального перепутывания кубитов. Показано также, что наличие расстройки и керровская среда могут приводить к исчезновению эффекта мгновенной смерти перепутывания кубитов.

**Ключевые слова:** кубиты; нерезонансное взаимодействие; расстройка, резонатор; однофотонные переходы; нелинейность Керра; перепутывание; отрицательность; мгновенная смерть перепутывания.

**Цитирование.** Багров А.Р., Башкиров Е.К. Перепутывание в нелинейной трехкубитной модели Джейнса — Каммингса // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2023. Т. 29, № 1. С. 89–101. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-1-89-101>.

**Информация о конфликте интересов:** авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Багров А.Р., 2023

Багров Александр Романович — бакалавр кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

© Башкиров Е.К., 2023

Башкиров Евгений Константинович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

## Введение

Исследования многокубитных перепутанных состояний является одной из приоритетных задач квантовой информатики [1–7]. Перепутанные состояния естественных или искусственных атомов (кубитов) необходимы для функционирования таких квантовых устройств, как квантовые компьютеры, квантовые сети и др. [8–16]. Для теоретического и экспериментального описания свойств перепутанных состояний необходимо ввести количественные критерии степени перепутывания кубитов. В настоящее время указанная проблема полностью решена для двухкубитных систем [17–19]. Однако для систем, содержащих более чем два кубита, ситуация более сложная, поскольку для них до настоящего времени не удается ввести аналогичные критерии. Ненулевые значения критериев перепутывания, введенных для многокубитных систем, свидетельствуют лишь о наличии перепутанности в системе, но не дают информации о ее конкретной структуре и, следовательно, о возможности использования данных критериев для количественной оценки степени перепутывания кубитов [20; 21]. Проблема состоит еще в том, что существуют несколько неэквивалентных классов перепутанных состояний [22–24]. Для простейшего случая трехкубитной системы для чистых перепутанных состояний обычно выделяют три типа: полностью сепарабельные состояния, бисепарабельные состояния и подлинные перепутанные состояния [25–30]. К последним относятся перепутанные состояния Гринберга — Хорна — Цайлингера (*GHZ*-состояния) и перепутанные состояния Вернера (*W*-состояния). При этом *GHZ*-состояния весьма неустойчивы по отношению к потере системой частиц. Такие состояния могут использоваться для детерминированной телепортации или плотного кодирования. Напротив, *W*-состояния максимально устойчивы не только к потерям частиц, но и к воздействию внешнего шума. Такие состояния могут использоваться при квантовой обработке информации.

В нашей предыдущей работе мы детально исследовали динамику перепутывания в системе трех кубитов, резонансно взаимодействующих с модой квантового электромагнитного поля в идеальном резонаторе [31]. Представляет большой интерес обобщить полученные результаты на случай нерезонансного взаимодействия трех кубитов с электромагнитным полем резонатора с нелинейной средой Керра. Такой интерес обусловлен тем, что в ряде работ на примере двухкубитных моделей было показано, что учет расстройки и нелинейной среды Керра может существенно увеличить степень перепутывания кубитов, индуцированного полем резонатора, в случае сепарабельных начальных состояний кубитов и существенно стабилизировать осцилляции Раби параметра перепутывания кубитов в случае их перепутанного начального состояния [32–36]. Для некоторых начальных состояний кубитов включение расстройки и нелинейности может также приводить к исчезновению эффекта мгновенной смерти перепутывания кубитов.

В настоящей статье мы исследовали динамику системы, состоящей из трех идентичных кубитов, нерезонансно взаимодействующих с модой фоковского квантового электромагнитного поля идеального нелинейного резонатора со средой Керра посредством однофотонных переходов. Полученные решения квантового уравнения эволюции использованы для расчета параметра перепутывания пар кубитов. Для оценки количественной меры перепутывания пар кубитов использовалась отрицательность или параметр Переса — Хородецких [17; 18].

## 1. Модель и решение временного уравнения Шредингера

Рассмотрим систему трех идентичных сверхпроводящих кубитов  $A_1, A_2, A_3$  с энергетической щелью  $\hbar\Omega$ , нерезонансно взаимодействующих с модой квантового электромагнитного поля идеального микроволнового компланарного резонатора частоты  $\omega$  со средой Керра. Гамильтониан такой модели в системе отсчета вращающейся с частотой моды поля  $\omega$  можно представить в виде

$$H = (1/2)\hbar\Delta \sum_{i=1}^3 R_i^z + \hbar\gamma \sum_{i=1}^3 (\eta^+ R_i^- + R_i^+ \eta) + \hbar\Xi \eta^{+2} \eta^2, \quad (1.1)$$

где  $\eta^+$  ( $\eta^-$ ) — оператор рождения (уничтожения) фотонов моды поля,  $R_i^+$  ( $R_i^-$ ) — операторы перехода из основного  $|-\rangle_i$  в возбужденное  $|+\rangle_i$  (из возбужденного в основное) состояние  $i$ -го кубита,  $\gamma$  — параметр кубит-фотонного взаимодействия,  $\Delta = \Omega - \omega$  — расстройка и  $\Xi$  — параметр керровской нелинейности.

Выберем в качестве начальных состояний подсистемы кубитов сепарабельные состояния вида

$$|\Phi_1(0)\rangle_{A_1 A_2 A_3} = |+, -, -\rangle, \quad (1.2)$$

бисепарабельные состояния вида

$$|\Phi_2(0)\rangle_{A_1 A_2 A_3} = \cos \theta |+, +, -\rangle + \sin \theta |+, -, +\rangle, \quad (1.3)$$

а также истинно перепутанные состояния  $W$ -типа

$$|\Phi_3(0)\rangle_{A_1 A_2 A_3} = a|+, +, -\rangle + b|+, -, +\rangle + c|-, +, +\rangle, \quad (1.4)$$

где

$$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 1,$$

и истинно перепутанные состояния  $GHZ$ -типа

$$|\Phi_4(0)\rangle_{A_1 A_2 A_3} = d|+, +, +\rangle + g|-, -, -\rangle, \quad (1.5)$$

где

$$|d|^2 + |g|^2 = 1.$$

В качестве начального состояния поля резонатора выберем фоковские состояния вида

$$|\Phi(0)\rangle_F = |n\rangle \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Для описания динамики рассматриваемой системы нам необходимо найти временную волновую функцию системы. Введем для нашей системы число возбуждений  $N$ , равное  $N = n_1 + n$ , где  $n_1$  – число кубитов, приготовленных в возбужденном состоянии. Для чисел возбуждения  $N \geq 3$  будем использовать следующие базисные векторы:

$$\begin{aligned} &|+, +, +, n\rangle, |+, +, -, n+1\rangle, |+, -, +, n+1\rangle, |-, +, +, n+1\rangle, \\ &|+, -, -, n+2\rangle, |-, +, -, n+2\rangle, |-, -, +, n+2\rangle, |-, -, -, n+3\rangle. \end{aligned}$$

Тогда для начальных состояний кубитов (1.2)–(1.5) волновая функция в последующие моменты времени  $t$  может быть записана следующим образом:

$$|\psi(t)\rangle_{A_1 A_2 A_3 F} = B_1(t)|+, +, +, n\rangle + B_2(t)|+, +, -, n+1\rangle + B_3(t)|+, -, +, n+1\rangle + B_4(t)|-, +, +, n+1\rangle + B_5(t)|+, -, -, n+2\rangle + B_6(t)|-, +, -, n+2\rangle + B_7(t)|-, -, +, n+2\rangle + B_8(t)|-, -, -, n+3\rangle. \quad (1.6)$$

Для описания динамики рассматриваемой системы с гамильтонианом (1.1) необходимо решить квантовое уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = H|\psi(t)\rangle.$$

Подставляя в это уравнение волновую функцию вида (1.6), получаем для коэффициентов  $B_i(t)$

$$\left\{ \begin{aligned} i\dot{B}_1(t) &= \gamma\sqrt{n+1}(B_4(t) + B_3(t) + B_2(t)) + \Xi n(n-1)B_1(t) + \frac{3\Delta}{2}B_1(t), \\ i\dot{B}_2(t) &= \gamma(\sqrt{n+2}B_6(t) + \sqrt{n+2}B_5(t) + \sqrt{n+1}B_1(t)) + \Xi B_2(t)n(n+1) + \frac{\Delta}{2}B_2(t), \\ i\dot{B}_3(t) &= \gamma(\sqrt{n+2}B_7(t) + \sqrt{n+2}B_5(t) + \sqrt{n+1}B_1(t)) + \Xi B_3(t)n(n+1) + \frac{\Delta}{2}B_3(t), \\ i\dot{B}_4(t) &= \gamma(\sqrt{n+1}B_1(t) + B_7(t)\sqrt{n+2} + B_6(t)\sqrt{n+2}) + \Xi B_4(t)n(n+1) + \frac{\Delta}{2}B_4(t), \\ i\dot{B}_5(t) &= \gamma(B_8(t)\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}B_2(t) + \sqrt{n+2}B_3(t)) + \Xi B_5(t)(n+2)(n+1) - \frac{\Delta}{2}B_5(t), \\ i\dot{B}_6(t) &= \gamma(B_2(t)\sqrt{n+2} + B_4(t)\sqrt{n+2} + B_8(t)\sqrt{n+3}) + \Xi B_6(t)(n+2)(n+1) - \frac{\Delta}{2}B_6(t), \\ i\dot{B}_7(t) &= \gamma(B_4(t)\sqrt{n+2} + \sqrt{n+3}B_8(t) + B_3(t)\sqrt{n+2}) + \Xi B_7(t)(n+2)(n+1) - \frac{\Delta}{2}B_7(t), \\ i\dot{B}_8(t) &= \gamma\sqrt{n+3}(B_5(t) + B_6(t) + B_7(t)) + \Xi B_8(t)(n+3)(n+2) - \frac{3\Delta}{2}B_8(t). \end{aligned} \right. \quad (1.7)$$

Для числа возбуждений  $N = 2$  будем использовать следующие базисные векторы:

$$\begin{aligned} &|+, +, -, 0\rangle, |+, -, +, 0\rangle, |-, +, +, 0\rangle, \\ &|+, -, -, 1\rangle, |-, +, -, 1\rangle, |-, -, +, 1\rangle, |-, -, -, 2\rangle. \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае временная волновая функция может быть записана следующим образом:

$$|\psi_{A_1 A_2 A_3 F}(t)\rangle_2 = x_1(t)|+, +, -, 0\rangle + x_2(t)|+, -, +, 0\rangle + x_3(t)|-, +, +, 0\rangle + x_4(t)|+, -, -, 1\rangle + x_5(t)|-, +, -, 1\rangle + x_6(t)|-, -, +, 1\rangle + x_7(t)|-, -, -, 2\rangle. \quad (1.8)$$

Система дифференциальных уравнений для коэффициентов  $x_i(t)$  получается аналогично предыдущему случаю:

$$\left\{ \begin{array}{l} i\dot{x}_1(t) = \gamma(x_5(t) + x_4(t)) + \frac{\Delta}{2}x_1(t), \\ i\dot{x}_2(t) = \gamma(x_6(t) + x_4(t)) + \frac{\Delta}{2}x_2(t), \\ i\dot{x}_3(t) = \gamma(x_6(t) + x_5(t)) + \frac{\Delta}{2}x_3(t), \\ i\dot{x}_4(t) = \gamma(\sqrt{2}x_7(t) + x_1(t) + x_2(t)) - \frac{\Delta}{2}x_4(t), \\ i\dot{x}_5(t) = \gamma(\sqrt{2}x_7(t) + x_1(t) + x_3(t)) - \frac{\Delta}{2}x_5(t), \\ i\dot{x}_6(t) = \gamma(\sqrt{2}x_7(t) + x_2(t) + x_3(t)) - \frac{\Delta}{2}x_6(t), \\ i\dot{x}_7(t) = \gamma\sqrt{2}(x_4(t) + x_5(t) + x_6(t)) - \frac{3\Delta}{2}x_7(t) + 2\Xi x_7(t). \end{array} \right. \quad (1.9)$$

Для числа возбуждений  $N = 1$  выбираем базис гильбертова пространства в виде:

$$|+, -, -, 0\rangle, |-, +, -, 0\rangle, |-, -, +, 0\rangle, |-, -, -, 1\rangle.$$

Волновая функция для числа возбуждений  $N = 1$  записывается следующим образом:

$$|\psi(t)_{A_1 A_2 A_3 F}\rangle_3 = y_1(t)|+, -, -, 0\rangle + y_2(t)|-, +, -, 0\rangle + y_3(t)|-, -, +, 0\rangle + y_4(t)|-, -, -, 1\rangle. \quad (1.10)$$

Соответствующая система дифференциальных уравнений для коэффициентов  $y_i(t)$  будет следующей:

$$\left\{ \begin{array}{l} i\dot{y}_1(t) = \gamma y_4(t) - \frac{\Delta}{2}y_1(t), \\ i\dot{y}_2(t) = \gamma y_4(t) - \frac{\Delta}{2}y_2(t), \\ i\dot{y}_3(t) = \gamma y_4(t) - \frac{\Delta}{2}y_3(t), \\ i\dot{y}_4(t) = \gamma(y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)) - \frac{3\Delta}{2}y_4(t). \end{array} \right. \quad (1.11)$$

Наконец для  $N = 0$  базис гильбертова пространства составляет вектор  $|-, -, -, 0\rangle$ . Соответствующая временная волновая функция есть

$$|\psi_{A_1 A_2 A_3 F}(t)\rangle_4 = |-, -, -, 0\rangle. \quad (1.12)$$

В работе [31] для модели с нулевой расстройкой и в отсутствие среды Керра нами найдены аналитические решения уравнений (1.7), (1.9) и (1.11). Для модели, рассматриваемой в настоящей статье, решения указанных уравнений имеют чрезмерно громоздкий вид. Поэтому мы ограничимся численным решением указанных уравнений. Имея временные волновые функций системы (1.6), (1.8), (1.10) или (1.12), мы можем вычислить временную матрицу плотности полной системы "три кубита+мода поля". Для начальных состояний кубитов (1.2)–(1.5) и фоковского состояния поля резонатора временную матрицу плотности полной системы можно записать как

$$\rho_{A_1 A_2 A_3 F}(t) = |\chi_{A_1 A_2 A_3 F}(t)\rangle\langle\chi_{A_1 A_2 A_3 F}(t)|, \quad (1.13)$$

где  $|\chi_{A_1 A_2 A_3 F}(t)\rangle$  – временная волновая функция системы, которая совпадает для начальных состояний (1.2)–(1.4) с одной из функций (1.6), (1.8), (1.10) или (1.12) в зависимости от выбора числа начальных возбуждений системы  $N$ , а для начального состояния кубитов (1.5) представляет собой суперпозицию состояний (1.6), (1.8), (1.10) или (1.12), соответствующих разнице числа начальных возбуждений системы равным 3.

Мы можем также вычислить редуцированную матрицу плотности трех кубитов, усредняя выражения (1.13) по переменным поля

$$\rho_{A_1 A_2 A_3}(t) = Sp_F \rho_{A_1 A_2 A_3 F}(t). \quad (1.14)$$

Как уже отмечалось во введении, точные количественные меры перепутывания кубитов в настоящее время разработаны только для двухкубитных систем. В настоящей работе в качестве меры перепутывания выбран критерий Переса — Хородецких или отрицательность [17–18]. Для вычисления отрицательности пары кубитов необходимо вычислить редуцированную двухкубитную матрицу плотности. Для этого необходимо усреднить трехкубитную матрицу плотности (1.14) по переменным третьего кубита

$$\rho_{A_i A_j}(t) = Sp_{A_k} \rho_{A_1 A_2 A_3}(t)(i, j, k = 1, 2, 3 \ i \neq j, j \neq k, i \neq k). \quad (1.15)$$

## 2. Вычисление отрицательности и обсуждение результатов

Определим отрицательность для двух кубитов  $A_i$  и  $A_j$  стандартным образом

$$\varepsilon_{ij} = -2 \sum_l \mu_l^-, \quad (2.1)$$

где  $\mu_l^-$  – отрицательные собственные значения частично транспонированной по переменным одного кубита редуцированной двухкубитной матрицы плотности. Для перепутанных состояний  $\varepsilon = 0$ . Для перепутанных состояний  $0 < \varepsilon \leq 1$ . Максимальной степени перепутывания соответствует значение  $\varepsilon = 1$ .

Для сепарабельного начального состояния кубитов (1.2), бисепарабельного состояния (1.3) и истинных перепутанных состояний (1.4), (1.5) двухкубитная редуцированная матрица плотности имеет вид

$$\rho_{A_i A_j}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{23}^* & \rho_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Матричные элементы (2.2) кубитов  $A_1$  и  $A_2$  в случае начального состояния кубитов (1.2) и числа фотонов в моде  $n = 1$  имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_{11}(t) &= |x_1(t)|^2, \\ \rho_{22}(t) &= |x_2(t)|^2 + |x_4(t)|^2, \\ \rho_{33}(t) &= |x_3(t)|^2 + |x_5(t)|^2, \\ \rho_{44}(t) &= |x_6(t)|^2 + |x_7(t)|^2, \\ \rho_{23}(t) &= x_4(t)x_5^*(t) + x_2(t)x_3^*(t), \\ \rho_{32}(t) &= (\rho_{23}(t))^*. \end{aligned}$$

Для того же начального состояния и кубитов  $A_2$  и  $A_3$  матричные элементы принимают вид

$$\begin{aligned} \rho_{11}(t) &= |x_3(t)|^2, \\ \rho_{22}(t) &= |x_1(t)|^2 + |x_5(t)|^2, \\ \rho_{33}(t) &= |x_2(t)|^2 + |x_6(t)|^2, \\ \rho_{44}(t) &= |x_4(t)|^2 + |x_7(t)|^2, \\ \rho_{23}(t) &= x_1(t)x_2^*(t) + x_5(t)x_6^*(t), \\ \rho_{32}(t) &= (\rho_{23}(t))^*. \end{aligned}$$

Явные выражения для матричных элементов в (2.2) кубитов  $A_1$  и  $A_2$  в случае начальных состояний кубитов (1.3), (1.4) и числа фотонов  $n = 2$ , а также начального состояния кубитов (1.5) и числа фотонов  $n = 3$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho_{11}(t) &= |B_1(t)|^2 + |B_2(t)|^2, \\ \rho_{22}(t) &= |B_3(t)|^2 + |B_5(t)|^2, \\ \rho_{33}(t) &= |B_4(t)|^2 + |B_6(t)|^2, \\ \rho_{44}(t) &= |B_7(t)|^2 + |B_8(t)|^2, \\ \rho_{23}(t) &= B_3(t)B_4^*(t) + B_5(t)B_6^*(t), \\ \rho_{32}(t) &= (\rho_{23}(t))^*. \end{aligned}$$

Явный вид матричных элементов для тех же начальных состояний, но для кубитов  $A_2$  и  $A_3$ :

$$\begin{aligned} \rho_{11}(t) &= |B_1(t)|^2 + |B_4(t)|^2, \\ \rho_{22}(t) &= |B_2(t)|^2 + |B_6(t)|^2, \\ \rho_{33}(t) &= |B_3(t)|^2 + |B_7(t)|^2, \\ \rho_{44}(t) &= |B_5(t)|^2 + |B_8(t)|^2, \\ \rho_{23}(t) &= B_2(t)B_3^*(t) + B_6(t)B_7^*(t), \\ \rho_{32}(t) &= (\rho_{23}(t))^*. \end{aligned}$$

Частично транспонированная по переменным одного кубита редуцированная матрица плотности кубитов для (2.2) может быть представлена в виде

$$\rho_{A_i A_j}^{T_1}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{23}^* \\ 0 & \rho_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{23} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Матрица (2.3) имеет всего одно собственное значение, которое может быть отрицательным. В результате отрицательность (2.1) может быть записана как

$$\varepsilon_{ij} = \sqrt{(\rho_{44} - \rho_{11})^2 + 4 \cdot \rho_{23}^2} - \rho_{11} - \rho_{44}. \quad (2.4)$$

Результаты компьютерного моделирования временной зависимости отрицательности  $\varepsilon_{12}$  для кубитов 1 и 2 от приведенного времени  $\gamma t$  для начального сепарабельного состояния кубитов  $|+, -, -\rangle$ , и различных значений параметра расстройки и керровской нелинейности представлены на рис. 2.1. Начальное число фотонов в моде выбрано равным  $n = 1$ . Из рисунка хорошо видно, что учет расстройки и керровской нелинейности приводит к существенному увеличению максимальной степени перепутывания кубитов 1 и 2. Заметим также, что в отличие от случая теплового поля резонатора [31] для фоковского начального состояния поля для кубитов 1 и 2 отсутствует эффект мгновенной смерти перепутывания.

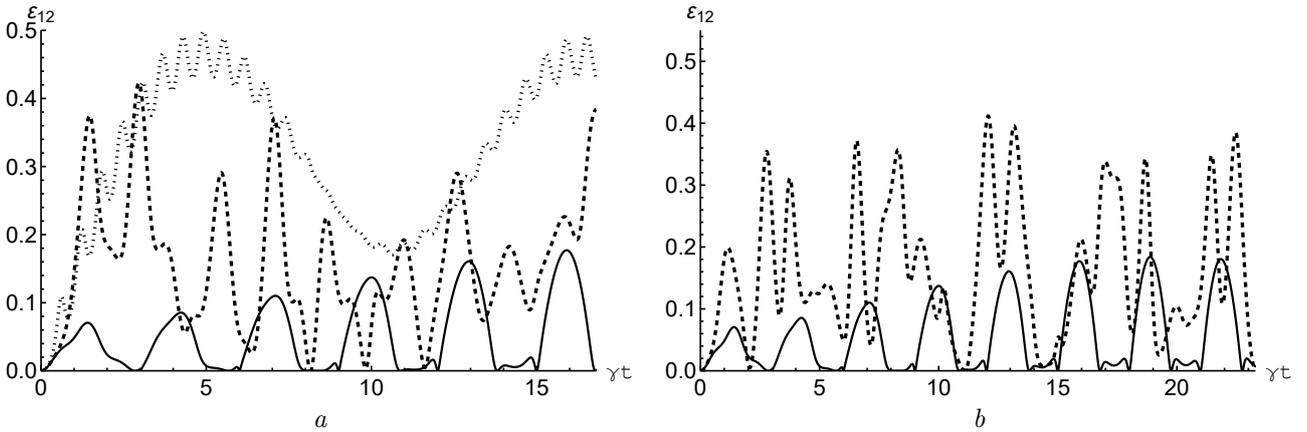


Рис. 2.1. Зависимость отрицательностей  $\varepsilon_{12}$  (а) от приведенного времени  $\gamma t$  для начального состояния кубитов  $|+, -, -\rangle$ . Число фотонов в моде резонатора выбрано равным  $n = 1$ . Значения параметров расстройки керровской нелинейности в случае а):  $\Delta = 0.01\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (сплошная линия);  $\Delta = 2.5\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (штриховая линия) и  $\Delta = 9.5\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (пунктирная линия). В случае б):  $\Delta = 0.01\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (сплошная линия) и  $\Delta = 0.01\gamma$ ,  $\Xi = \gamma$  (пунктирная линия)

Fig. 2.1. Dependence of the negatives  $\varepsilon_{12}$  (a) on the reduced time  $\gamma t$  for the initial state of qubits  $|+, -, -\rangle$ . The number of photons in the resonator mode is chosen to be  $n = 1$ . Values of Kerr nonlinearity detuning parameters in case a):  $\Delta = 0.01\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (solid line);  $\Delta = 2.5\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (dashed line) and  $\Delta = 9.5\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (dotted line). In case b):  $\Delta = 0.01\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (solid line) and  $\Delta = 0.01\gamma$ ,  $\Xi = \gamma$  (dotted line)

На рис. 2.2 показаны аналогичные зависимости отрицательности  $\varepsilon_{23}$  для кубитов 2 и 3. В рассматриваемом случае увеличение максимальной степени перепутывания кубитов 2 и 3 возможно только при включении расстройки. Керровская нелинейность слабо влияет на максимальную степень перепутывания кубитов 2 и 3. В резонансном случае и в отсутствие керровской нелинейности для кубитов 2 и 3 так же, как и в случае теплового поля, имеет место эффект мгновенной смерти перепутывания. При этом подавлению эффекта способствует только наличие расстройки. Зависимость отрицательности  $\varepsilon_{12}$  для кубитов 1 и 2 от приведенного времени  $\gamma t$  для начального бисепарабельного состояния кубитов  $(1/\sqrt{2})(|+, +, -\rangle + |+, -, +\rangle)$  и различных значений параметра расстройки и керровской нелинейности представлена на рис. 2.3. Начальное число фотонов в моде выбрано равным  $n = 2$ . Для рассматриваемого случая кубиты 1 и 2 в начальный момент времени не перепутаны. В отсутствие расстройки и керровской нелинейности имеет место эффект мгновенной смерти перепутывания. Включение расстройки приводит к существенному увеличению максимальной степени перепутывания кубитов 1 и 2 и исчезновению мгновенной смерти перепутывания. Включение керровской нелинейности, напротив, приводит к исчезновению перепутывания кубитов, индуцированного полем резонатора. На рис. 2.4 показаны аналогичные зависимости отрицательности  $\varepsilon_{23}$  для кубитов 2 и 3. В рассматриваемом случае кубиты 2 и 3 в начальный момент времени находятся в максимально перепутанном состоянии ( $\varepsilon_{23}(0) = 1$ ). Для резонансного случая и в отсутствие керровской нелинейности взаимодействие кубитов с полем резонатора приводит к осцилляциям Раби и к периодической смерти и рождению перепутывания их состояний. Включение расстройки и керровской нелинейности приводит к уменьшению амплитуд осцилляций параметра перепутывания кубитов 2 и 3 и стабилизации их начальной перепутанности. Зависимость отрицательности  $\varepsilon_{23}$  (или  $\varepsilon_{12}$ ) для кубитов 2 и 3 (для кубитов 1 и 2) от приведенного времени  $\gamma t$  для начального истинного перепутанного состояния кубитов  $W$ - типа  $(1/\sqrt{3})(|+, +, -\rangle + |+, -, +\rangle + |-, +, +, 2\rangle)$  и различных

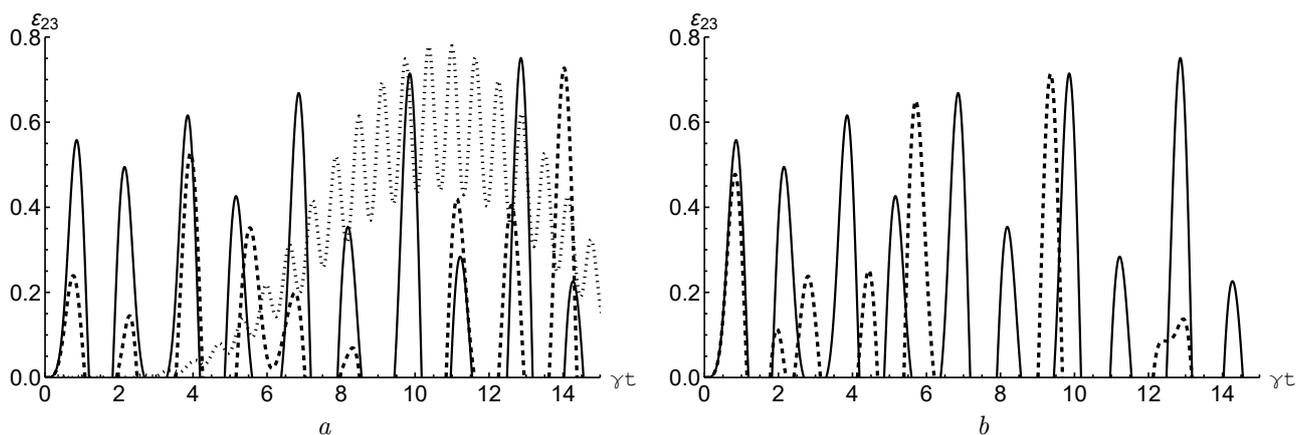


Рис. 2.2. Зависимость отрицательностей  $\varepsilon_{23}$  (a) от приведенного времени  $\gamma t$  для начального состояния кубитов  $|+, -, -\rangle$ . Число фотонов в режиме резонатора выбрано равным  $n = 1$ . Значения параметров расстройки керровской нелинейности в случае a):  $\Delta = 0.01\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (сплошная линия);  $\Delta = 2.5\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (штриховая линия) и  $\Delta = 9.5\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (пунктирная линия). В случае б):  $\Delta = 0.01\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (сплошная линия) и  $\Delta = 0.01\gamma$ ,  $\Xi = \gamma$  (пунктирная линия)

Fig. 2.2. Dependence of the negatives  $\varepsilon_{23}$  (a) on the reduced time  $\gamma t$  for the initial state of qubits  $|+, -, -\rangle$ . The number of photons in the resonator mode is chosen to be  $n = 1$ . Values of Kerr nonlinearity detuning parameters in case a):  $\Delta = 0.01\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (solid line);  $\Delta = 2.5\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (dashed line) and  $\Delta = 9.5\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (dotted line). In case b):  $\Delta = 0.01\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (solid line) and  $\Delta = 0.01\gamma$ ,  $\Xi = \gamma$  (dotted line)

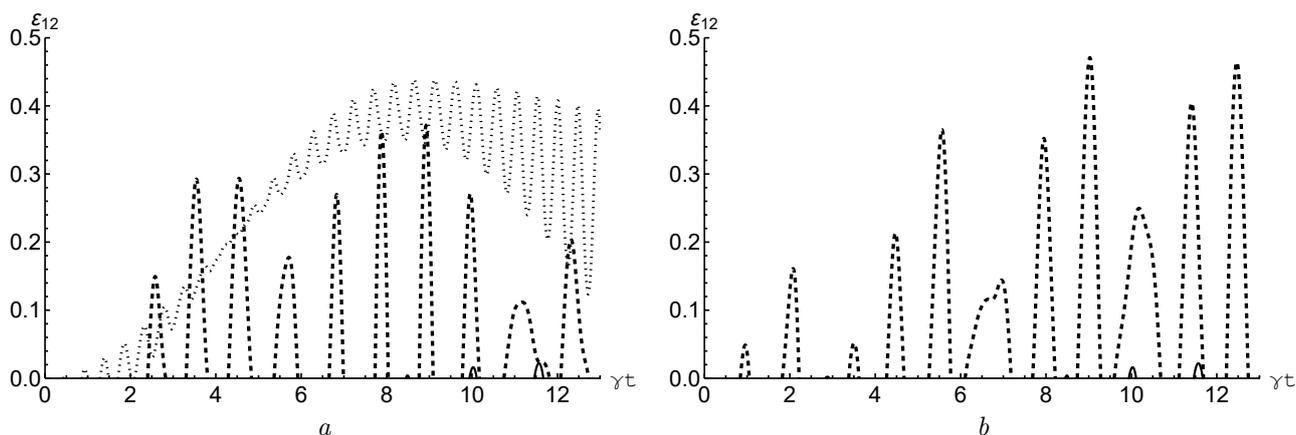


Рис. 2.3. Зависимость отрицательностей  $\varepsilon_{12}$  (a) от приведенного времени  $\gamma t$  для начального состояния кубитов  $(1/\sqrt{2})(|+, +, -\rangle + |+, -, +\rangle)$ . Число фотонов в режиме резонатора выбрано равным  $n = 2$ . Значения параметров расстройки керровской нелинейности в случае a):  $\Delta = 0.01\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (сплошная линия);  $\Delta = 5\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (штриховая линия) и  $\Delta = 13\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (пунктирная линия). В случае б):  $\Delta = 0.01\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (сплошная линия) и  $\Delta = 0.01\gamma$ ,  $\Xi = \gamma$  (пунктирная линия)

Fig. 2.3. Dependence of the negatives  $\varepsilon_{12}$  (a) on the reduced time  $\gamma t$  for the initial state of qubits  $(1/\sqrt{2})(|+, +, -\rangle + |+, -, +\rangle)$ . The number of photons in the resonator mode is chosen equal to  $n = 2$ . The values of the parameters of the Kerr nonlinearity detuning in the case of a):  $\Delta = 0.01\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (solid line);  $\Delta = 5\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (dashed line) and  $\Delta = 13\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (dotted line). In case b):  $\Delta = 0.01\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (solid line) and  $\Delta = 0.01\gamma$ ,  $\Xi = \gamma$  (dotted line)

значений параметра расстройки и керровской нелинейности представлена на рис. 2.5. Начальное число фотонов в режиме выбрано равным  $n = 2$ . Для рассматриваемого начального состояния кубитов поведение отрицательности любой пары кубитов аналогично поведению  $\varepsilon_{23}$ , представленному на предыдущем рисунке. Единственное отличие заключается в том, что максимально возможное значение отрицательности любой пары кубитов равно  $\varepsilon_{ij}(0) = (1/3)(\sqrt{5} - 1)$ . Наконец, зависимость отрицательности  $\varepsilon_{23}$  (или  $\varepsilon_{12}$ ) для кубитов 2 и 3 (для кубитов 1 и 2) от приведенного времени  $\gamma t$  для начального истинного перепутанного состояния кубитов  $GHZ$ - типа  $(1/\sqrt{2})(|+, +, +\rangle + |-, -, -\rangle)$  и различных значений параметра расстройки представлена на рис. 2.6. Начальное число фотонов в режиме выбрано равным  $n = 3$ . В рассматриваемом случае в начальный момент времени все пары кубитов неперепутаны. Для резо-

нансной модели в отсутствие керровской нелинейности взаимодействие кубитов с полем резонатора не индуцирует их перепутывание в процессе эволюции. Включение расстройки приводит к возникновению перепутывания пар кубитов, однако зависимость максимальной степени их перепутывания от расстройки достаточно слабая. При этом для любых расстроек имеет место эффект мгновенной смерти перепутывания. Учет керровской нелинейности в случае резонансного взаимодействия кубитов с полем резонатора не приводит к возникновению их перепутывания.

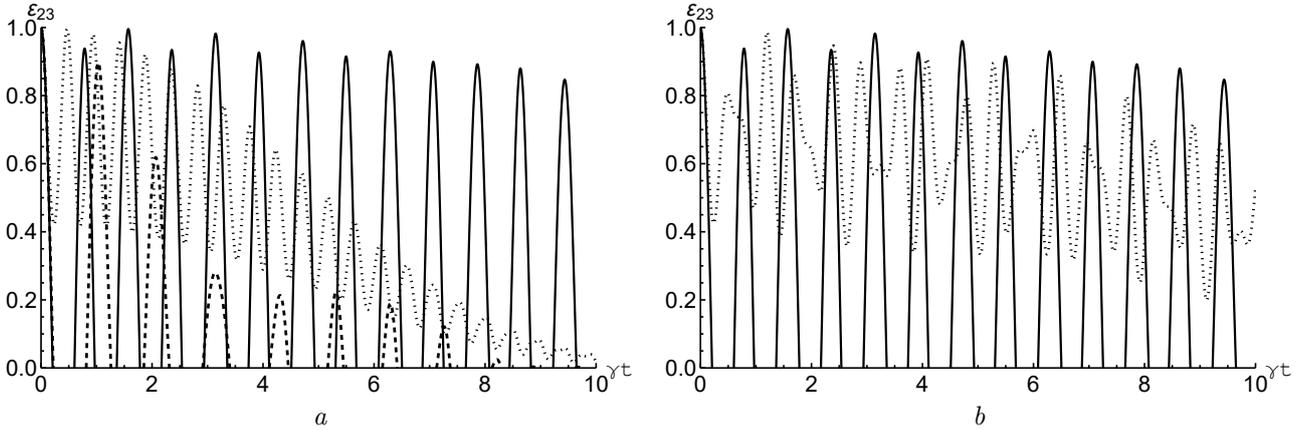


Рис. 2.4. Зависимость отрицательностей  $\varepsilon_{23}$  для начального состояния кубитов  $(1/\sqrt{2})(|+, +, -\rangle + |+, -, +\rangle)$  при  $\theta = \frac{\pi}{4}$ . Число фотонов в режиме резонатора выбрано равным  $n = 1$ . Значения параметров расстройки керровской нелинейности в случае *a*):  $\Delta = 0.01\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (сплошная линия);  $\Delta = 5\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (штриховая линия) и  $\Delta = 13\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (пунктирная линия). В случае *b*):  $\Delta = 0.01\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (сплошная линия) и  $\Delta = 0.01\gamma$ ,  $\Xi = 2.5\gamma$  (пунктирная линия)

Fig. 2.4. Dependence of negatives  $\varepsilon_{23}$  for the initial state of qubits  $(1/\sqrt{2})(|+, +, -\rangle + |+, -, +\rangle)$  when  $\theta = \frac{\pi}{4}$ . The number of photons in the resonator mode is chosen to be  $n = 1$ . Values of Kerr nonlinearity detuning parameters in case *a*):  $\Delta = 0.01\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (solid line);  $\Delta = 5\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (dashed line) and  $\Delta = 13\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (dotted line). In case *b*):  $\Delta = 0.01\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (solid line) and  $\Delta = 0.01\gamma$ ,  $\Xi = 2.5\gamma$  (dotted line)

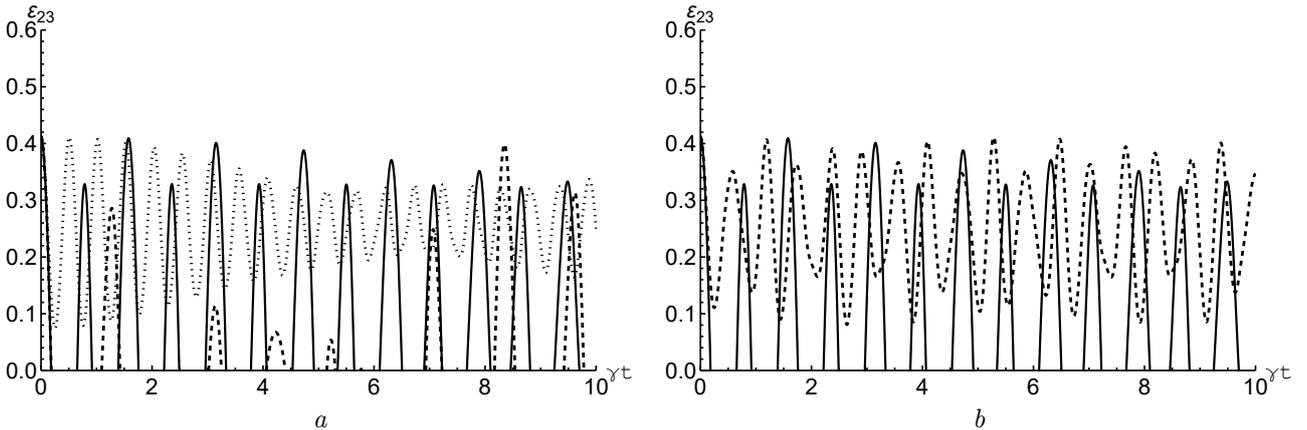


Рис. 2.5. Зависимость отрицательностей  $\varepsilon_{23}$  (*a*) от приведенного времени  $\gamma t$  для начального состояния кубитов  $(1/\sqrt{3})(|+, +, -\rangle + |+, -, +\rangle + |-, +, +\rangle)$ . Число фотонов в режиме резонатора выбрано равным  $n = 1$ . Значения параметров расстройки керровской нелинейности в случае *a*):  $\Delta = 0.01\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (сплошная линия);  $\Delta = 3.5\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (штриховая линия) и  $\Delta = 12\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (пунктирная линия). В случае *b*):  $\Delta = 0.01\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (сплошная линия) и  $\Delta = 0.01\gamma$ ,  $\Xi = 2.5\gamma$  (пунктирная линия)

Fig. 2.5. Dependence of negatives  $\varepsilon_{23}$  (*a*) on the reduced time  $\gamma t$  for the initial state of qubits  $(1/\sqrt{3})(|+, +, -\rangle + |+, -, +\rangle + |-, +, +\rangle)$ . The number of photons in the resonator mode is chosen to be  $n = 1$ . Values of Kerr nonlinearity detuning parameters in case *a*):  $\Delta = 0.01\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (solid line);  $\Delta = 3.5\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (dashed line) and  $\Delta = 12\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (dotted line). In case *b*):  $\Delta = 0.01\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (solid line) and  $\Delta = 0.01\gamma$ ,  $\Xi = 2.5\gamma$  (dotted line)

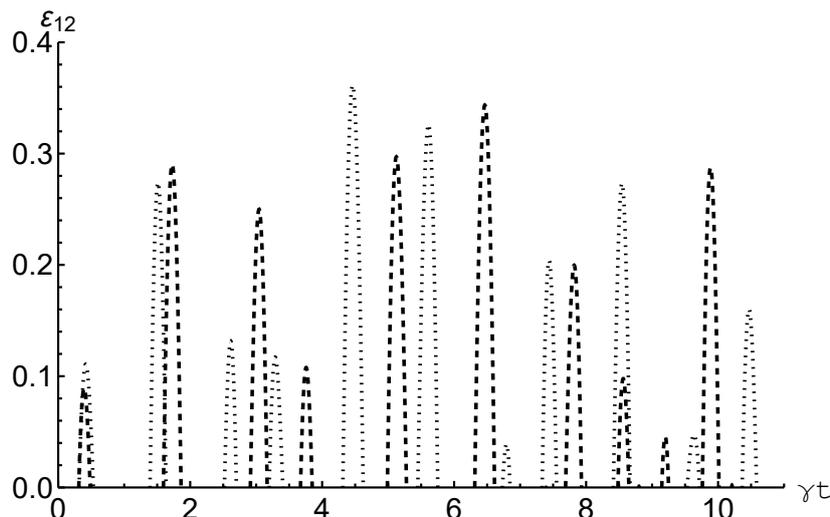


Рис. 2.6. Зависимость отрицательности  $\varepsilon_{12}$  от приведенного времени  $\gamma t$  для начального состояния кубитов  $(1/\sqrt{2})(|+, +, +\rangle + |-, -, -\rangle)$ . Число фотонов в моде выбрано равным  $n = 3$ . Значение параметра расстройки:  $\Delta = 0.01\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (сплошная линия);  $\Delta = 2\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (штриховая линия) и  $\Delta = 3.5\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (пунктирная линия)

Fig. 2.6. Dependence of the negativity of  $\varepsilon_{12}$  on the reduced time  $\gamma t$  for the initial state of qubits  $(1/\sqrt{2})(|+, +, +\rangle + |-, -, -\rangle)$ . The number of photons in the mode is chosen to be  $n = 3$ . The value of the detuning parameter:  $\Delta = 0.01\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (solid line);  $\Delta = 2\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (dashed line) and  $\Delta = 3.5\gamma$ ,  $\Xi = 0.01\gamma$  (dotted line)

## Выводы

Таким образом, в данной статье нами исследована динамика перепутывания пар кубитов в системе, состоящей из трех идентичных кубитов, нерезонансно взаимодействующих с модой фоковского поля идеального резонатора со средой Керра. В работе рассмотрены три типа начальных состояний кубитов: сепарабельные, бисепарабельные и истинно перепутанные состояния  $W$ - и  $GHZ$ -типа. Результаты численного моделирования отрицательности пар кубитов показали, что наличие расстройки и керровской нелинейности в случае начального перепутанного состояния пары кубитов может приводить к существенному увеличению степени их перепутывания, индуцированного полем резонатора. В случае начального перепутанного состояния пары кубитов расстройка и керровская среда могут приводить к стабилизации начального перепутывания кубитов. Нерезонансное взаимодействие и керровская среда могут также подавлять эффект мгновенной смерти перепутывания кубитов. Таким образом, расстройка и керровская нелинейность могут выступать в качестве эффективного механизма контроля и управления критерия перепутывания кубитов в резонаторах.

## Литература

- [1] Kendon V.M., Nemoto K., Munro W.J. Typical entanglement in multi-qubit systems // Journal of Modern Optics. 2002. Vol. 49. Issue 10. Pp. 1709–1716. DOI: <http://doi.org/10.1080/09500340110120914>.
- [2] Most Y., Shimoni Y., Biham O. Formation of multipartite entanglement using random quantum gates // Physical Review A: Atomic, molecular, and optical physics. 2007. Vol. 76. Issue 2. Article number 022328. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.76.022328>.
- [3] Zhi P., Hu Y. Construct maximally five- and seven-qubit entangled states via three-qubit GHZ state // International Journal of Theoretical Physics. 2022. Vol. 36. Issue 30. Article number 2250215. DOI: <http://doi.org/10.1142/S0217979222502150>.
- [4] Kazuyuki F., Kyoko H., Ryosuke K., Tatsuo S., Yukako W. Explicit Form of the Evolution Operator of TAVIS-CUMMINGS Model: Three and Four Atoms Cases // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. 2012. Vol. 1. No. 6. P. 721–730. DOI: <http://doi.org/10.1142/S0219887804000344>.
- [5] Rinner S.J., Pittorino T. Generation of Multipartite Entangled States Using Switchable Coupling of Cooper-Pair-Boxes // Journal of Modern Physics. 2020. Vol. 11. No. 10. P. 1514–1527. DOI: <https://doi.org/10.4236/jmp.2020.1110093>.

- [6] Wendin G. Quantum information processing with super-conducting circuits: a review // Reports on Progress in Physics. 2017. Vol. 80. Number 10. Article number 106001. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6633/aa7e1a>.
- [7] Kjaergaard M., Schwartz M.E., Braumüller J., Krantz P., Wang J.-I., Gustavsson S., Oliver W.D. Superconducting Qubits: Current State of Play // Annual Reviews of Condensed Matter Physics. 2020. Vol. 11. P. 369–395. DOI: <http://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031119-050605>.
- [8] Huang H.-L., Wu D., Fan D., Zhu X. Superconducting quantum computing: a review // Science China. Information Sciences. 2020. Vol. 63. Article number 180501. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s11432-020-2881-9>.
- [9] Chen J. Review on Quantum Communication and Quantum Computation // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1865. Article number 022008. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1865/2/022008>.
- [10] Biamonte J., Faccin M., De Domenico M. Complex Networks: from Classical to Quantum // Communications Physics. 2019. Vol. 2. Article number 53. DOI: <http://dx.doi.org/10.1038/s42005-019-0152-6>.
- [11] Mooney G.J., Hill C.D., Hollenberg L.C.L. Entanglement in a 20-Qubit Superconducting Quantum Computer // Scientific Reports. 2019. Vol. 9. Article number 13465. DOI: <http://doi.org/10.1038/s41598-019-49805-7>.
- [12] Apollaro T. J. G., Lorenzo S., Plastina F., Consiglio M., Zyczkowski K. Entangled States Are Harder to Transfer than Product States // Entropy. 2023. Vol. 25. Issue 1. Article number 46. DOI: <http://dx.doi.org/10.3390/e25010046>.
- [13] Nieman K., Rangan K.K., Durand H. Control Implemented on Quantum Computers: Effects of Noise, Nondeterminism, and Entanglement // Industrial and Engineering Chemistry Research. 2022. Vol. 61. Issue 28. Pp. 10133–10155. DOI: <http://doi.org/10.1021/acs.iecr.2c00454>.
- [14] Arute F. [et al.] Quantum supremacy using a programmable superconducting processor // Nature. 2019. Vol. 574. Pp. 505–510. DOI: <http://doi.org/10.1038/s41586-019-1666-5>.
- [15] Ball P. First quantum computer to pack 100 qubits enters crowded race // Nature. 2021. Vol. 599. No. 7886. P. 542. DOI: <http://dx.doi.org/10.1038/d41586-021-03476-5>.
- [16] Lacroix D. Symmetry-Assisted Preparation of Entangled Many-Body States on a Quantum Computer // Physical Review Letters. 2020. Vol. 125. Article number 230502. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.125.230502>.
- [17] Peres A. Separability Criterion for Density Matrices // Physical Review Letters. 1996. Vol. 77. Pp. 1413–1415. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413>.
- [18] Horodecki R., Horodecki M., Horodecki P. Separability of Mixed States: Necessary and Sufficient Condition // Physics Letters A. 1996. Vol. 223. Pp. 333–339. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0375-9601\(96\)00706-2](http://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2).
- [19] Wootters W.K. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits // Physical Review Letters. 1998. Vol. 80. No. 10. Article number 2245. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2245>.
- [20] Zha X., Yuan C., Zhang Y. Generalized criterion for a maximally multi-qubit entangled state // Laser Physics Letters. 1998. Vol. 10. Number 4. Article number 045201. DOI: <http://doi.org/10.1088/1612-2011/10/4/045201>.
- [21] Filippov S.N. Quantum Mappings and Characterization of Entangled Quantum States // Journal of Mathematical Sciences. 2019. Vol. 241. Pp. 210–236. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10958-019-04418-3>.
- [22] Seevinck M., Gühne O. Separability criteria for genuine multiparticle entanglement // New Journal of Physics. 2010. Vol. 12. Article number 053002. DOI: <http://doi.org/10.1088/1367-2630/12/5/053002>.
- [23] Pereira L., Zambrano L., Delgado A. Scalable estimation of pure multi-qubit states // npj Quantum Information. 2022. Vol. 8. Article number 57. DOI: <http://dx.doi.org/10.1038/s41534-022-00565-9>.
- [24] Zhahir A. A., Mohd S. M., Shuhud M.I.M., Idrus B., Zainuddin H., Jan N.M., Wahiddin M. Entanglement Quantification and Classification: A Systematic Literature Review // International Journal of Advanced Computer Science and Applications. 2022. Vol. 13. Issue 5. Pp. 218–225. DOI: <http://dx.doi.org/10.14569/IJACSA.2022.0130527>.
- [25] Dur W., Cirac J.I. Classification of multiqubit mixed states: Separability and distillability properties // Physical Review A: Atomic, molecular and optical physics. 2000. Vol. 61. Article number 042314. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevA.61.042314>.
- [26] Dur W., Cirac J.I., Vidal G. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways // Physical Review A: Atomic, molecular, and optical physics. 2000. Vol. 62. Article number 062314. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevA.62.062314>.
- [27] Acin A., Bruß D., Lewenstein M., Sanpera A. Classification of Mixed Three-Qubit States // Physical Review Letters. 2000. Vol. 87. Article number 040401. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.040401>.
- [28] Garcia-Alcaine G., Sabin C. A classification of entanglement in three-qubit systems // The European Physical Journal D. 2008. Vol. 48. Pp. 435–442. DOI: <http://doi.org/10.1140/epjd/e2008-00112-5>.
- [29] Siti Munirah Mohd S.M., Idrus B., Zainuddin H., Mukhtar M. Entanglement Classification for a Three-qubit System using Special Unitary Groups // International Journal of Advanced Computer Science and Applications. 2019. Vol. 10. Issue 7. Pp. 374–379. DOI: <http://dx.doi.org/10.14569/IJACSA.2019.0100751>.

- [30] Akbari-Kourbolagh Y. Entanglement criteria for the three-qubit states // International Journal of Quantum Information. 2017. Vol. 15, No. 7. Article number 1750049. DOI: <http://doi.org/10.1142/S0219749917500496>.
- [31] Багров А.Р., Башкиров Е.К. Динамика трехкубитной модели Тависа — Каммингса // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2022. Т. 28, № 1–2. С. 95–105. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-95-105>.
- [32] Zhang B. Entanglement between two qubits interacting with a slightly detuned thermal field // Optics Communications. 2010. Vol. 283. Issue 23. Pp. 4676–4679. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.optcom.2010.06.094>.
- [33] Bashkirov E.K. Thermal Entanglement Between a Jaynes — Cummings Atom and an Isolated Atom // International Journal of Theoretical Physics. 2018. Vol. 57. Issue 12. Pp. 3761–3771. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10773-018-3888-y>.
- [34] Al Naim A.F., Khan J.Y., Khalil E.M., Abdel-Khalek S. Effects of Kerr Medium and Stark Shift Parameter on Wehrl Entropy and the Field Purity for Two-Photon Jaynes–Cummings Model Under Dispersive Approximation // Journal of Russian Laser Research. 2019. Vol. 40. Issue 1. P. 20–29. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10946-019-09764-w>.
- [35] Aldaghfag S.A., Berrada K., Abdel-Khalek S. Entanglement and photon statistics of two dipole-dipole coupled superconducting qubits with Kerr-like nonlinearities // Results in Physics. 2020. Vol. 16. Article number 102978. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2020.102978>.
- [36] Bashkirov E.K. Thermal entanglement in Tavis-Cummings models with Kerr media // Proceedings of SPIE. 2022. Vol. 12193. Article number 121930Q. DOI: <http://doi.org/10.1117/12.2625838>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-1-89-101

Submitted: 08.02.2023

Revised: 29.03.2023

Accepted: 30.05.2023

**A.R. Bagrov**

Samara National Research University, Samara, Russian Federation  
E-mail: alexander.bagrov00@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1098-0300>

**E.K. Bashkirov**

Samara National Research University, Samara, Russian Federation  
E-mail: bashkirov.ek@ssau.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8682-4956>

## ENTANGLEMENT IN NONLINEAR THREE-QUBITS JAYNES — CUMMINGS MODEL

### ABSTRACT

In this paper, we investigated the dynamics of entanglement of pairs of qubits in a system of three identical qubits that interact non-resonantly with the selected mode of a microwave resonator without loss with the Kerr medium by means of single-photon transitions. We have found solutions to the quantum time Schrodinger equation for the total wave function of the system for the initial separable, biseparable and true entangled states of qubits and the Fock initial state of the resonator field. Based on these solutions, the criterion of entanglement of qubit pairs — negativity is calculated. The results of numerical simulation of the negativity of qubit pairs have shown that the presence of disorder and Kerr nonlinearity in the case of an initial non-entangled state of a pair of qubits can lead to a significant increase in the degree of their entanglement. In the case of an initial entangled state of a pair of qubits, the disorder and the Kerr medium can lead to a significant stabilization of the initial entanglement.

**Key words:** qubits; not-resonant interaction; cavity; one-photon transitions; Kerr nonlinearity; entanglement; negativity; sudden death of entanglement.

**Citation.** Bagrov A.R., Bashkirov E.K. Entanglement in nonlinear three-qubits Jaynes — Cummings model. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriya = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2023, vol. 29, no. 1, pp. 89–101. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2023-29-1-89-101>. (In Russ.)

**Information about the conflict of interests:** authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Bagrov A.R., 2023

Alexander R. Bagrov — undergraduate student of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

© Bashkirov E.K., 2023

Eugene K. Bashkirov — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

## References

- [1] Kendon V.M., Nemoto K., Munro W.J. Typical entanglement in multi-qubit systems. *Journal of Modern Optics*, 2002, vol. 49, issue 10, pp. 1709–1716. DOI: <http://doi.org/10.1080/09500340110120914>.
- [2] Most Y., Shimoni Y., Biham O. Formation of multipartite entanglement using random quantum gates. *Physical Review A: Atomic, molecular, and optical physics*, 2007, vol. 76, issue 2, article number 022328. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.76.022328>.
- [3] Zhi P., Hu Y. Construct maximally five- and seven-qubit entangled states via three - qubit GHZ state. *International Journal of Theoretical Physics*, 2022, vol. 36, issue 30, article number 2250215. DOI: <http://doi.org/10.1142/S0217979222502150>.
- [4] Kazuyuki F., Kyoko H., Ryosuke K., Tatsuo S., Yukako W. Explicit Form of the Evolution Operator of TAVIS-CUMMINGS Model: Three and Four Atoms Cases. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2012, vol. 1, number 6, pp. 721–730. DOI: <http://doi.org/10.1142/S0219887804000344>.
- [5] Rinner S.J., Pittorino T. Generation of Multipartite Entangled States Using Switchable Coupling of Cooper-Pair-Boxes. *Journal of Modern Physics*, 2020, vol. 11, no. 10, pp. 1514–1527. DOI: <http://doi.org/10.4236/jmp.2020.1110093>.
- [6] Wendin G. Quantum information processing with super-conducting circuits: a review. *Reports on Progress in Physics*, 2017, vol. 80, no. 10, article number 106001. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6633/aa7e1a>.
- [7] Kjaergaard M., Schwartz M.E., Braumüller J., Krantz P., Wang J.-I., Gustavsson S., Oliver W.D. Superconducting Qubits: Current State of Play. *Annual Reviews of Condensed Matter Physics*, 2020, vol. 11, pp. 369–395. DOI: <http://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-031119-050605>.
- [8] Huang H.-L., Wu D., Fan D., Zhu X. Superconducting quantum computing: a review. *Science China. Information Sciences*, 2020, vol. 63, article number 180501. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s11432-020-2881-9>.
- [9] Chen J. Review on Quantum Communication and Quantum Computation. *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, vol. 1865, article number 022008. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1865/2/022008>.
- [10] Biamonte J., Faccin M., De Domenico M. Complex networks from classical to quantum. *Communications Physics*, 2019, vol. 2, article number 53. DOI: <http://dx.doi.org/10.1038/s42005-019-0152-6>.
- [11] Mooney G.J., Hill C.D., Hollenberg L.C.L. Entanglement in a 20-Qubit Superconducting Quantum Computer. *Scientific Reports*, 2019, vol. 9, article number 13465. DOI: <http://doi.org/10.1038/s41598-019-49805-7>.
- [12] Apollaro T.J.G., Lorenzo S., Plastina F., Consiglio M., Zyczkowski K. Entangled States Are Harder to Transfer than Product States. *Entropy*, 2023, vol. 25, issue 1, article number 46. DOI: <http://dx.doi.org/10.3390/e25010046>.
- [13] Nieman K., Rangan K.K., Durand H. Control Implemented on Quantum Computers: Effects of Noise, Nondeterminism, and Entanglement. *Industrial Engineering Chemistry Research*, 2022, vol. 61, issue 28, pp. 10133–10155. DOI: <http://doi.org/10.1021/acs.iecr.2c00454>.
- [14] Arute F. [et al.] Quantum supremacy using a programmable superconducting processor. *Nature*, 2019, vol. 574, pp. 505–510. DOI: <http://doi.org/10.1038/s41586-019-1666-5>.
- [15] Ball P. First quantum computer to pack 100 qubits enters crowded race. *Nature*, 2021, vol. 599, no. 7886, p. 542. DOI: <http://dx.doi.org/10.1038/d41586-021-03476-5>.
- [16] Lacroix D. Symmetry-Assisted Preparation of Entangled Many-Body States on a Quantum Computer. *Physical Review Letters*, 2020, vol. 125, article number 230502. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.125.230502>.
- [17] Peres A. Separability Criterion for Density Matrices. *Physical Review Letters*, 1996, vol. 77, pp. 1413–1415. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413>.
- [18] Horodecki R., Horodecki M., Horodecki P. Separability of Mixed States: Necessary and Sufficient Condition. *Physics Letters A*, 1996, vol. 223, pp. 333–339. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0375-9601\(96\)00706-2](http://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2).
- [19] Wootters W.K. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits. *Physical Review Letters*, 1998, vol. 80, article number 2245. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2245>.
- [20] Zha X., Yuan C., Zhang Y. Generalized criterion for a maximally multi-qubit entangled state. *Laser Physics Letters*, 1998, vol. 10, number 4, article number 045201. DOI: <http://doi.org/10.1088/1612-2011/10/4/045201>.
- [21] Filippov S.N. Quantum Mappings and Characterization of Entangled Quantum States. *Journal of Mathematical Sciences*, 2019, vol. 241, pp. 210–236. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10958-019-04418-3>

- [22] Seevinck M., Gühne O. Separability criteria for genuine multipartite entanglement. *New Journal of Physics*, 2010, vol. 12, article number 053002. DOI: <http://doi.org/10.1088/1367-2630/12/5/053002>.
- [23] Pereira L., Zambrano L., Delgado A. Scalable estimation of pure multi-qubit states. *npj Quantum Information*, 2022, vol. 8, article number 57. DOI: <http://dx.doi.org/10.1038/s41534-022-00565-9>.
- [24] Zhahir A.A., Mohd S.M., Shuhud M.I.M., Idrus B., Zainuddin H., Jan N.M., Wahiddin M. Entanglement Quantification and Classification: A Systematic Literature Review. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, 2022, vol. 13, issue 5, pp. 218–225. DOI: <http://dx.doi.org/10.14569/IJACSA.2022.0130527>.
- [25] Dur W., Cirac J.I. Classification of multiqubit mixed states: Separability and distillability properties. *Physical Review A: Atomic, molecular, and optical physics*, 2000, vol. 62, article number 042314. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevA.61.042314>.
- [26] Dur W., Cirac J.I., Vidal G. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways. *Physical Review A: Atomic, molecular, and optical physics*, 2000, vol. 62, article number 062314. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevA.62.062314>.
- [27] Acin A., Bruß D., Lewenstein M., Sanpera A. Classification of Mixed Three-Qubit States. *Physical Review Letters*, 2000, vol. 87, article number 040401. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.040401>.
- [28] Garcia-Alcaine G., Sabin C. A classification of entanglement in three-qubit systems. *European Physical Journal D*, 2008, vol. 48, pp. 435–442. DOI: <http://doi.org/10.1140/epjd/e2008-00112-5>.
- [29] Siti Munirah Mohd S.M., Idrus B., Zainuddin H., Mukhtar M. Entanglement Classification for a Three-qubit System using Special Unitary Groups. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, 2019, vol. 10, issue 7, pp. 374–379. DOI: <http://dx.doi.org/10.14569/IJACSA.2019.0100751>.
- [30] Akbari-Kourbolagh Y. Entanglement criteria for the three-qubit states. *International Journal of Quantum Information*, 2017, vol. 15, no. 7, article number 1750049. DOI: <http://doi.org/10.1142/S0219749917500496>.
- [31] Bagrov A.R., Bashkirov E.K. Dynamics of the three-qubits Tavis — Cummings model. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, issue 1–2, pp. 95–105. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-95-105>. (In Russ.)
- [32] Zhang B. Entanglement between two qubits interacting with a slightly detuned thermal field. *Optics Communications*, 2010, vol. 283, issue 23, pp. 4676–4679. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.optcom.2010.06.094>.
- [33] Bashkirov E.K. Thermal Entanglement Between a Jaynes-Cummings Atom and an Isolated Atom. *International Journal of Theoretical Physics*, 2018, vol. 57, issue 12, pp. 3761–3771. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10773-018-3888-y>.
- [34] Al Naim A.F., Khan J.Y., Khalil E.M., Abdel-Khalek S. Effects of Kerr Medium and Stark Shift Parameter on Wehrl Entropy and the Field Purity for Two-Photon Jaynes-Cummings Model Under Dispersive Approximation. *Journal of Russian Laser Research*, 2019, vol. 40, issue 1, pp. 20–29. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10946-019-09764-w>.
- [35] Aldaghfag S.A., Berrada K., Abdel-Khalek S. Entanglement and photon statistics of two dipole-dipole coupled superconducting qubits with Kerr-like nonlinearities. *Results in Physics*, 2020, vol. 16, number 102978. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.rinp.2020.102978>.
- [36] Bashkirov E.K. Thermal entanglement in Tavis-Cummings models with Kerr media. *Proceedings of SPIE*, 2022, vol. 12193, article number 121930Q. DOI: <http://doi.org/10.1117/12.2625838>.