

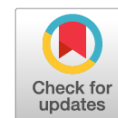


Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-105-110

УДК 539.4

Дата: поступления статьи: 12.09.2022  
после рецензирования: 08.11.2022  
принятия статьи: 05.12.2022



**К.А. Хвостунков**

Московский государственный университет

имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация

E-mail: khvostunkov@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3749-0678>

## ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ РАЗРУШЕНИЯ СЛОЕВ ДВУСЛОЙНОЙ БАЛКИ ПРИ ТРЕХТОЧЕЧНОМ НАГРУЖЕНИИ<sup>1</sup>

### АННОТАЦИЯ

В статье рассматривается хрупкое разрушение двухслойной балки в условиях трехточечного нагружения в зависимости от рассматриваемых параметров — различных пропорций толщин, модулей Юнга и прочностей обоих слоев. На основании уравнений равновесия сил и моментов выводятся зависимости положения нейтральной оси балки, ее кривизны и определяются области параметров, при которых разрушение начинается ранее в слое, к которому прилагается нагрузка, чем во внешнем противоположном нагрузке слое.

**Ключевые слова:** двухслойная балка; трехточечное нагружение; хрупкое разрушение; предельные напряжения.

**Цитирование.** Хвостунков К.А. Последовательность начала разрушения слоев двухслойной балки при трехточечном нагружении // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2022. Т. 28, № 3–4. С. 105–110. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-105-110>.

**Информация о конфликте интересов:** автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Хвостунков К.А., 2022

*Кирилл Анатольевич Хвостунков* — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории пластичности, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 119991, Российская Федерация, Москва, Ленинские горы 1, ГСП-1.

## 1. Предварительные сведения

Среди множества различных технологий проектирования, расчета и создания слоистых композитов [1; 2] активно развивается методика, основанная на технологии самораспространяющегося высокотемпературного синтеза (СВС). Возможность создавать высокопрочные, устойчивые ко внешним воздействиям слоистые материалы различных пропорций, упругих, прочностных, геометрических, структурных характеристик [3–7] нуждается в предварительном определении наиболее оптимальных их соотношений для решения возможных задач промышленности, а также для корректной трактовки результатов экспериментальных исследований создаваемых материалов.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим балку прямоугольного поперечного сечения  $S$  из двух слоев различной толщины из упругих однородных материалов в условиях трехточечного нагружения. Нижний слой, противоположный

<sup>1</sup>Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 221900040, <https://rscf.ru/project/22-19-00040/>.

стороне приложения нагрузки  $P$ , обозначим индексом 1, а верхний слой — индексом 2. Толщина слоев и их пропорции могут быть различными, но сумма толщин равна фиксированной величине толщины балки  $b$ .

Направим ось  $x$  горизонтально вдоль оси балки, а  $y$  — ортогонально оси  $x$  вверх по толщине. Ось  $z$  направлена ортогонально плоскости  $xy$  по ширине  $a$  балки (рис. 1),  $L$  — расстояние между опорами при трехточечном нагружении,  $h$  — толщина нижнего слоя,  $b - h$  — толщина верхнего слоя. Технология изготовления слоистых композитов методом СВС приводит к тому, что зона разделения слоев представляет собой диффузионную прослойку толщины  $\Delta$ .

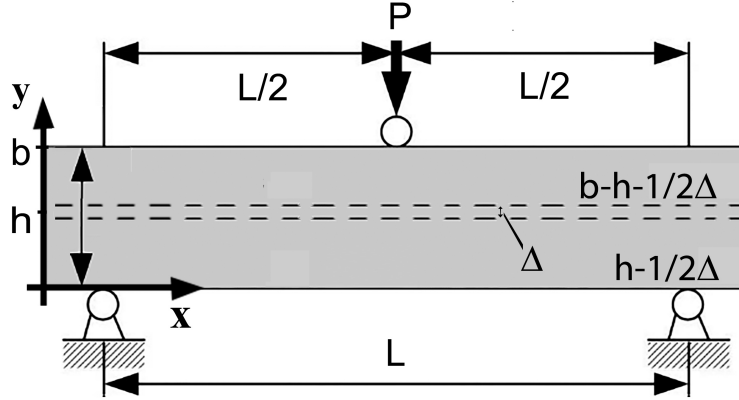


Рис. 1. Схема двухслойной балки с диффузионной прослойкой  
 Fig. 1. Scheme of a two-layer beam with a diffusion layer

Для выбранной системы координат рассмотрим нормальные компоненты  $\sigma(x, y)$  упругих напряжений по сечению в точке  $x$ , ортогональному нейтральной оси, координата которой  $y_0(x)$ .  $E(y)$  — модуль Юнга,  $\varkappa(x)$  — кривизна нейтральной оси. Изменением напряжений по координате  $z$  пренебрегаем. Также полагаем, что отношение расстояния между опорами к толщине балки достаточно велико, чтобы не учитывать влияние касательных компонент напряжений.

Введем три параметра двухслойности — отношение модуля Юнга нижнего слоя к верхнему  $\gamma = E_1/E_2$ , отношение толщин нижнего слоя ко всей толщине балки  $\eta = h/b$  и отношение пределов прочности на растяжение нижнего слоя к верхнему  $\lambda = \sigma_1^*/\sigma_2^*$ .

Требуется определить область параметров двухслойности  $\gamma, \eta, \lambda$ , в которой хрупкое разрушение будет начинаться в верхнем слое раньше, чем в нижнем.

### 3. Решение задачи

В силу особой жесткости получаемых СВС материалов уместно будет решать задачу в рамках гипотезы плоских сечений. Также положим, что в диффузионной прослойке упругие свойства изменяются линейно от материала 1 до материала 2, тогда

$$\sigma(x, y) = \varkappa(x)E(y)(y_0 - y), \quad E(y) = \begin{cases} E_2, & y \in (h + 1/2\Delta, b], \\ 1/2(E_1 + E_2) + (E_2 - E_1) \frac{(y-h)}{\Delta}, & y \in [h - 1/2\Delta, h + 1/2\Delta], \\ E_1, & y \in [0, h - 1/2\Delta]. \end{cases} \quad (1)$$

Введем безразмерные координаты и параметры:

$$\chi = \frac{x}{L}, \psi = \frac{y}{b}, \xi = \frac{y_0}{b}, \delta = \frac{\Delta}{b}, l = \frac{L}{b}, p = \frac{P}{2E_2ab} = \frac{1}{2E_2} \frac{P}{S}. \quad (2)$$

Запишем систему уравнений равновесия продольных сил и моментов (здесь и далее для продольной координаты  $\chi \in [0, 1/2]$ )

$$\int_0^{\eta-1/2\delta} \gamma(\xi - \psi) d\psi + \int_{\eta-1/2\delta}^{\eta+1/2\delta} \frac{2(1-\gamma)(\psi - \eta) + (1+\gamma)\delta}{2\delta} (\xi - \psi) d\psi + \int_{\eta+1/2\delta}^1 (\xi - \psi) d\psi = 0,$$

$$\int_0^{\eta-1/2\delta} \gamma(\xi - \psi)^2 d\psi + \int_{\eta-1/2\delta}^{\eta+1/2\delta} \frac{2(1-\gamma)(\psi - \eta) + (1+\gamma)\delta}{2\delta} (\xi - \psi)^2 d\psi + \int_{\eta+1/2\delta}^1 (\xi - \psi)^2 d\psi = \frac{pl\chi}{\varkappa(\chi)}.$$

Из уравнения равновесия сил получаем координату нейтральной оси

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{1 + \eta^2(\gamma - 1)}{1 + \eta(\gamma - 1)} + \frac{1}{24} \delta^2 \frac{(\gamma - 1)}{1 + \eta(\gamma - 1)}. \quad (3)$$

Рассмотрим, как расположена нейтральная ось относительно разделительной зоны. Это повлияет на вид уравнений равновесия. Случай, когда нейтральная ось совпадает с диффузионной прослойкой, имеет вид

$$\xi = \eta, \quad \eta \in [0, 1], \quad \frac{1}{2} \frac{\eta^2(\gamma - 1) + 1 + \alpha}{1 + \eta(\gamma - 1)} = \eta, \quad \alpha = \frac{1}{12} (\gamma - 1) \delta^2, \\ \eta = \frac{\sqrt{\gamma(\alpha + 1) - \alpha} - 1}{(\gamma - 1)} \approx \frac{1}{1 + \sqrt{\gamma}}, \quad \alpha \ll 1.$$

Мы получили условие на толщину слоев относительно модулей упругости, когда нейтральная ось находится на границе раздела

$$\eta = \frac{1}{1 + \sqrt{\gamma}}. \quad (4)$$

Из уравнения равновесия моментов выражаем кривизну:

$$\kappa(\chi) = \frac{pl}{f(\gamma, \eta, \delta)} \chi, \quad (5) \\ f(\gamma, \eta, \delta) = \frac{1}{2} \frac{(\gamma + (\gamma - 1)(\gamma \eta^4 - (\eta - 1)^4))}{1 + \eta(\gamma - 1)} + \frac{\delta^2}{8} \frac{(\gamma - 1)(\gamma \eta^2 - (\eta - 1)^2)}{(1 + \eta(\gamma - 1))} - \frac{5\delta^4}{576} \frac{(\gamma - 1)^2}{(1 + \eta(\gamma - 1))}.$$

Подставляя (5) в (1), получаем

$$\sigma(\chi, \psi) = \begin{cases} E_2 \kappa(\chi)(\xi - \eta), & \psi \in (\eta + 1/2\delta, 1], \\ E_2 \kappa(\chi) \left( \frac{(1+\gamma)}{2} + (\gamma - 1) \frac{(\psi - \eta)}{\delta} \right) (\xi - \psi), & \psi \in [\eta - 1/2\delta, \eta + 1/2\delta], \\ E_2 \kappa(\chi)(\xi - \psi), & \psi \in [0, \eta - 1/2\delta]. \end{cases}$$

В силу линейного распределения, максимум будет достигнут либо на нижнем крае верхнего слоя 2

$$\sigma_{m2}(\gamma, \eta) = \frac{1}{8} \frac{l}{f} \left( \frac{1 + \eta^2(\gamma - 1)}{1 + \eta(\gamma - 1)} + \frac{1}{12} \delta^2 \frac{\gamma - 1}{1 + \eta(\gamma - 1)} - 2(\eta + 1/2\delta) \right) \frac{P}{S}, \quad (6)$$

либо на нижнем крае нижнего слоя 1

$$\sigma_{m1}(\gamma, \eta) = \frac{\gamma}{8} \frac{l}{f} \left( \frac{1 + \eta^2(\gamma - 1)}{1 + \eta(\gamma - 1)} + \frac{1}{12} \delta^2 \frac{\gamma - 1}{1 + \eta(\gamma - 1)} \right) \frac{P}{S}. \quad (7)$$

При существенной малости толщины диффузионного слоя ( $\delta \ll 10^{-6}$ ) мы в дальнейших выкладках пренебрежем им и будем использовать следующие равенства:

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{1 + \eta^2(\gamma - 1)}{1 + \eta(\gamma - 1)}, \quad \kappa(\chi) = 3l \frac{1 + \eta(\gamma - 1)}{\gamma + (\gamma - 1)(\gamma \eta^4 - (\eta - 1)^4)} \chi \frac{P}{E_2 S}.$$

В этом случае максимальное напряжение в центральном сечении балки на противоположном точке приложения силы крае балки будет в верхнем слое:

$$\sigma_{m2}(\gamma, \eta) = \frac{3}{2} l \frac{((1 - \eta)^2 - \gamma \eta^2)}{\gamma + (\gamma - 1)(\gamma \eta^4 - (\eta - 1)^4)} \frac{P}{S}.$$

Максимальное напряжение в нижнем слое:

$$\sigma_{m1}(\gamma, \eta) = \frac{3}{2} l \gamma \frac{1 + \eta^2(\gamma - 1)}{\gamma + (\gamma - 1)(\gamma \eta^4 - (\eta - 1)^4)} \frac{P}{S}.$$

Факт того, что напряжения в верхнем слое 2 достигают максимума раньше в нижнем слое 1, не означает того, что там начнется разрушение. Необходимо ввести сравнение прочностей этих слоев. Получаем условие начала разрушения в верхнем слое 2 ранее нижнего слоя 1

$$\begin{cases} \frac{\sigma_{m1}}{\sigma_{m2}} = \frac{\gamma(1 + \eta^2(\gamma - 1))}{((1 - \eta)^2 - \gamma \eta^2)} < \lambda = \frac{\sigma_1^*}{\sigma_2^*}, \\ \eta < \xi = \frac{1}{2} \frac{1 + \eta^2(\gamma - 1)}{1 + \eta(\gamma - 1)}, \end{cases} \quad (8)$$

Область параметров двухслойности  $\gamma, \eta$  от  $\lambda$ , для которых максимальное напряжение достигает предела прочности на нижнем крае ранее верхнего слоя, а не нижнего, задается совокупностью неравенств, следующих из (8):

$$\begin{cases} (\gamma + \lambda)(\gamma - 1)\eta^2 + 2\lambda\eta + \gamma - \lambda < 0, \\ (\gamma - 1)\eta^2 + 2\eta - 1 < 0. \end{cases} \quad (9)$$

Учитывая положительность параметров, мы получаем зависимость параметров двухслойности  $\gamma, \eta, \lambda$ , при которых максимальное напряжение достигает предела прочности на нижнем крае ранее верхнего слоя, а не нижнего:

$$\begin{cases} \frac{\gamma(1+\eta^2(\gamma-1))}{((1-\eta)^2-\gamma\eta^2)} < \lambda \\ \eta < \frac{1}{1+\sqrt{\gamma}} \end{cases}$$

#### 4. Пример определения области параметров, соответствующих началу разрушения балки с края верхнего слоя

Рассмотрим случай  $\gamma = 1$ , то есть оба слоя с одинаковыми модулями Юнга. Мы определим зависимость параметров двухслойности  $\gamma, \eta$ , при которых максимальное напряжение достигается на нижнем крае ранее верхнего слоя, а не нижнего:

$$\frac{1}{1-2\eta} < \lambda, \quad 0 < \eta < \frac{1}{2}$$

$$\sigma_{m2} = \frac{3}{2}l(1-2\eta)\frac{P}{S}$$

В результате для  $\gamma = 1$  получена область (на рис. 2. закрашена серым), в которой разрушение начнется в верхнем слое ранее, чем в нижнем:

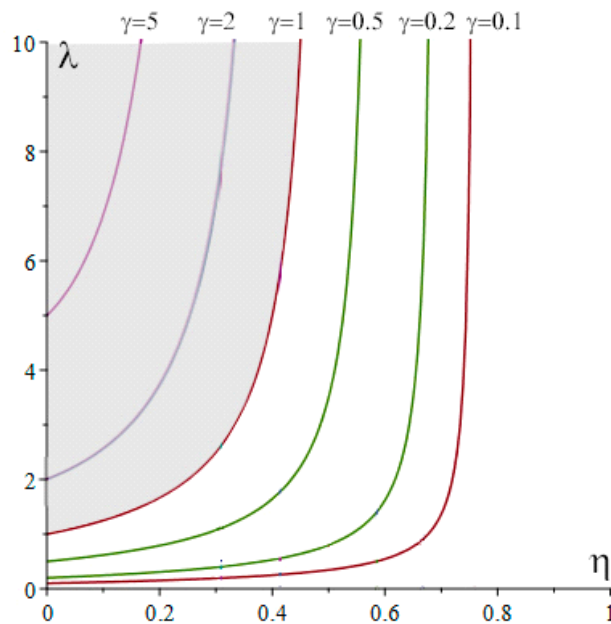


Рис. 2. Зоны разрушения при  $\gamma = 1$

Fig. 2. Fracture zones  $\gamma = 1$

## Выводы

Мы получили возможность заранее прогнозировать, какой слой, исходя из конкретных параметров двухслойности, запустит механизм хрупкого разрушения. Соответственно зависимость внешней нагрузки от прочности вида материала слоев стоит рассматривать в соотношениях (6) и (7).

## Литература

- [1] Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: Изгиб, устойчивость, колебания. Новосибирск: Наука, 2001. 288 с. URL: <https://libcats.org/book/438700>; <https://elibrary.ru/item.asp?id=21107452>. EDN: <https://elibrary.ru/rtxgkt>.

- [2] Vasiliev V.V., Morozov E.V. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements*. Elsevier, 2013. 832 p. URL: [https://books.google.ru/books?id=T1gRGmoJ9ecC&printsec=frontcover&redir\\_esc=y#v=onepage&q&f=false](https://books.google.ru/books?id=T1gRGmoJ9ecC&printsec=frontcover&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false).
- [3] Bazhin P.M., Konstantinov A.S., Chizhikov A.P., Pazniak A.I., Kostitsyna E.V., Prokopets A.D., Stolin A.M. Laminated cermet composite materials: The main production methods, structural features and properties (review) // *Ceramics International*. 2021. Vol. 47, Issue 2. P. 1513–1525. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.ceramint.2020.08.292>.
- [4] Bazhina A., Konstantinov A., Chizhikov A., Bazhin P., Stolin A., Avdeeva V. Structure and mechanical characteristics of a layered composite material based on TiB/TiAl/Ti // *Ceramics International*. 2022. Vol. 48, Issue 10. P. 14295–14300. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.ceramint.2022.01.318>.
- [5] Prokopets A.D., Bazhin P.M., Konstantinov A.S., Chizhikov A.P., Antipov M.S., Avdeeva V.V. Structural features of layered composite material TiB<sub>2</sub>/TiAl/Ti6Al4V obtained by unrestricted SHS-compression // *Materials Letters*. 2021. Vol. 300. P. 130165. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.matlet.2021.130165>.
- [6] Прокопец А.Д., Константинов А.С., Чижиков А.П., Бажин П.М., Столин А.М. Закономерности формирования структуры градиентных композиционных материалов на основе МАХ-фазы Ti<sub>3</sub>AlC<sub>2</sub> на титане // *Неорганические материалы*. 2020. Т. 56, № 10. С. 1145–1150. DOI: <http://doi.org/10.31857/S0002337X20100127>. EDN: <https://elibrary.ru/xjftmu>.
- [7] Бажин П.М., Столин А.М., Константинов А.С., Чижиков А.П., Прокопец А.Д., Альмов М.И. Особенности строения слоистых композиционных материалов на основе боридов титана, полученных методом свободного СВС-сжатия // *Доклады Академии наук*. 2019. Т. 488, № 3. С. 263–266. DOI: <http://doi.org/10.31857/S0869-56524883263-266>. EDN: <https://elibrary.ru/cssyxo>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-105-110

Submitted: 12.09.2022

Revised: 08.11.2022

Accepted: 05.12.2022

**K.A. Khvostunkov**

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

E-mail: [khvostunkov@gmail.com](mailto:khvostunkov@gmail.com). ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3749-0678>

## FRACTURE INITIATION SEQUENCE OF DOUBLE-LAYER BEAM LAYERS UNDER THREE-POINT LOADING

### ABSTRACT

The article deals with brittle failure of a two-layer beam under three-point loading conditions depending on the parameters under consideration — different proportions of thicknesses, Young's moduli and strengths of both layers. Based on the equations of force and moment equilibrium, the dependences of the position of the beam neutral axis and its curvature are derived and the regions of parameters are determined, at which the failure begins earlier in the layer to which the load is applied than in the outer opposite layer to the load.

**Key words:** two-layer beam; three-point loading; brittle fracture; ultimate stresses.

**Citation.** Khvostunkov K.A. Fracture initiation sequence of double-layer beam plies under three-point loading. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 3–4, pp. 105–110. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-105-110>. (In Russ.)

**Information about the conflict of interests:** author and reviewers declare no conflict of interests.

© Khvostunkov K.A., 2022

*Kirill A. Khvostunkov* — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of the Department of Theory Plasticity, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Main Building, 1, Leninskiye Gory, GSP-1, Moscow, 119991, Russian Federation.

## References

- [1] Andreev A.N., Nemirovsky Y.V. Multilayer anisotropic shells and plates: bending, stability, vibrations. Novosibirsk: Nauka, 2001, 288 p. Available at: <https://libcats.org/book/438700>; <https://elibrary.ru/item.asp?id=21107452>. EDN: <https://elibrary.ru/rtxgkt>. (In Russ.)
- [2] Vasiliev V.V., Morozov E.V. Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements. Elsevier, 2013. 832 p. Available at: [https://books.google.ru/books?id=T1gRGmoJ9ecC&printsec=frontcover&redir\\_esc=y#v=onepage&q&f=false](https://books.google.ru/books?id=T1gRGmoJ9ecC&printsec=frontcover&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false).
- [3] Bazhin P.M., Konstantinov A.S., Chizhikov A.P., Pazniak A.I., Kostitsyna E.V., Prokopets A.D., Stolin A.M. Laminated cermet composite materials: The main production methods, structural features and properties (review). *Ceramics International*, 2021, vol. 47, issue 2, pp. 1513–1525. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.ceramint.2020.08.292>.
- [4] Bazhina A., Konstantinov A., Chizhikov A., Bazhin P., Stolin A., Avdeeva V. Structure and mechanical characteristics of a layered composite material based on TiB/TiAl/Ti. *Ceramics International*, 2022, vol. 48, issue 10, pp. 14295–14300. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.ceramint.2022.01.318>.
- [5] Prokopets A.D., Bazhin P.M., Konstantinov A.S., Chizhikov A.P., Antipov M.S., Avdeeva V.V. Structural features of layered composite material TiB<sub>2</sub>/TiAl/Ti<sub>6</sub>Al<sub>4</sub>V obtained by unrestricted SHS-compression. *Materials Letters*, 2021, vol. 300, p. 130165. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.matlet.2021.130165>.
- [6] Prokopets A.D., Konstantinov A.S., Chizhikov A.P., Bazhin P.M., Stolin A.M. General trends of structure formation in graded composite materials based on Ti<sub>3</sub>AlC<sub>2</sub> MAX-phase on titanium. *Inorganic Materials*, 2020, vol. 56, no. 10, pp. 1087–1091. DOI: <https://doi.org/10.1134/S002016852010012X>. EDN: <https://elibrary.ru/lelksm>. (In English; original in Russian).
- [7] Bazhin P.M., Stolin A.M., Konstantinov A.S., Chizhikov A.P., Prokopets A.D., Alymov M.I. Structural features of titanium boride-based layered composite materials produced by free SHS compression. *Doklady Chemistry*, 2019, vol. 488, no. 1, pp. 246–248. DOI: <http://doi.org/10.1134/S0012500819090039>. EDN: <https://elibrary.ru/gxuqpa>. (In English: original in Russian).