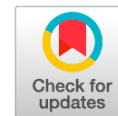




Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-53-87

УДК 539.3



Дата: поступления статьи: 30.09.2022
после рецензирования: 16.11.2022
принятия статьи: 05.12.2022

С.А. Лычев

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Российская Федерация
E-mail: lychevsa@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7590-1389>

К.Г. Койфман

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
г. Москва, Российская Федерация

E-mail: koifman.konstantin@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7891-9995>

ОТСЧЕТНАЯ ФОРМА ТЕЛ С КОНЕЧНЫМИ НЕСОВМЕСТНЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ¹

АННОТАЦИЯ

В статье развиваются дифференциально-геометрические методы моделирования конечных несовместных деформаций гиперупругих твердых тел. Несовместность деформаций может быть вызвана, к примеру, неоднородными температурными полями и распределенными дефектами. Как следствие, возникают внутренние напряжения и искажение геометрической формы тела. Эти факторы определяют критические параметры современных высокоточных технологий, в частности, в технологиях аддитивного изготовления. В этой связи развитие методов их количественного описания является актуальной проблемой современной механики деформируемого твердого тела.

Применение методов дифференциальной геометрии основано на представлении тела в виде гладкого многообразия, снабженного метрикой и неевклидовой связностью. Такой подход позволяет интерпретировать тело как глобальную, свободную от напряжений форму и сформулировать физический отклик и материальные уравнения баланса относительно этой формы. В рамках геометрического метода деформации характеризуются вложениями неевклидовой формы в физическое пространство, которое по-прежнему считается евклидовым. Меры несовместности отождествляются с инвариантами аффинной связности — кручением, кривизной и неметричностью, а сама связность определяется типом физического процесса.

Ключевые слова: гиперупругость; несовместные деформации; остаточные напряжения; неевклидова геометрия; материальная метрика; материальная связность; кручение; кривизна; неметричность; метод подвижного репера.

Цитирование. Лычев С.А., Койфман К.Г. Отсчетная форма тел с конечными несовместными деформациями // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2022. Т. 28, № 3–4. С. 53–87. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-53-87>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Лычев С.А., Койфман К.Г., 2022

Сергей Александрович Лычев — доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории механики технологических процессов, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, 119526, Российская Федерация, г. Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1.

Константин Георгиевич Койфман — тьютор по математике, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, 105005, Российская Федерация, г. Москва, 2-я Бауманская улица, д. 5.

¹Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00457).

Введение

В лекции «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» Риман [1] впервые выдвинул идею n -мерного многообразия, снабженного метрическим тензором. Последний определяет на многообразии дифференциал расстояния между бесконечно близкими элементами, а также вводит на нем специфическое правило параллельного переноса. Спустя время, в конце XIX века, идея Римана нашла свое применение в физике и, в частности, в механике континуума. По-видимому, первым, кто применил неевклидову геометрию в теории упругости, был Бельтрами [2], который сформулировал линейные уравнения баланса в пространстве с неевклидовым метрическим тензором. Появление теории относительности инициировало дальнейшие исследования в механике континуума, в которых рассматривалось движение тела в плоском или искривленном пространстве-времени [3]. Следует отметить, что перенос классических положений механики континуума на релятивистский случай таит в себе ряд принципиальных трудностей, поскольку привычные понятия длины угла и времени зависят от наблюдателя. В частности, определение жесткого движения требует особого подхода, развитого в работах Борна [4; 5] и Герглотца [6] для случая специальной теории относительности и в работе Нордстрёма [7] для случая общей теории относительности. Таким образом, первоначально неевклидовой структурой снабжалось пространство, в котором наблюдалось движение деформируемого континуума.

Позже, в работах Билби [8] и Кондо [9–12] была предложена и реализована идея об использовании неевклидовой геометрии для моделирования нелинейно-упругого тела с остаточными напряжениями. Билби и Кондо предполагали физическое пространство евклидовым, а отсчетное состояние тела — неевклидовым. В последующих работах Нолла [13] и Вана [14] была построена математически строгая геометрическая теория тел с остаточными напряжениями, которая получила дальнейшее развитие в работах Можена [15], Марседена [16] и Эпштейна [17; 18]. В настоящее время исследования, использующие неевклидово описание отсчетного состояния, образуют область, называемую геометрической механикой континуума. Современное состояние исследований в этом направлении отражено в работах зарубежных [19–22] и отечественных [23–26] школ.

Изучение астрофизических феноменов — аккреции массивных тел [27] и звездотрясений (starquakes) внешней оболочки нейтронных звезд [28] — привело к развитию релятивистской теории упругости, в которой как физическое пространство, так и отсчетное состояние моделируются неевклидовыми многообразиями [29; 30]. Причиной неевклидовости физического пространства являются наличие больших гравитирующих масс и необходимость в этой связи использовать положения общей теории относительности. Причиной же использования неевклидова отсчетного состояния является тот факт, что отсчетное состояние зависит от наблюдателя и то, что релятивистское упругое тело оказывается самонапряженным. В этом проявляется методологическое сходство релятивистской теории упругости и геометрической механики континуума.

Поскольку использование неевклидовых пространств для моделирования отсчетного состояния тела не является общепринятым в механике континуума, дадим необходимые комментарии. В классической теории упругости деформирование тела рассматривается относительно некоторого его привилегированного положения в физическом пространстве — отсчетной формы. Как правило, предполагается, что отсчетная форма состоит из представительных объемов, каждый из которых свободен от напряжений. В линейном приближении существование такой формы характеризуется условиями совместности Сен-Венана, а в нелинейном — равенством нулю тензора кривизны Римана, построенного относительно метрики, индуцированной на отсчетную форму из объемлющего евклидова пространства. Вместе с тем в начале XX века выяснилось, что отсчетная форма, свободная от напряжений, существует далеко не всегда. Теоретическое исследование условий совместности для многосвязных областей, проведенное Вайнгартеном [31] и Вольтерра [32], привело к примерам тел с остаточными напряжениями — дисторсиям Вольтерра.

Далее оказалось, что возникновение остаточных напряжений сопутствует реальному физическому процессу. Открытие периодической атомарной структуры кристаллических тел в 1912 году (эксперименты Лауэ) инициировало многочисленные исследования в физике кристаллов. Одной из проблем, над которой работали исследователи, являлось объяснение экспериментального значения предела текучести кристалла: теоретические вычисления, проведенные Френкелем [33] в 1926 году, дали значения предела текучести, существенно превышающие экспериментальные.

Для объяснения несовпадения теоретических вычислений с экспериментальными данными Орована [34], Тейлор [35; 36] и Поляни [37] в 1934 году независимо друг от друга предложили модель линейного кристаллического дефекта, называемого краевой дислокацией. Предположив, что каждый кристалл содержит большое количество дислокаций, Тейлор смог вычислить предел текучести как напряжение, необходимое для движения дислокации через упругое поле всех других дислокаций. Результат был в согласии с экспериментальными данными.

К середине XX века окончательно сформировалось представление о том, что тела с остаточными напряжениями существуют и предположение о существовании отсчетной формы, свободной от напряжений, является идеализацией. Одним из первых, кто указал на этот факт, был Эккарт [38]. Несколькоми годами позже Билби и Кондо предложили определять отсчетную форму в подходящем неевклидовом пространстве [8; 9]. В таком случае деформация интерпретируется как вложение неевклидова многообразия в евклидово физическое пространство — собственная деформация. Кондо показал, что такие собственные деформации полностью характеризуют поля дефектов как внутренних источников напряжений, которые, в свою очередь, могут быть определены правилом параллельного переноса в пространстве, вмещающем отсчетную форму. Они количественно характеризуются соответствующей кривизной и кручением аффинной связности.

В настоящей статье предлагается новый вариант построения неевклидовой отсчетной формы, который позволяет геометрически охарактеризовать несовместность деформаций несколькими альтернативными способами. Первый способ предполагает описание материального многообразия как риманова, кривизна связности на котором определяет меру несовместности деформаций. Второй способ задает на материальном многообразии плоское пространство с ненулевым кручением, инварианты которого также характеризуют меры несовместности деформаций. В рамках третьего способа несовместность определяется неметричностью пространства Вейля. Для задания специфической геометрии на материальном многообразии используются вычисления относительно некоторой напряженной промежуточной формы. Доказывается, что результат — связность и инварианты связности на материальном многообразии не зависят от выбора этой промежуточной формы.

В работе используются следующие обозначения. Символ $\text{Hom}(\mathcal{U}; \mathcal{V})$ обозначает векторное пространство всех линейных отображений $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, а символ $\text{End}(\mathcal{U}) := \text{Hom}(\mathcal{U}; \mathcal{U})$ — векторное пространство линейных операторов $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$. Пусть M — гладкое многообразие. Алгебра гладких функций $M \rightarrow \mathbb{R}$ на нем обозначается символом $C^\infty(M)$. Касательное пространство к M в точке p обозначается через $T_p M$ и в зависимости от ситуации рассматривается либо как класс эквивалентных кривых, либо как пространство дифференцирований скалярных функций. Кокасательное пространство, являющееся векторным пространством, дуальным к $T_p M$, обозначается символом $T_p^* M$. Символ $\text{Vec}(M)$ означает $C^\infty(M)$ -алгебру векторных полей на M . Если $E \rightarrow M$ — векторное расслоение, то $\text{Sec}(E)$ обозначает $C^\infty(M)$ -модуль всех его сечений (тензорных полей). Более подробно эти обозначения и связанная с ними техника изложены в руководствах [39–41].

Используется общее понятие структуры как упорядоченного набора, состоящего из множества — носителя структуры, и дополнительных элементов, характеризующих эту структуру. Таким образом, если X — множество, а Struct обозначает объекты, характеризующие структуру на X , то структура в целом записывается как (X, Struct) .

1. Тело и его формы

1.1. Физическое пространство

Геометрическая механика континуума основана на идее, что тело и физическое пространство могут быть формализованы в терминах гладких многообразий, снабженных специфическими метриками и аффинными связностями, а деформация — в виде композиции вложений тела в физическое пространство. Настоящая статья следует этой методологии. Для формализации процедуры построения неевклидовой отсчетной формы, являющейся основной целью настоящей работы, вначале уточним, что понимается под физическим пространством, вмещающим образы тела, и что понимается под самим телом.

Будем полагать, что \mathcal{E} является евклидовым точечным пространством размерности 3, то есть структурой [42]

$$\mathcal{E} = (E, \mathcal{V}, \text{vec}, \cdot). \quad (1.1)$$

Здесь E — континуальное множество мест, $\mathcal{V} = (V, \mathbb{R}, +_V, \cdot_V)$ — трансляционное векторное пространство над \mathbb{R} , имеющее размерность 3, $\text{vec} : E \times E \rightarrow V$ — отображение, удовлетворяющее аксиомам:

(а) для любых точек $x, y, z \in E$ выполняется равенство

$$\text{vec}(x, y) + \text{vec}(y, z) = \text{vec}(x, z),$$

(б) для любой точки $x \in E$ и любого вектора $v \in \mathcal{V}$ существует единственная точка $y \in E$ такая, что $\text{vec}(x, y) = v$,

²В котором V — подлежащее множество, а $+_V : V \times V \rightarrow V$ и $\cdot_V : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ — операции сложения и умножения на скаляр соответственно.

а (\cdot) — скалярное произведение на \mathcal{V} . Значение $\mathbf{v} = \text{vec}(x, y)$ интерпретируется как вектор с началом в точке x и концом в точке y .

Предположим, что фиксирован некоторый декартов репер $(o, (\mathbf{i}_k)_{k=1}^3)$, где $o \in \mathcal{E}$ — начало отсчета, а $(\mathbf{i}_k)_{k=1}^3$ — ортонормированный базис пространства \mathcal{V} . Тогда точке o соответствует поле радиус-векторов $\mathbf{p} : x \mapsto \text{vec}(o, x)$, а базис $(\mathbf{i}_k)_{k=1}^3$ позволяет определить координаты произвольной точки из E , которые полагаются равными координатам радиус-вектора этой точки.

Пара $(o, (\mathbf{i}_k)_{k=1}^3)$ в дальнейшем ассоциируется с инерциальной системой отсчета (наличие абсолютного времени неявно предполагается) [43]. За счет операции сопоставления точкам их декартовых координат, осуществляемой парой $(o, (\mathbf{i}_k)_{k=1}^3)$, на множестве E вводятся топология \mathcal{T}_E и гладкая структура \mathcal{D}_E , индуцированные соответствующими топологией и атласом из \mathbb{R}^3 . Тем самым приходим к структуре

$$\mathcal{E}_{\text{geom}} = (E, \mathcal{T}_E, \mathcal{D}_E, \mathbf{g}, \nabla, \epsilon) \quad (1.2)$$

трехмерного геометрического пространства над E . Здесь \mathbf{g} — евклидова метрика, ∇ — евклидова связность, а ϵ — форма объема, согласованная с метрикой (тензор Леви-Чивита). Элементы \mathbf{g} , ∇ и ϵ структуры (1.2) выбраны раз и навсегда.

Структура (1.2) полностью определяется по структуре (1.1) и в этом смысле может быть названа производной по отношению к последней. Необходимость определения производной геометрической структуры связана с тем, что в дальнейшем предполагается рассматривать на E регионы и стирать с них геометрию, которая изначально индуцирована геометрией объемлющего пространства (1.2), для последующего определения на этих множествах геометрии более общего вида.

1.2. Тело и евклидовы формы

В рамках классической механики континуума под телом \mathfrak{B} понимается гладкое многообразие меток, которые идентифицируют представительные объемы, наделенные дополнительными атрибутами — массой и зарядом [44; 45]. Поэтому \mathfrak{B} является не просто чистым многообразием, а многообразием, снабженным некоторой мерой [46]. Вместе с тем, поскольку в настоящей работе рассматривается только кинематика самонапряженного тела, будем интерпретировать \mathfrak{B} лишь как гладкое n -мерное многообразие, т. е. как структуру

$$\mathfrak{B} = (B, \mathcal{T}_B, \mathcal{D}_B), \quad (1.3)$$

в которой B — континуальное множество меток, \mathcal{T}_B — топология на этом множестве [47, с. 20], а \mathcal{D}_B — гладкая структура на B [39, с. 12–13]. Хотя в общем случае топология и гладкая структура на теле (1.3) могут быть произвольными, далее будем полагать, что они индуцированы топологией и гладкой структурой образа тела, реализованного в виде подмногообразия пространства (1.2). Заметим, что размерность тела n может принимать значения 1, 2 и 3. В соответствующем случае будем говорить о материальных кривых, материальных поверхностях и материальных телах. Для обозначения элементов \mathfrak{B} используется фразатурный шрифт: \mathfrak{p} , \mathfrak{q} , \mathfrak{r} .

Тело \mathfrak{B} наблюдается лишь посредством *евклидовых форм*, то есть образов гладких вложений [39, с. 85] $\varkappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{E}$ тела \mathfrak{B} в евклидово физическое пространство \mathcal{E} . Прилагательное «евклидова» использовано здесь для того, чтобы подчеркнуть отличие этих образов тела от более общих, рассматриваемых в рамках неевклидовой геометрии. Следуя терминологии, принятой в механике континуума [44], любое вложение $\varkappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{E}$ будем называть *конфигурацией*.

Каждая евклидова форма $\mathcal{S} = \varkappa(\mathfrak{B})$ рассматривается как некоторое подмножество физического многообразия $\mathcal{E}_{\text{geom}}$, из которого на \mathcal{S} перенесены метрические свойства. В терминах структур последнее означает, что \mathcal{S} является гладким вложенным n -мерным подмногообразием [39, с. 98] физического пространства \mathcal{E} с индуцированной геометрией последнего:

$$\mathcal{S} = (S, \mathcal{T}_E|_S, \mathcal{D}_E|_S, \mathbf{g}|_S, \nabla|_S, \epsilon|_S), \quad (1.4)$$

где S — подлежащее множество формы, а вертикальная черта $\#|_S$ обозначает ограничение объекта $\#$ на множество S .

Элемент $\mathcal{T}_E|_S$ структуры (1.4) является топологией на S , индуцированной из $\mathcal{E}_{\text{geom}}$ [47, с. 49], а класс $\mathcal{D}_E|_S$ является гладкой структурой на S , порожденной атласом, состоящим из карт срезки (slice charts) [39, с. 101]. Поле $\mathbf{g}|_S$ определяет риманову метрику на S (в рамках классической дифференциальной геометрии ей соответствует первая основная фундаментальная форма) как обратный образ (pullback) [39, с. 320] $\mathbf{g}|_S := \iota_S^* \mathbf{g}$ физической метрики относительно канонической инъекции $\iota_S : S \hookrightarrow E$, определяемой формулой $x \mapsto x$. В свою очередь, $\nabla|_S$ есть связность Леви-Чивита [48, с. 122–123] на S , порожденная полем $\mathbf{g}|_S$. Наконец, поле $\epsilon|_S$ является формой объема на S , индуцированной формой объема ϵ физического пространства. Определение последнего поля довольно деликатно и зависит от размерности $n = \dim \mathfrak{B}$. Если $n = 3$, подобно физическому пространству, то многообразие $(S, \mathcal{T}_E|_S, \mathcal{D}_E|_S)$

всегда ориентируемо, и его форма объема определяется через обратный образ $\epsilon|_S = \iota_S^* \epsilon$ [39, с. 383]. В случае же, когда $n < 3$, обратный образ 3-формы на n -мерное подмногообразие дает нуль-форму. Чтобы иметь возможность определить форму объема по римановой метрике [39, с. 389], необходимо наложить ограничение на тело \mathfrak{B} , потребовав, чтобы оно было ориентируемым многообразием. Тогда все его формы будут также ориентируемы. В дальнейшем это ограничение неявно подразумевается³.

Даже если размерность тела совпадает с размерностью физического пространства, то есть, когда $n = 3$, евклидова форма \mathcal{S} может не совпадать со всем физическим пространством \mathcal{E} . Это означает, что соответствующая конфигурация \varkappa не является обратимым отображением, поскольку не для каждого элемента $x \in \mathcal{E}$ имеется прообраз в \mathfrak{B} . Чтобы исправить ситуацию, достаточно воспользоваться отображением $\widehat{\varkappa} : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{S}$, определенным равенством $\widehat{\varkappa}(p) := \varkappa(p)$, т. е. $\widehat{\varkappa}$ получено из \varkappa сужением области прибытия на образ отображения. Действительно, это отображение является биекцией. Более того, оно является диффеоморфизмом.

Пусть $\varkappa_R, \varkappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{E}$ — произвольные конфигурации, образами которых являются евклидовы формы $\mathcal{S}_R = \varkappa_R(\mathfrak{B})$ и $\mathcal{S} = \varkappa(\mathfrak{B})$. Определим отображения $\widehat{\varkappa}_R : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{S}_R$ и $\widehat{\varkappa} : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{S}$. Тогда композиция $\gamma := \widehat{\varkappa} \circ \widehat{\varkappa}_R^{-1} : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}$ характеризует переход от формы \mathcal{S}_R к форме \mathcal{S} и в этой связи называется деформацией. Соотношения между телом и его формами, конфигурациями и деформациями иллюстрируются на рис. 1.1.

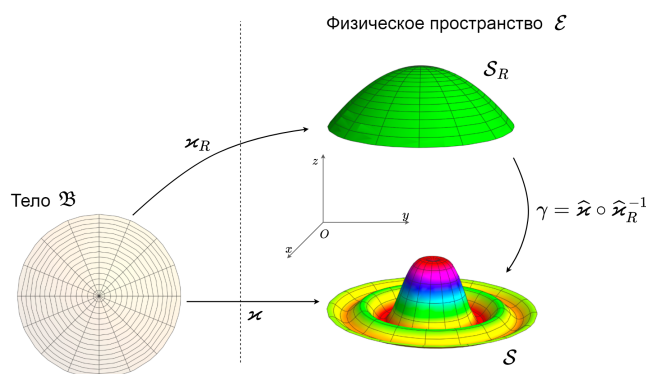


Рис. 1.1. Конфигурации и деформации
 Fig. 1.1. Configurations and deformations

1.3. Геометрическая структура над телом

Выбор привилегированной формы, геометрия которой в общем случае неевклидова, означает, что тело, будучи носителем этой формы, становится *геометрическим пространством*. Термин «геометрический» подчеркивает, что рассматриваются многообразия, на которых определены правило параллельного переноса и возможность измерять длины, т. е. все то, что позволяет использовать геометрический язык. Альтернативный термин — «пространство аффинной связности с метрикой» — в настоящей статье не употребляется в силу его громоздкости. Таким образом, структура (1.3) пополняется новыми элементами [26]:

$$\mathfrak{B}_{\text{geom}} = (B, \mathcal{T}_B, \mathcal{D}_B, \mathbf{G}, \nabla, \mu), \quad (1.5)$$

где \mathbf{G} — риманова метрика, ∇ — аффинная связность, а μ — форма объема на B . Структура (1.5) является абстрактным представлением формы, свободной от напряжений; ее элементы \mathbf{G} , ∇ и μ зависят от физической природы несовместности деформаций. В частности, эти поля могут быть неравноправны: одни из них могут быть определены по другим либо по дополнительным физическим полям. Таблица 1.1 иллюстрирует эту ситуацию. Она содержит примеры геометрических пространств, обычно используемых в геометрической механике континуума [20; 21].

В табл. 1.1 столбец «Базисные поля» содержит поля, которые предписаны, исходя из тех или иных физических соображений. Эти поля не зависят от структуры геометрии. Последний столбец «Производные поля» содержит поля, которые получаются из базисных полей и, возможно, геометрических свойств гладких многообразий. Поясним соответствие между базисными и производными полями более подробно.

Если пространство риманово, то риманова метрика \mathbf{G} является базисным полем. Другие поля из структуры (1.5) выражаются в терминах метрики: аффинная связность ∇ является связностью Леви-

³Тем самым исключаются многообразия вида ленты Мебиуса.

Таблица 1.1

Геометрические пространства над \mathfrak{B}

Table 1.1

Geometric spaces over \mathfrak{B}

Пространство	Структура	Базисн. поля	Произв. поля
Римана	$(B, \mathcal{D}_B, \mathbb{G}, \nabla, dV)$	\mathbb{G}	∇, dV
Вайценбока	$(B, \mathcal{D}_B, \mathbb{G}, \nabla, \mu)$	\mathbb{H}, μ	\mathbb{G}, ∇
Вейля	$(B, \mathcal{D}_B, \mathbb{G}, \nabla, \mu)$	\mathbb{G}, ν, μ	∇

Чивита, а форма объема $\mu = dV$ определяется равенством $dV = \sqrt{\det \mathbb{G}} dp^1 \wedge \dots \wedge dp^n$. В случае пространства Вайценбока заданы поле \mathbb{H} обратимых линейных преобразований и форма объема μ . Тогда аффинная связность и метрика, являясь производными полями, порождаются полем \mathbb{H} . Наконец, аффинная связность пространства Вейля определяется метрикой и 1-формой ν .

Геометрия пространств аффинной связности характеризуется тензорными полями кручения \mathfrak{T} , кривизны \mathfrak{R} и неметричности \mathfrak{Q} . Их соответствия каждому пространству показаны в табл. 1.2, где символ \circ указывает на то, что соответствующее поле всюду равно нулю, а \bullet означает, что поле принимает ненулевые значения.

Таблица 1.2

Соответствие между геометриями и тензорными полями кручения, кривизны и неметричности

Table 1.2

Correspondence between geometries and tensorial fields of torsion, curvature and nonmetricity

Геометрия	Кручение (\mathfrak{T})	Кривизна (\mathfrak{R})	Неметричность (\mathfrak{Q})
Римана	\circ	\bullet	\circ
Вайценбока	\bullet	\circ	\circ
Вейля	\circ	\bullet	\bullet

1.4. Тело и неевклидовы формы

Рассмотрим более подробно выбор геометрии на теле \mathfrak{B} . Очевидным представляется способ, когда геометрия индуцируется из физического пространства \mathcal{E} по некоторой конфигурации $\varkappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{E}$ посредством обратных образов из евклидовой формы (1.4). В этом случае

$$\mathbb{G} = \hat{\varkappa}^* g|_S, \quad \nabla = \hat{\varkappa}^* \nabla|_S, \quad \mu = \hat{\varkappa}^* \epsilon|_S,$$

где

$$\begin{aligned} G_p(u, v) &:= g(T_p \varkappa(u), T_p \varkappa(v)), \\ \nabla_u v &:= \hat{\varkappa}^* \{ (\nabla|_S)_{\hat{\varkappa}_*(u)} \hat{\varkappa}_*(v) \}, \\ \mu_p(v_1, \dots, v_n) &:= \epsilon|_S(T_p \varkappa(v_1), \dots, T_p \varkappa(v_n)). \end{aligned}$$

Здесь $p \in \mathfrak{B}$ — произвольная точка тела, $u, v, v_1, \dots, v_n \in T_p \mathfrak{B}$ — произвольные касательные векторы [40, с. 22], $T_p \varkappa \in \text{Hom}(T_p \mathfrak{B}; \mathcal{V})$ — касательное отображение [40, с. 28] (используется отождествление $T_{\varkappa(p)} \mathcal{E} \cong \mathcal{V}$ по каноническому изоморфизму [39, с. 59]), а $\hat{\varkappa}^*$, $\hat{\varkappa}_*$ являются, соответственно, обратным и прямым образами векторных полей [16, с. 67].

Рассмотренный выбор геометрии на теле соответствует случаю классической механики сплошной среды. В ней тело не играет никакой иной роли, кроме как множества меток, а геометрия на нем фиксирована и совпадает с геометрией любой из его евклидовых форм. Определим теперь *неевклидову форму* [25; 26]

$$\mathbf{S} = (S, \mathcal{T}_S, \mathcal{D}_S, \mathbb{G}_0, \nabla_0, \mu_0), \tag{1.6}$$

где \mathcal{T}_S и \mathcal{D}_S являются, соответственно, топологией и гладкой структурой на континуальном множестве S , а $\mathbb{G}_0, \nabla_0, \mu_0$ — произвольными римановой метрикой, аффинной связностью и формой объема на n -мерном многообразии $(S, \mathcal{T}_S, \mathcal{D}_S)$. Хотя, с формальной точки зрения, множество S , топология \mathcal{T}_S и гладкая структура \mathcal{D}_S могут быть произвольными, следует иметь в виду, что каждая неевклидова форма может быть получена лишь по евклидовой (ведь только такая форма доступна наблюдениям). По этой причине ограничим общность рассуждений требованием, чтобы (см. формулу (1.4))

$$S \subset \mathcal{E}, \quad \mathcal{T}_S = \mathcal{T}_E|_S, \quad \text{и} \quad \mathcal{D}_S = \mathcal{D}_E|_S.$$

Геометрическая структура формы (1.6) может не иметь ничего общего с геометрией физического пространства. Для единообразия можно предположить, что любая такая форма является образом вложения $\varkappa_{\mathbb{R}} : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}$, которое мы будем называть *обобщенной конфигурацией*, тела \mathfrak{B} в некоторое неевклидово пространство \mathbb{R} , скажем, Римана. В этом случае тело может быть снабжено соответствующей геометрией по формулам

$$\mathbf{G} = \widehat{\varkappa}_{\mathbb{R}}^* \mathbf{G}_0, \quad \nabla = \widehat{\varkappa}_{\mathbb{R}}^* \nabla_0, \quad \mu = \widehat{\varkappa}_{\mathbb{R}}^* \mu_0.$$

Геометрия формы \mathfrak{S} полностью определяется физической причиной несовместности, поэтому одно и то же многообразие меток может обладать разными геометриями. Как отмечалось ранее, тело становится геометрическим пространством и в рамках теоретических рассуждений само может быть рассмотрено как неевклидова форма [13; 14; 23].

Пусть $\varkappa_{\mathbb{R}} : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}$ — обобщенная конфигурация и пусть $\varkappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{E}$ — обычная конфигурация. Отображение $\lambda = \widehat{\varkappa} \circ \widehat{\varkappa}_{\mathbb{R}}^{-1} : \mathfrak{S} \rightarrow \mathcal{S}$ из неевклидовой формы $\mathfrak{S} = \varkappa_{\mathbb{R}}(\mathfrak{B})$ в евклидову форму $\mathcal{S} = \varkappa(\mathfrak{B})$ на уровне гладких структур⁴ неотлично от классической деформации. По этой причине будем называть λ *обобщенной деформацией*. Вместе с тем следует иметь в виду, что геометрические структуры над областью отправления и областью прибытия λ отличны друг от друга в целом. Это отличие проявляется в действиях обратного и прямого образов λ^* и λ_* . Действительно, первое отображение переводит элементы евклидовой структуры из формы \mathcal{S} на форму \mathfrak{S} , а второе, наоборот, переводит элементы неевклидовой структуры из формы \mathfrak{S} на форму \mathcal{S} . Конечно, ограничиваясь сценой гладких многообразий, эти отображения всего лишь преобразуют поля.

В частном случае, когда геометрия формы \mathfrak{S} совпадает с евклидовой (или, если $n < 3$, — то с геометрией, индуцированной евклидовой геометрией объемлющего пространства), обобщенная деформация сводится к классической деформации. Следует лишь отождествить \mathfrak{S} с некоторым подмножеством евклидова пространства, а λ — с искажением соответствующей евклидовой формы в другую форму \mathcal{S} . В общем же случае, когда форма \mathfrak{S} неевклидова, можно вложить ее в евклидово пространство размерности большей, чем 3. Здесь под вложением понимается отображение в такое пространство, в котором геометрия \mathfrak{S} будет совпадать с геометрией, индуцированной из объемлющего пространства на образ вложения.

Изложенные геометрические идеи могут быть образно интерпретированы в случае размерности $n = 2$, которая соответствует криволинейной упругой мембране. Здесь возможны две точки зрения. Первая из них отвечает могущественному трехмерному наблюдателю в евклидовом пространстве: процесс деформации наблюдается как растяжение и изгиб мембраны в объемлющем пространстве. Вторая точка зрения более ограничительна. Следует отождествить себя с наблюдателем, пребывающим в двумерном мире с неевклидовой геометрией, образованной криволинейной формой мембраны. Геометрически это означает, что такой наблюдатель чувствует лишь внутреннюю геометрию поверхности, ассоциированной с мембраной. Именно второй подход позволяет дать описание «чистой» деформации, отбросив те «фиктивные» деформации, которые не влияют на состояние тела.

1.5. Пример неевклидовой формы

Проиллюстрируем геометрические идеи на частном примере, основанном на решении задачи об осесимметричной конечной деформации гиперупругой мембраны [49]. Рисунок 1.2 содержит некоторые результаты численных расчетов с использованием этого решения. Тело \mathfrak{B} изображено в центре нижней части рисунка как открытый диск на евклидовой плоскости с нанесенной на нем координатной сеткой. Этим иллюстрируется, что тело имеет лишь структуру гладкого многообразия и что в рассматриваемом случае эта структура совместна с евклидовой. Физическое пространство, изображенное в правой верхней части рисунка, является двумерным евклидовым многообразием. Оно содержит две плоские евклидовы формы \mathcal{S}_1 и \mathcal{S}_2 , которые самонапряжены (как и любые другие). Эти формы ощущаются двумерным *физическим* наблюдателем.

Неевклидова отсчетная форма \mathfrak{S}_R тела, в которой все представительные объемы находятся в натуральном (т. е. в свободном от напряжений) состоянии, изображена в виде полусферы в левой верхней части рисунка. На нее нанесена сферическая сетка, и форма в целом помещена на сферу, представляющую сферическую (риманову) геометрию пространства, содержащего неевклидову форму. Такой образ может ощущаться трехмерным наблюдателем.

Изменение цветовых оттенков в плоскостях форм \mathcal{S}_1 и \mathcal{S}_2 показывает распределение накопленной упругой энергии, связанной с частными вложениями отсчетной формы в физическую плоскость. Все, что может увидеть двумерный физический наблюдатель, — это деформация $\gamma : \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ одной

⁴Можно представить себе, что у наблюдателя имеются различные «очки», которые позволяют акцентировать внимание на тех или иных подструктурах геометрического пространства. Самые слабые очки позволяют различать лишь гладкие структуры, а самые сильные — всю структуру в целом.

самонапряженной формы в другую. Для иллюстрации самонапряженной природы форм на плоскостях, перпендикулярных к ним, построены графики с распределениями главных напряжений Коши, T_1 , T_2 и накопленной упругой энергии W .

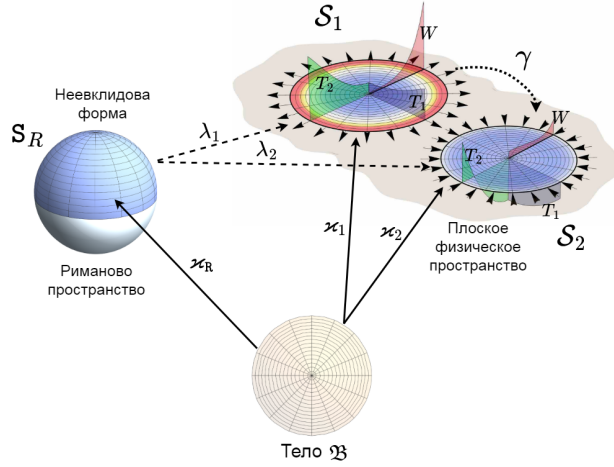


Рис. 1.2. Вложения неевклидовой отсчетной формы в плоское физическое пространство
 Fig. 1.2. Embeddings of non-Euclidean reference shape into planar physical space

Рисунок 1.2 основан на вычислениях, проведенных в соответствии со статьей [49]. Мембрана, отсчетная форма которой представляет собой полусферу, растягивается и уплотняется. Плотность упругой энергии мембраны полагается равной

$$W = W(\varphi), \quad W = \left(\lambda^2 + \mu^2 + \frac{1}{\lambda^2 \mu^2} - 3 \right) + \alpha \left(\lambda^2 \mu^2 + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2} - 3 \right),$$

что соответствует материалу Муни. Здесь функции $\varphi \mapsto \lambda(\varphi)$, $\varphi \mapsto \mu(\varphi)$ являются главными растяжениями, а α — материальной константой. Независимая переменная φ соответствует азимутальному углу. Результаты напряжений представлены выражениями (соответственно, радиальная и окружная компоненты напряжений)

$$T_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu} - \frac{1}{\lambda^3 \mu^3} \right) (1 + \alpha \mu^2), \quad T_2 = \left(\frac{\mu}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^3 \mu^3} \right) (1 + \alpha \lambda^2).$$

Замечание 1. Функции $\varphi \mapsto \lambda(\varphi)$ и $\varphi \mapsto \mu(\varphi)$ являются решениями системы двух нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \lambda' &= \frac{\lambda^2(\mu^2 - \lambda^2)(\lambda^2 \mu^2 + \alpha) + \lambda(\lambda - \mu \cos \varphi)(\lambda^4 \mu^2 - 3 - \alpha \mu^2(\lambda^4 \mu^2 + 1))}{\mu \sin \varphi (\lambda^4 \mu^2 + 3)(1 + \alpha \mu^2)}, \\ \mu' &= \frac{\lambda - \mu \cos \varphi}{\sin \varphi} \end{aligned}$$

с начальными условиями $\lambda(0) = \lambda_0$ и $\mu(0) = \mu_0$.

2. Синтезирование неевклидовой отсчетной формы

2.1. Гипотеза о локальной разгрузке

Натуральное состояние. Перейдем теперь к реализации идеи неевклидовой отсчетной формы. Для этого, в первую очередь, следует уточнить, что понимается под представительным объемом и его натуральным состоянием.

Пусть \mathcal{S}_R — некоторая форма n -мерного тела \mathfrak{B} ($n = 1, 2, 3$), наблюдаемая в эксперименте. Ее точки будем обозначать прописными символами X, Y и т. д. Будем полагать, что при $n < 3$ на форме \mathcal{S}_R задана параметризация (например, для формы, топологически эквивалентной сфере, такая параметризация может быть задана с помощью азимутального и полярного углов). Предполагается, что материал тела простой и гиперупругий [44], т. е. отклик тела на деформацию $\gamma: \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}$ в точке $X \in \mathcal{S}_R$ определяется значением плотности упругой энергии

$$w = W(X, \mathbf{F}_X; \mathbf{G}_R, \mathbf{G}). \quad (2.1)$$

Здесь $F_X = T_X \gamma \in \text{Hom}(T_X \mathcal{S}_R; T_{\gamma(X)} \mathcal{S})$ — касательное отображение [40, с. 28], которое, в соответствии с классическим аналогом, будем называть градиентом деформации⁵ в точке X , а G_R и G — метрические тензоры на формах \mathcal{S}_R и \mathcal{S} , индуцированные метрикой физического пространства g на них. Представление (2.1) плотности упругой энергии является наиболее общим и предполагает независимую параметризацию отсчетной и актуальной форм. Возможны следующие частные случаи. 1. Параметризации воспроизводят координаты физического пространства. В этом случае $G_R = G = g$, а координатное представление отображения $T\gamma$ в точке задается некоторой числовой матрицей общего вида. 2. Параметризации согласованы таким образом, что координатное представление $T\gamma$ в любой точке совпадает с единичной матрицей. В последнем случае локальные базисы координатных представлений называются векторными базисами [50]. В дальнейшем зависимости от G_R и G не будут указаны явно.

Соотношение (2.1) задает плотность упругой энергии, т. е. энергию, отнесенную к единице объема формы \mathcal{S}_R . Однако само понятие единицы объема требует уточнений. Несмотря на то что с точки зрения математического формализма здесь можно говорить об инфинитезимальном элементе объема, физически мы не можем допустить возможность выбора сколь угодно малого элемента. Для выхода из этого противоречия мы принимаем гипотезу локального термостатического состояния [51], согласно которой представительный объем достаточно мал для того, чтобы считать его инфинитезимальным с точки зрения макроскопического описания, но в то же время достаточно велик для того, чтобы полагать его находящимся в состоянии термостатического равновесия. Принимая эту гипотезу, мы можем локально интерпретировать деформацию как линейное преобразование между соответствующими касательными слоями отсчетной и актуальной форм, то есть как касательное отображение $T_X \gamma$.

Под натуральным состоянием понимается некоторое привилегированное физическое состояние представительного объема. Свободное от напряжений состояние, когда тензор напряжений Коши равен нулю в рассматриваемой точке, может служить примером. С формальной точки зрения предполагается, что натуральное состояние характеризуется некоторым тензором S второго ранга.

Скажем, что деформация $\gamma^{(X_0)} : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}^{(X_0)}$ преобразует представительный объем, окружающий точку $X_0 \in \mathcal{S}_R$, в натуральное (или *единообразное*) состояние, если

$$\left. \frac{\partial W(X, F)}{\partial F} \right|_{F=T_Y \gamma^{(X_0)}|_{Y=X_0}} = S.$$

Используя уточненное понятие натурального состояния, теперь можно сформулировать гипотезу, на которой основана классическая механика деформируемого твердого тела: существует деформация $\gamma_0 : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}_0$ такая, что представительный объем, окружающий каждую точку $X \in \mathcal{S}_R$, преобразуется в натуральное состояние, представленное тензором S (одного для всех точек), то есть,

$$\forall X \in \mathcal{S}_R : \left. \frac{\partial W(X, F)}{\partial F} \right|_{F=T_X \gamma_0} = S.$$

Таким образом, евклидова форма \mathcal{S}_0 состоит из представительных объемов, каждый из которых находится в натуральном состоянии. Это — глобальная натуральная форма.

Формулировка гипотезы о локальной разгрузке. Заменяем классическую гипотезу о существовании глобального натурального состояния гипотезой, которую будем называть *гипотезой локальной разгрузки* [24; 26]. Пусть S — тензор второго ранга, определяющий натуральное состояние представительного объема. Будем полагать, что существует семейство $\{\gamma^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$ деформаций $\gamma^{(X)} : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}^{(X)}$, каждая из которых, $\gamma^{(X)}$, преобразует представительный объем, окружающий точку X , в натуральное состояние, то есть

$$\forall X \in \mathcal{S}_R : \left. \frac{\partial W(X, F)}{\partial F} \right|_{F=T_Y \gamma^{(X)}|_{Y=X}} = S.$$

С экспериментальной точки зрения принятая гипотеза представляется вполне естественной: можно осуществить деформирование тестового образца таким образом, чтобы инфинитезимальная окрестность любой его фиксированной точки оказалась свободной от напряжений. Разумеется, для каждой точки нужно подобрать свою деформацию.

Гипотеза локальной разгрузки иллюстрируется на рис. 2.1 для некоторых трех точек X_1, X_2 и X_3 из формы \mathcal{S}_R . Предполагается, что тело является трехмерным многообразием. Ячейки каждого региона изображают представительные объемы; более темные соответствуют представительным объемам в натуральном состоянии. Отображения $\varkappa^{(X_i)} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}^{(X_i)}$, и $\gamma^{(X_i)} : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}^{(X_i)}$, $i = 1, 2, 3$, являются, соответственно, конфигурациями и деформациями.

⁵Если $n = 3$, то в силу естественных отождествлений $T_X \mathcal{S}_R \cong \mathcal{V}$ и $T_{\gamma(X)} \mathcal{S} \cong \mathcal{V}$ можно рассматривать F_X как линейное отображение $F_X \in \text{End}(\mathcal{V})$, соответствующее классическому градиенту деформации, то есть $F_X = \gamma'(X)$.

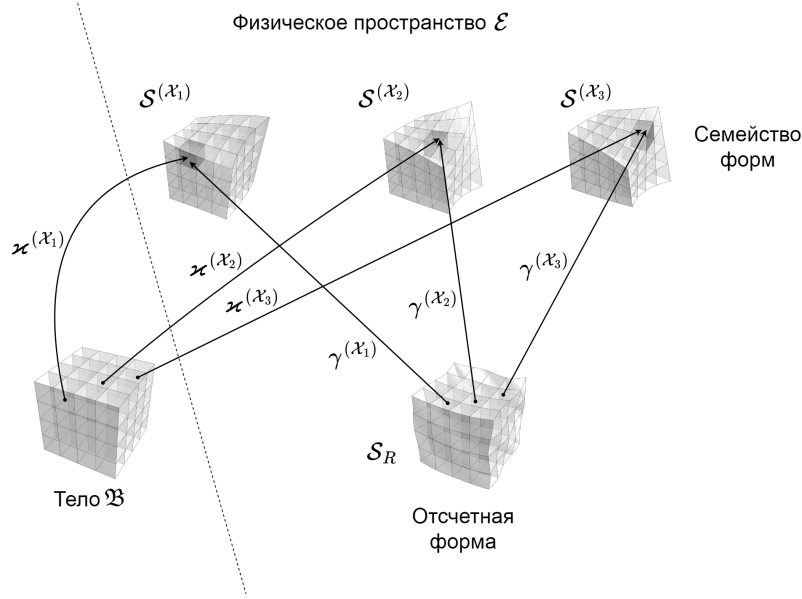


Рис. 2.1. Семейство локально-натуральных форм
 Fig. 2.1. Family of locally natural shapes

Для каждой точки $X \in \mathcal{S}_R$ деформация $\boldsymbol{\gamma}^{(X)} : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}^{(X)}$ определяет касательное отображение $\boldsymbol{F}^{(X)} = T\boldsymbol{\gamma}^{(X)} : T\mathcal{S}_R \rightarrow T\mathcal{S}^{(X)}$. Если $Y \in \mathcal{S}_R$ — некоторая точка, которая может не совпадать с X , то обратимое линейное отображение

$$\boldsymbol{F}^{(X)}|_Y = T_Y\boldsymbol{\gamma}^{(X)} \in \text{Hom}(T_Y\mathcal{S}_R; T_{\boldsymbol{\gamma}^{(X)}(Y)}\mathcal{S}^{(X)})$$

преобразует представительный объем, окружающий эту точку, в некоторое состояние. Заметим, что последнее не обязательно является натуральным. Вместе с тем, если $Y = X$, то отображение $\boldsymbol{F}^{(X)}|_{Y=X}$ преобразует представительный объем $T_X\mathcal{S}_R$ в соответствующий объем, содержащийся в форме $\mathcal{S}^{(X)}$, который на этот раз будет в натуральном состоянии.

Поле локальных деформаций. Предположим, что тело \mathfrak{B} материально единообразно, то есть состоит из представительных объемов с одинаковыми физическими свойствами [13]. Последнее означает, что, будучи извлеченным из состава тела и приведенным в натуральное состояние, каждый такой представительный объем даст один и тот же отклик на одну и ту же деформацию. Общий для всех образ представительного объема в натуральном состоянии, следуя [18], назовем *архетипом*.

Для математической формализации архетипа ассоциируем с ним фиксированное семейство $(\boldsymbol{c}_A)_{A=1}^n$ попарно ортогональных векторов единичной длины. Здесь $n = \dim \mathfrak{B}$. С физической точки зрения элементы этого семейства определяют кристаллографические направления решетки идеального кристалла. Тогда прообраз семейства $(\boldsymbol{c}_A)_{A=1}^n$ в произвольно выделенном представительном объеме, находящемся в составе наблюдаемой формы \mathcal{S}_R , будет некоторым семейством $(\boldsymbol{z}_A|_X)_{A=1}^n$, определяющим направления искаженной решетки кристалла. Здесь X — метка рассматриваемого представительного объема.

Преобразование $(\boldsymbol{z}_A|_X)_{A=1}^n \mapsto (\boldsymbol{c}_A)_{A=1}^n$ определяет деформацию представительного объема, переводящую его из текущего состояния в натуральное. Поскольку каждое из семейств $(\boldsymbol{c}_A)_{A=1}^n, (\boldsymbol{z}_A|_X)_{A=1}^n$ находится в векторном пространстве \mathcal{V} , то эту деформацию можно распространить на однозначно определенное линейное отображение \boldsymbol{H}_X , переводящее линейную оболочку, порождаемую репером $(\boldsymbol{z}_A|_X)_{A=1}^n$, в линейную оболочку, порождаемую репером $(\boldsymbol{c}_A)_{A=1}^n$. Первая линейная оболочка есть всего лишь касательное пространство $T_X\mathcal{S}_R$. Для второй линейной оболочки будем использовать обозначение \mathcal{U} . Если через \boldsymbol{g}_U обозначить сужение евклидовой метрики \boldsymbol{g} на \mathcal{U} , то окончательно под архетипом будем понимать евклидово векторное пространство $(\mathcal{U}, \boldsymbol{g}_U)$, где

$$\mathcal{U} \subset \mathcal{V} \text{ и } \boldsymbol{g}_U := \boldsymbol{g}|_{\mathcal{U}}.$$

Соответствующее линейное отображение $\boldsymbol{H}_X \in \text{Hom}(T_X\mathcal{S}_R; \mathcal{U})$, в свою очередь, будем называть *локальной деформацией*.

Гипотезу локальной разгрузки в рамках свойства материального единообразия следует дополнить предположением, что для каждой точки $X \in \mathcal{S}_R$ евклидово пространство $(T_{\boldsymbol{\gamma}^{(X)}(X)}\mathcal{S}^{(X)}, \boldsymbol{g}|_{\mathcal{S}^{(X)}})$ *канониче-*

ски изометрично⁶ пространству $(\mathcal{U}, g_{\mathcal{U}})$. Производя, в соответствии с этим предположением, для каждой точки $X \in \mathcal{S}_R$ отождествление $T_{\gamma(X)(X)}\mathcal{S}^{(X)} \equiv \mathcal{U}$, приходим к линейному отображению

$$\mathbf{H}_X := \mathbf{F}^{(X)}|_{Y=X} \in \text{Hom}(T_X\mathcal{S}_R; \mathcal{U}), \quad (2.2)$$

которое представляет локальную деформацию. По построению, обратимое линейное отображение \mathbf{H}_X преобразует представительный объем, окружающий точку X , в натуральное состояние.

В свою очередь, по отображениям \mathbf{H}_X синтезируем глобальное поле следующим образом. Совместно с касательным расслоением $T\mathcal{S}_R$ определим тривиальное векторное расслоение над \mathcal{S}_R , типовым слоем которого будет \mathcal{U} , и обозначим это расслоение символом $T(\mathcal{S}_R, \mathcal{U})$. Таким образом, по построению $T(\mathcal{S}_R, \mathcal{U}) := \mathcal{S}_R \times \mathcal{U}$. Теперь определим новое отображение:

$$\mathbf{H} : T\mathcal{S}_R \rightarrow T(\mathcal{S}_R, \mathcal{U}), \quad \mathbf{H}(X, v) := (X, \mathbf{H}_X v). \quad (2.3)$$

Предполагается, что полученное отображение (2.3) гладко как отображение между многообразиями. В таком случае, согласно положениям общей теории векторных расслоений, оно является гомоморфизмом векторных расслоений [39, с. 261] над \mathcal{S}_R . Соответствующее отображение между базами этих расслоений является тождественным отображением. Будем называть отображение \mathbf{H} *полем локальных деформаций* [26].

Если семейство $\{\gamma^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$ можно выбрать таким образом, что оно состоит из одного элемента $\gamma_0 : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}_0$, то образ $\gamma_0(\mathcal{S}_R)$ является глобальной натуральной формой тела \mathfrak{B} . В этом случае отображение \mathbf{H}_X может быть отождествлено с касательным отображением $T_X\gamma_0$ для каждой точки $X \in \mathcal{S}_R$ и локальные деформации называются *совместными*. В противном случае, когда семейство деформаций не сводится к одному элементу, локальные деформации называются *несовместными*, то есть линейное отображение \mathbf{H}_X не может быть выражено как касательное отображение к некоторой деформации, единой для всех X [13].

Замечание 2. Тот факт, что расслоение $T(\mathcal{S}_R, \mathcal{U})$ было выбрано тривиальным (т. е. тотальное пространство — цилиндр), а отображение \mathbf{H} было определено формулой (2.3), несколько не умаляет общность дальнейших рассуждений, поскольку в них фигурируют лишь локальные деформации в точке.

Представления поля локальных деформаций. Поле локальных деформаций \mathbf{H} имеет ряд альтернативных представлений. Действительно, во-первых, отображение \mathbf{H} , будучи синтезированным по линейным отображениям $\mathbf{H}_X \in \text{Hom}(T_X\mathcal{S}_R; \mathcal{U})$, индуцирует семейство $\{\mathbf{H}_X\}_{X \in \mathcal{S}_R}$ линейных трансформаций. Предположим, в частности, что $n = 3$. Тогда $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ и $T_X\mathcal{S}_R \cong \mathcal{V}$ (канонический изоморфизм). По этой причине $\mathbf{H}_X \in \text{End}(\mathcal{V})$, и семейство $\{\mathbf{H}_X\}_{X \in \mathcal{S}_R}$, в свою очередь, сводится к гладкому полю $\mathbf{H} : \mathcal{S}_R \rightarrow \text{End}(\mathcal{V})$ линейных преобразований. В таком виде \mathbf{H} используется в классической теории дефектов [52].

Пусть теперь $(X^A)_{A=1}^n$ — локальные координаты на многообразии \mathcal{S}_R и пусть $(e_A)_{A=1}^n$ — некоторый базис \mathcal{U} . Тогда линейное отображение \mathbf{H}_X имеет следующее диадное представление:

$$\mathbf{H}_X = H^A_B e_A \otimes dX^B|_X, \quad (2.4)$$

где $(dX^A)_{A=1}^n$ — поле координатных кореперов. Последнее представление может быть записано в следующей краткой форме:

$$\mathbf{H}_X = e_A \otimes H^A_X,$$

в которой

$$H^A_X = H^A_B dX^B|_X, \quad A = 1, \dots, n,$$

— совокупность 1-форм. Это означает, что вместо отображения (2.3) можно рассматривать n гладких полей 1-форм H^A , $A = 1, \dots, n$. Если базис $(e_A)_{A=1}^n$ фиксирован (например, соответствует положению кристаллографических осей в натуральном состоянии), то эти поля позволяют однозначно восстановить отображение \mathbf{H} .

Замечание об условиях совместности. С использованием дифференциальных форм совместность локальных деформаций сводится к следующему условию: должны существовать n гладких скалярных функций $\gamma^A : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathbb{R}$, $A = 1, \dots, n$, таких, что

$$H^A = d\gamma^A, \quad A = 1, \dots, n.$$

Здесь d — внешний дифференциал [39, с. 365]. Таким образом, необходимым (а в случае, когда форма \mathcal{S}_R односвязна) и достаточным условием совместности деформаций являются равенства

$$dH^A = 0, \quad A = 1, \dots, n, \quad (2.5)$$

⁶То есть между этими пространствами существует биекция, не зависящая ни от какого выбора базиса, которая является изоморфизмом векторных пространств, сохраняющим скалярное произведение.

которым, в случае $n = 3$, соответствует классическое условие

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{0}.$$

В общем случае, когда отсчетная форма неодносвязна (например, является полым шаром), достаточные условия могут быть также сформулированы, но равенств (2.5) уже недостаточно. Необходимо привлечь методы алгебраической топологии, что сделано, например, в работе [53].

2.2. Материальная метрика и связность

Стирание евклидовой геометрии из формы. Пусть поле (2.3) локальных деформаций известно. Тогда вместо использования континуального семейства $\{\mathcal{S}^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$ локально единообразных форм можно синтезировать новую глобально единообразную форму с неевклидовой геометрией. Для этого будем исходить из формы \mathcal{S}_R и первым шагом «сотрем» с нее геометрию. Полученное многообразие будет обозначаться через M_R , то есть $M_R = (\mathcal{S}_R, \mathcal{T}_E|_{\mathcal{S}_R}, \mathcal{D}_E|_{\mathcal{S}_R})$. В таком случае точки формы \mathcal{S}_R становятся всего лишь точками многообразия и по этой причине, чтобы отличать многообразие M_R от геометрического пространства \mathcal{S}_R , будем обозначать точки M_R символами вида X, Y и Z . Отличие структуры \mathcal{S}_R от M_R можно подчеркнуть в явном виде, определив отображение (каноническую инъекцию) $\iota_{M_R} : M_R \hookrightarrow \mathcal{E}$, $X \mapsto X$. Здесь X обозначает точку из M_R , а символ X , обозначающий элемент \mathcal{S}_R , представляет точно такую же точку, но рассматриваемую в пространстве \mathcal{E} .

После «стирания» геометрии с формы \mathcal{S}_R касательные пространства к ней также изменяют свои атрибуты. Действительно, если $T_X \mathcal{S}_R$ — касательное пространство к \mathcal{S}_R , то оно автоматически снабжается скалярным произведением, индуцированным из евклидова векторного пространства \mathcal{V} , и, таким образом, рассматривается как подпространство последнего. Вместе с тем касательное пространство к M_R не имеет никакой дополнительной структуры. Чтобы подчеркнуть это, тензорные поля на M_R обозначаются как P, Q , и R . В частности, поле (2.3) обозначается символом H . В явном виде отображение $H : TM_R \rightarrow T(\mathcal{S}_R, \mathcal{U})$ определяется равенством

$$H_X = \mathbf{H}_X \circ p_X,$$

где $X = \iota_{M_R}(X)$, а $p_X : T_X M_R \rightarrow \mathcal{V}$ изоморфизм на свой образ, такой, что

$$u = u^A \partial_A|_X \mapsto \mathbf{u} = p_X(u) = u^A e_A|_X.$$

Таким образом, H играет точно такую же роль, как его евклидов аналог, поле локальных деформаций \mathbf{H} , но определен на многообразии, очищенном от какой-либо геометрии.

Замечание 3. *С общетеоретической точки зрения нет необходимости извлекать подлежащее многообразие из-под некоторой формы, поскольку общее для всех форм многообразие \mathfrak{B} было определено заранее. Вместе с тем, особенно в частных задачах, можно явно описать лишь формы, поскольку только они наблюдаемы. Процедура «стирания» геометрии с формы есть фактически способ восстановить многообразие \mathfrak{B} и затем построить на нем геометрию. Таким образом, в действительности речь по-прежнему идет о теле.*

Материальная метрика. Все, что имеется на данный момент, — поле H локальных деформаций. Оно трансформирует каждый представительный объем в натуральное состояние, где измерения проводятся посредством метрического тензора \mathbf{g}_U . Построим обратный образ этой метрики на многообразии M_R и, таким образом, снабдим инфинитезимальные волокна в M_R мерами, которые они имеют в натуральном состоянии. В явном виде определим тензорное поле $G \in \operatorname{Sec}(T^*M_R \otimes T^*M_R)$ равенством [13]:

$$\forall X \in M_R \forall u, v \in T_X M_R : G_X(u, v) := \mathbf{g}_U(H_X[u], H_X[v]). \quad (2.6)$$

Будем называть риманову метрику G *материальной метрикой*. В координатном репере, компоненты G имеют вид $G_{AB} = g_{CD} H^C_A H^D_B$, где H^A_B — коэффициенты разложения (2.4), имеющего в нынешних обозначениях вид $H_X = H^A_B e_A \otimes dx^B|_X$, а $g_{CD} = e_C \cdot e_D$ — компоненты метрики \mathbf{g}_U .

К определению (2.6) материальной метрики можно подойти иным способом [23]. Рассмотрим семейство $\{\gamma^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$. По нему можно определить новое семейство $\{\gamma^{(X)}\}_{X \in M_R}$, где отображения $\gamma^{(X)} : M_R \rightarrow \mathcal{E}$ связаны с деформациями $\gamma^{(X)} : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{E}$ соотношениями $\gamma^{(X)} = \gamma^{(X)} \circ \iota_{M_R; \mathcal{S}_R}$. Здесь $\iota_{M_R; \mathcal{S}_R} : M_R \hookrightarrow \mathcal{S}_R$ — каноническая инъекция, которая отображает точку X в ту же самую точку X , но в пространстве с геометрией.

Каждое отображение $\gamma^{(X)}$ определяет метрику $G^{(X)}$ как обратный образ, $G^{(X)} := (\gamma^{(X)})^* \mathbf{g}$:

$$\forall Y \in M_R \forall u, v \in T_Y M_R : G^{(X)}|_Y(u, v) := T_Y \gamma^{(X)}[u] \cdot T_Y \gamma^{(X)}[v].$$

Тензорное поле $G^{(X)}$ задает метрическую структуру на M_R , индуцированную из физического пространства. Теперь пусть G — тензорное поле второго ранга, такое, что $G : X \mapsto G^{(X)}|_X$. Это поле и есть в точности (2.6).

Таким образом, материальная метрика может быть синтезирована по семейству $\{G^{(x)}\}_{x \in M_R}$. Образно говоря, метрическая структура над M_R может быть получена путем перебора элементов семейства $\{S^{(x)}\}_{x \in S_R}$ и извлечения соответствующей метрической структуры (скалярного произведения) из каждого. Иными словами, различные метрические структуры синтезируются в одну глобальную, неевклидову, структуру.

Материальная связность. Синтезировав материальную метрику, приходим к структуре (M_R, G) риманова многообразия, которое почти является искомым глобально единообразной формой тела. Чтобы завершить построение этой формы, осталось добавить еще одну составляющую — аффинную связность. Действительно, чтобы записать уравнения баланса на M_R , равно как и отразить конкретную физическую природу несовместности, необходимо установить некоторое правило параллельного перенесения, которое как раз и определяется аффинной связностью. По определению, аффинная связность — это отображение $\nabla : \text{Vec}(M_R) \times \text{Vec}(M_R) \rightarrow \text{Vec}(M_R)$, $(u, v) \mapsto \nabla_u v$, которое удовлетворяет следующим аксиомам [54, 55]:

- (a) $\forall u, v, w \in \text{Vec}(M_R) : \nabla_{u+v} w = \nabla_u w + \nabla_v w$;
- (b) $\forall u, v \in \text{Vec}(M_R) \forall f \in C^\infty(M_R) : \nabla_{fu} v = f \nabla_u v$;
- (c) $\forall u, v, w \in \text{Vec}(M_R) : \nabla_u (v + w) = \nabla_u v + \nabla_u w$;
- (d) $\forall u, v \in \text{Vec}(M_R) \forall f \in C^\infty(M_R) : \nabla_u (fv) = f \nabla_u v + (uf)v$.

Здесь символ uf обозначает действие векторного поля u , рассматриваемого как дифференцирование, на скалярное поле f .

Пусть $(e_A)_{A=1}^n$ — локальный репер касательного расслоения TM_R , то есть совокупность гладких векторных полей $e_A : U \rightarrow TM_R$, $A = 1, \dots, n$, заданных на открытом множестве $U \subset M_R$, такая, что в каждой точке $X \in U$ упорядоченный набор $(e_A|_X)_{A=1}^n$ является базисом касательного пространства $T_X M_R$. Для любых $A, B = 1, \dots, n$, ковариантная производная $\nabla_{e_A} e_B$ является векторным полем, заданным на U . По этой причине ее тоже можно разложить по локальному реперу $(e_A)_{A=1}^n$: $\nabla_{e_A} e_B = \Gamma^C_{AB} e_C$. Коэффициенты разложения — n^3 скалярных полей $\Gamma^C_{AB} : U \rightarrow \mathbb{R}$ — называются коэффициентами связности. Если они известны, то для произвольных векторных полей $u = u^A e_A$ и $v = v^B e_B$, используя аксиомы связности, можно получить выражение

$$\nabla_u v = u^A (e_A(v^C) + v^B \Gamma^C_{AB}) e_C$$

для ковариантной производной.

Для дальнейших рассуждений необходимо иметь общий закон преобразования коэффициентов связности. Пусть $(e_A)_{A=1}^n$ и $(\vartheta^A)_{A=1}^n$ — локальный репер и дуальный к нему корепер, определенные на открытом множестве $U \subset M_R$, которое одновременно является координатной областью некоторой карты. Предположим, что на том же множестве U определены другие локальный репер $(\tilde{e}_A)_{A=1}^n$ и корепер $(\tilde{\vartheta}^A)_{A=1}^n$, связанные с предыдущими репером и корепером гладким полем невырожденных $n \times n$ -матриц $\Omega = [\Omega^A_B] : U \rightarrow \text{GL}(n; \mathbb{R})$:

$$\tilde{e}_A = \Omega^B_A e_B, \quad \tilde{\vartheta}^A = \tilde{U}^A_B \vartheta^B,$$

где $\tilde{U} = [\tilde{U}^A_B] = \Omega^{-1}$. Обозначим соответствующие коэффициенты связности через Γ^C_{AB} и $\tilde{\Gamma}^C_{AB}$, то есть

$$\nabla_{e_A} e_B = \Gamma^C_{AB} e_C, \quad \text{и} \quad \nabla_{\tilde{e}_A} \tilde{e}_B = \tilde{\Gamma}^C_{AB} \tilde{e}_C.$$

Если $(\partial_{X^A})_{A=1}^n$ — координатный репер на U , то $e_A = \Psi^B_A \partial_{X^B}$, где $\Psi = [\Psi^A_B] : U \rightarrow \text{GL}(n; \mathbb{R})$ — однозначно определенное гладкое поле $n \times n$ матриц. Тогда справедливо следующее соотношение [23]:

$$\tilde{\Gamma}^A_{BC} = \Gamma^P_{QR} \tilde{U}^A_P \Omega^Q_B \Omega^R_C + \Psi^R_Q \tilde{U}^A_P \Omega^Q_B \partial_{X^R} \Omega^P_C. \quad (2.7)$$

Формула (2.7) определяет закон преобразования коэффициентов связности в том случае, когда неголономный (т. е. некоординатный) репер заменяется на другой неголономный репер. Если же исходный репер $(e_A)_{A=1}^n$ является голономным, то есть $\Psi^A_B = \delta^A_B$, то соотношение (2.7) упрощается:

$$\tilde{\Gamma}^A_{BC} = \Gamma^P_{QR} \tilde{U}^A_P \Omega^Q_B \Omega^R_C + \tilde{U}^A_P \Omega^Q_B \partial_{X^Q} \Omega^P_C. \quad (2.8)$$

Наконец, когда оба локальных репера $(e_A)_{A=1}^n$ и $(\tilde{e}_A)_{A=1}^n$ голономны, то тогда речь идет о преобразовании координат. В таком случае $\Omega^A_B = \frac{\partial X^A}{\partial \tilde{X}^B}$, где координаты $(X^A)_{A=1}^n$ порождают репер $(e_A)_{A=1}^n$, а координаты $(\tilde{X}^A)_{A=1}^n$ порождают репер $(\tilde{e}_A)_{A=1}^n$. Выражение (2.8) сводится к соотношению

$$\tilde{\Gamma}^A_{BC} = \frac{\partial \tilde{X}^A}{\partial X^P} \frac{\partial X^Q}{\partial \tilde{X}^B} \frac{\partial X^R}{\partial \tilde{X}^C} \Gamma^P_{QR} + \frac{\partial \tilde{X}^A}{\partial X^P} \frac{\partial^2 X^P}{\partial \tilde{X}^B \partial \tilde{X}^C}. \quad (2.9)$$

Даже при $n = 3$ коэффициенты связности Γ^A_{BC} , равные нулю в декартовых координатах, могут быть отличны от нуля в криволинейных координатах. Вместе с тем в обоих случаях связность одна и та же — евклидова. По этой причине коэффициенты связности не подходят в качестве индикаторов неевклидовой природы пространства. Для этой цели используются тензорные поля кручения $\mathfrak{T} : \text{Vec}(M_R) \times \text{Vec}(M_R) \rightarrow \text{Vec}(M_R)$, кривизны $\mathfrak{R} : \text{Vec}(M_R) \times \text{Vec}(M_R) \times \text{Vec}(M_R) \rightarrow \text{Vec}(M_R)$ и неметричности $\mathfrak{Q} : \text{Vec}(M_R) \times \text{Vec}(M_R) \times \text{Vec}(M_R) \rightarrow C^\infty(M_R)$, определяемые, соответственно, формулами [48; 54; 56]

$$\mathfrak{T}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{u} - [\mathbf{u}, \mathbf{v}]; \quad (2.10)$$

$$\mathfrak{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{w} := [\nabla_{\mathbf{u}}, \nabla_{\mathbf{v}}]\mathbf{w} - \nabla_{[\mathbf{u}, \mathbf{v}]}\mathbf{w}; \quad (2.11)$$

$$\mathfrak{Q}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) := \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mathbf{g}(\mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{w}) - \mathbf{u}[\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w})]. \quad (2.12)$$

Здесь⁷ $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ и $[\nabla_{\mathbf{u}}, \nabla_{\mathbf{v}}]$ — коммутаторы,

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \mathbf{u} \circ \mathbf{v} - \mathbf{v} \circ \mathbf{u}, \quad [\nabla_{\mathbf{u}}, \nabla_{\mathbf{v}}] = \nabla_{\mathbf{u}} \circ \nabla_{\mathbf{v}} - \nabla_{\mathbf{v}} \circ \nabla_{\mathbf{u}},$$

а $\mathbf{u}[\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w})]$ есть действие векторного поля \mathbf{u} на скалярное поле $\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$. Евклидова геометрия характеризуется следующими значениями: $\mathfrak{T} = 0$, $\mathfrak{R} = 0$ и $\mathfrak{Q} = 0$.

Таким образом, приходим к структуре $\mathcal{S}_R = (M_R, \mathbf{G}, \nabla)$, которая является неевклидовой глобально единообразной формой. Заметим, что в общем случае $\mathcal{S}_R \neq \mathcal{S}_R$, поскольку $\mathbf{g}|_{\mathcal{S}_R} \neq \mathbf{G}$ и $\nabla|_{\mathcal{S}_R} \neq \nabla$.

Обсудим более детально связь между неевклидовой формой \mathcal{S}_R и непрерывным семейством $\{\mathcal{S}^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$ локально единообразных форм, каждая из которых, $\mathcal{S}^{(X)}$, является образом «разгрузочной» деформации $\gamma^{(X)}$. Последнему семейству отвечает поле \mathbf{H} локальных деформаций, значение которого в каждой точке $X \in \mathcal{S}_R$ является линейным отображением \mathbf{H}_X , преобразующим представительный объем, окружающий точку X , в единообразное состояние.

С геометрической точки зрения несовместность локальных деформаций означает, что связи, наложенные евклидовой геометрией на формы тела, являются слишком обременительными. В этом месте представляется удобным апеллировать к следующей образной интерпретации. Представительные объемы в единообразном состоянии — «элементарные параллелепипеды», как их часто изображают в монографиях по теории упругости, — являются частями различных представителей $\mathcal{S}^{(X)}$ семейства форм. Мысленно отделим каждый такой параллелепипед от остальной формы, что приводит к континуальной совокупности представительных объемов. Следуя Можену, будем называть такую совокупность «кристаллической отсчетной» [15]. Элементы кристаллической отсчетной геометрически несовместны: попытка собрать из них непрерывное тело приводит к несогласованным индивидуальным искажениям, и, таким образом, снова получается некоторая неединообразная евклидова форма. Эту проблему можно решить, лишь освободив связи, наложенные евклидовой структурой на формы. Тогда кристаллическая отсчетная в своем объединении (без предварительных искажений) даст непрерывную область, вложенную в пространство с более общей геометрией, чем евклидова. Возвращаясь к семейству форм, получаем, что в этом случае локальная деформация может быть представлена в виде градиента вложения неевклидовой формы в евклидово физическое пространство.

Замечание 4. *Следует отметить, что при работе с глобальной неевклидовой формой неявно используется исходное семейство локально единообразных форм $\{\mathcal{S}^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$. Действительно, например, при вычислении отклика в точке неевклидовой формы этот отклик на самом деле определяется относительно соответствующей формы из локально единообразного семейства форм. Далее, значения материальной метрики и связности также определяются по значениям соответствующих полей на определенной форме из семейства $\{\mathcal{S}^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$. Все, что дает неевклидова форма, — это возможность представить семейство форм в виде единой области.*

2.3. Частные случаи материальной связности

Связность Леви-Чивита. Рассмотрим примеры материальных связностей. Первый пример — связность Леви-Чивита ∇^L [57], индуцируемая на многообразии M_R материальной метрикой (2.6). В этом случае коэффициенты связности в координатном репере $(\partial_A)_{i=1}^n$ представлены выражениями

$$\Gamma^C_{AB} = \frac{\mathbf{G}^{CD}}{2} (\partial_A \mathbf{G}_{DB} + \partial_B \mathbf{G}_{AD} - \partial_D \mathbf{G}_{AB}), \quad (2.13)$$

в которых $[\mathbf{G}^{AB}] = [\mathbf{G}_{AB}]^{-1}$ — матрица, обратная к матрице метрических коэффициентов $\mathbf{G}_{AB} = \mathbf{G}(\partial_A, \partial_B)$.

Связность ∇^L наделяет многообразие M_R геометрией, которая полностью характеризуется тензором кривизны Римана \mathfrak{R} (2.11), поскольку кручение (2.10) и неметричность (2.12) связности Леви-Чивита

⁷При интерпретации векторных полей как дифференцирований алгебры $C^\infty(M)$ гладких функций.

равны нулю. Компоненты \mathfrak{R} в координатном репере связаны с коэффициентами связности формулой

$$\mathfrak{R}^D_{ABC} = \partial_A \Gamma^D_{BC} - \partial_B \Gamma^D_{AC} + \Gamma^E_{BC} \Gamma^D_{AE} - \Gamma^E_{AC} \Gamma^D_{BE}. \quad (2.14)$$

Тензорное поле \mathfrak{R} , в свою очередь, определяет тензор кривизны Риччи $\text{Ric} \in \text{Sec}(T^*M_R \otimes T^*M_R)$, компоненты которого в координатном репере получаются при помощи свертки компонент кривизны Римана:

$$\text{Ric}_{AB} = \mathfrak{R}^C_{ACB}.$$

Являясь тензорным полем второго ранга на n -мерном многообразии, тензор Ric имеет в качестве одного из главных инвариантов след

$$\text{Scal} = G^{AB} \text{Ric}_{AB},$$

называемый скалярной кривизной.

Хотя в общем случае определение главных инвариантов тензора четвертого ранга является довольно сложной задачей, для малых размерностей, то есть, когда $n \leq 3$, можно полностью охарактеризовать геометрию отсчетной формы либо с помощью тензора Риччи ($n = 3$), либо посредством скалярной кривизны ($n = 2$). Действительно, определим следующую операцию, называемую произведением Кулкарни-Номидзу [48, с. 213]:

$$h \otimes k(w, x, y, z) := h(w, z)k(x, y) + h(x, y)k(w, z) - h(w, y)k(x, z) - h(x, z)k(w, y),$$

действующую над симметричными тензорами $h, k \in \text{Sec}(T^*M_R \otimes T^*M_R)$. Тогда для $n = 3$ будем иметь⁸ (см. [48, следствие 7.26])

$$\mathfrak{R}^b = \text{Ric} \otimes G - \frac{\text{Scal}}{4} G \otimes G,$$

а для $n = 2$, согласно [48, следствие 7.27], —

$$\mathfrak{R}^b = \frac{\text{Scal}}{4} G \otimes G.$$

Заметим, что для $n = 1$ справедливо равенство $\mathfrak{R}_{111}^1 = 0$.

Таким образом, если $n = 3$, то $\mathfrak{R} = 0$ тогда и только тогда, когда $\text{Ric} = 0$, а если $n = 2$, то $\mathfrak{R} = 0$ тогда и только тогда, когда $\text{Scal} = 0$. Это означает, что в соответствии с размерностью многообразия кривизна Риччи или скалярная кривизна полностью характеризуют несовместность локальных деформаций. Следует отметить, что в одномерном случае локальные деформации всегда совместны, поскольку кривизна всегда равна нулю.

Связность Вайценбока. Поскольку для каждой точки $X \in M_R$ линейное отображение $H_X : T_X M_R \rightarrow \mathcal{U}$ обратимо, можно определить отображение $H^{-1} : T(\mathcal{S}_R, \mathcal{U}) \rightarrow T M_R$, синтезированное из обратных отображений $H_X^{-1} : \mathcal{U} \rightarrow T_X M_R$. Далее, напомним, что архетип \mathcal{U} снабжен скалярным произведением, индуцированным евклидовой метрикой. Тогда можно выбрать некоторый ортонормированный базис $(c_A)_{A=1}^n$ в \mathcal{U} , что позволяет определить специальное семейство $(z_A)_{A=1}^n$ векторных полей $z_A \in \text{Vec}(M_R)$ на M_R :

$$z_A := H^{-1}[c_A], \quad A = 1, \dots, n.$$

Являясь образами базисных векторов относительно невырожденного линейного отображения, векторы $(z_A|_X)_{A=1}^n$ образуют базис в каждой точке $X \in M_R$. Таким образом, семейство $(z_A)_{A=1}^n$ является репером (следуя Картану [58], этот репер обычно называют подвижным репером). Согласно диадному разложению $H^{-1} = [H^{-1}]^A_B \partial_A \otimes c^B$, где $(\partial_A)_{A=1}^n$ — координатный репер, приходим к эквивалентному представлению элементов подвижного репера: $z_A = [H^{-1}]^B_A \partial_B$.

Многообразие M_R снабжается такой связностью ∇^W , что

$$\nabla^W_{z_A} z_B = 0, \quad A, B \in \{1, \dots, n\}.$$

Будем называть ее *связностью Вайценбока* [59]. По построению, коэффициенты связности Вайценбока относительно репера $(z_A)_{A=1}^n$ равны нулю. Вместе с тем, если Γ^A_{BC} — коэффициенты связности ∇^W в координатном репере, то для них справедливы равенства

$$\Gamma^A_{BC} = -H^D_C \partial_{x^B} [H^{-1}]^A_D = [H^{-1}]^A_D \partial_{x^B} H^D_C, \quad (2.15)$$

являющиеся следствиями равенств (2.8), в которых нужно положить $\tilde{\Gamma}^A_{BC} = 0$ и $\mathcal{U} = [H^A_B]$.

Геометрия, устанавливаемая на многообразии M_R связностью ∇^W , полностью характеризуется тензором кручения \mathfrak{T} (2.10), поскольку как тензор кривизны Римана (2.11), так и неметричность (2.12) связности ∇^W равны нулю. В координатном репере компоненты кручения имеют следующий вид:

$$\mathfrak{T}^A_{BC} = \Gamma^A_{BC} - \Gamma^A_{CB}. \quad (2.16)$$

⁸Символ $(\cdot)^b$ обозначает музыкальный изоморфизм (операцию «опускания» индексов) [39, с. 342].

Принимая во внимание выражения (2.15), приходим к альтернативному представлению компонент кручения:

$$\mathfrak{T}^A_{BC} = [\mathbf{H}^{-1}]^A_D \partial_{\mathbf{X}^B} \mathbf{H}^D_C - [\mathbf{H}^{-1}]^A_D \partial_{\mathbf{X}^C} \mathbf{H}^D_B.$$

В случае $n = 3$ часто бывает удобно (особенно, в континуальной теории дефектов) заменить тензор кручения на тензорное поле $\alpha \in \text{Sec}(TM_R \otimes TM_R)$, $\alpha = \alpha^{AB} \partial_{\mathbf{X}^A} \otimes \partial_{\mathbf{X}^B}$ с компонентами [44]

$$\alpha^{AB} = -\frac{1}{2} \epsilon^{ACD} \mathfrak{T}^B_{CD}. \quad (2.17)$$

Это поле принято называть тензором плотности дислокаций. Здесь ϵ — тензор Леви-Чивита с компонентами $\epsilon^{ABC} = \frac{e^{ABC}}{\sqrt{\det \mathbf{G}}}$, в которых $\det \mathbf{G}$ — определитель материальной метрики \mathbf{G} , а e^{ABC} — альтернатор⁹. Тензорное поле α может быть эквивалентно выбрано в качестве меры несовместности, поскольку $\mathfrak{T} = 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$.

Связность Вейля. Рассмотрим последний частный случай материальной связности. Пусть $\nu \in \Omega^1(M_R)$ — произвольная 1-форма. Определим связность ∇^{Wl} условиями:

- (a) ∇^{Wl} симметрична, то есть $\mathfrak{T} = 0$,
- (b) $\nabla_{\mathbf{u}}^{Wl} \mathbf{G} = \nu(\mathbf{u}) \mathbf{G}$.

В частности, из условия (b) следует, что тензор неметричности (2.12) равен $\mathfrak{Q} = -\nu \otimes \mathbf{G}$. Связность ∇^{Wl} называется *связностью Вейля*, а 1-форма ν называется 1-формой Вейля [60].

В координатном репере компоненты \mathfrak{Q}_{ABC} тензора неметричности \mathfrak{Q} представлены равенствами $\mathfrak{Q}_{ABC} = -\nu_A \mathbf{G}_{BC}$. Поэтому коэффициенты связности Вейля имеют вид:

$$\Gamma^A_{BC} = \frac{\mathbf{G}^{AD}}{2} (\partial_B \mathbf{G}_{DC} + \partial_C \mathbf{G}_{DB} - \partial_D \mathbf{G}_{BC}) - \frac{1}{2} (\nu_B \delta^A_C + \nu_C \delta^A_B - \nu_D \mathbf{G}_{BC} \mathbf{G}^{AD}), \quad (2.18)$$

из которого следует, что связность Вейля полностью определена материальной метрикой \mathbf{G} и 1-формой ν .

В общем случае кривизна связности Вейля отлична от нуля и в силу дополнительных слагаемых в (2.18), определяющих отклонение связности Вейля от связности Леви-Чивита, соответствующий тензор Риччи несимметричен. По этой причине, тензор Риччи может быть однозначно разложен в виде суммы нетривиальных симметричной и антисимметричной частей $\text{Ric}^{(\text{sym})}$ и $\text{Ric}^{(\text{asym})}$:

$$\text{Ric} = \text{Ric}^{(\text{sym})} + \text{Ric}^{(\text{asym})}.$$

Первое слагаемое разложения определяет скалярную кривизну Scal связности Вейля, а второе слагаемое связано с 1-формой Вейля соотношением [60]

$$\text{Ric}^{(\text{asym})} = d\nu,$$

где $d\nu$ — внешний дифференциал ковекторного поля (1-формы) ν , который в координатном представлении имеет вид

$$d\nu = \sum_{A < B} (\partial_A \nu_B - \partial_B \nu_A) d\mathbf{X}^A \wedge d\mathbf{X}^B.$$

Если форма Вейля является полным дифференциалом, т. е., когда $\nu = df$ для некоторой скалярной функции $f \in C^\infty(M_R)$, то $\text{Ric}^{(\text{asym})} =ddf = 0$ и тензор Риччи вновь оказывается симметричным. Обратное утверждение справедливо в следующей форме: если кривизна пространства Вейля равна нулю, то тогда $d\nu = 0$ и, следовательно, в случае односвязного многообразия M_R форма ν является полным дифференциалом.

2.4. Замена отсчетной формы

Неевклидова связность на форме \mathcal{S}_R , которая изначально предполагалась частью евклидова пространства, задавалась в два этапа. На первом этапе геометрия, индуцированная из физического пространства, «стиралась». При этом форма превращалась в гладкое многообразие M_R без какой-либо связности, определенной на нем. На втором этапе на подготовленном таким образом многообразии задавалась новая связность с помощью поля невырожденных линейных преобразований, роль которых выполняли локальные деформации \mathbf{H}_X . Для доказательства корректности определения связности требуется показать, что результат не зависит от выбора конкретной формы \mathcal{S}_R , то есть инварианты новой связности не должны зависеть от гладкого преобразования формы \mathcal{S}_R в некоторую иную форму \mathcal{S}'_R [26].

⁹Иными словами, $e^{ABC} = 1$, если (A, B, C) — четная перестановка, $e^{ABC} = -1$, если (A, B, C) — нечетная перестановка, и $e^{ABC} = 0$, если в тройке (A, B, C) хотя бы два элемента совпадают.

Пусть \mathcal{S}_R и \mathcal{S}'_R — произвольные евклидовы формы и пусть $\gamma : \mathcal{S}'_R \rightarrow \mathcal{S}_R$ — деформация, трансформирующая одну форму в другую. Обозначим через M_R и M'_R соответствующие подлежащие многообразия. Предположим, что поля $\mathbf{H} : T\mathcal{S}_R \rightarrow T(\mathcal{S}_R, \mathcal{U})$ и $\mathbf{H}' : T\mathcal{S}'_R \rightarrow T(\mathcal{S}_R, \mathcal{U})$ локальных деформаций связаны равенством: $\mathbf{H}' = \mathbf{H}\mathbf{F}$, где $\mathbf{F} = T\gamma : T\mathcal{S}'_R \rightarrow T\mathcal{S}_R$ — градиент деформации. С физической точки зрения это предположение означает, что разгрузка произвольного представительного объема из формы \mathcal{S}'_R в натуральное состояние производится таким образом, что этот объем вначале преобразуется в соответствующий представительный объем из \mathcal{S}_R , а затем разгружается в натуральное состояние посредством \mathbf{H} . Далее будет показано, что в этом случае геометрии, построенные на соответствующих формах, совпадают.

Чтобы установить этот факт, рассмотрим преобразование тензорных полей, представляющих геометрии, под действием деформации как отображения $\gamma : M'_R \rightarrow M_R$ между многообразиями. Это преобразование производится в терминах операции обратного образа [39, с. 320], которая сохраняет геометрическую структуру. Если установить, что обратный образ тензорных полей, представляющих геометрию многообразия M_R , на многообразии M'_R совпадает с соответствующими полями, определенными на M'_R , то тогда этим будет показано, что рассматриваемые геометрии совпадают.

Пусть семейство $(X^A)_{A=1}^n$ представляет локальные координаты на M_R , и пусть семейство $(Y^A)_{A=1}^n$ соответствует локальным координатам на M'_R . В этих координатах имеют место следующие диадные представления для градиента деформации и обратного к нему отображения:

$$\mathbf{F} = F^A{}_B \partial_{X^A} \otimes dY^B \quad \text{и} \quad \mathbf{F}^{-1} = [F^{-1}]^A{}_B \partial_{Y^A} \otimes dX^B,$$

где $F^A{}_B = \frac{\partial X^A}{\partial Y^B}$ и $[F^{-1}]^A{}_B = \frac{\partial Y^A}{\partial X^B}$. Для дальнейших рассуждений удобно иметь явные формулы для компонент обратного образа. Пусть $\mathbf{P} \in \text{Sec}(TM_R \otimes TM_R)$, $\mathbf{Q} \in \text{Sec}(T^*M_R \otimes T^*M_R)$, $\mathbf{R} \in \text{Sec}(TM_R \otimes T^*M_R \otimes T^*M_R)$ и $\mathbf{S} \in \text{Sec}(TM_R \otimes T^*M_R \otimes T^*M_R \otimes T^*M_R)$ — произвольные тензорные поля. Тогда справедливы равенства:

$$(\gamma^*\mathbf{P})^{AB} = [F^{-1}]^A{}_C [F^{-1}]^B{}_D \mathbf{P}^{CD}|_{\gamma(\cdot)}, \quad (2.19)$$

$$(\gamma^*\mathbf{Q})_{AB} = F^C{}_A F^D{}_B \mathbf{Q}_{CD}|_{\gamma(\cdot)}, \quad (2.20)$$

$$(\gamma^*\mathbf{R})^A{}_{BC} = [F^{-1}]^A{}_D F^E{}_B F^F{}_C \mathbf{R}^D{}_{EF}|_{\gamma(\cdot)}, \quad (2.21)$$

$$(\gamma^*\mathbf{S})^A{}_{BCD} = [F^{-1}]^A{}_E F^F{}_B F^G{}_C F^H{}_D \mathbf{S}^E{}_{FGH}|_{\gamma(\cdot)}. \quad (2.22)$$

Все готово для следующего утверждения:

Теорема 1. Пусть \mathcal{S}_R и \mathcal{S}'_R — евклидовы формы тела \mathfrak{B} с подлежащими многообразиями M_R и M'_R соответственно. Пусть $\gamma : \mathcal{S}'_R \rightarrow \mathcal{S}_R$ — соответствующая деформация и пусть $\mathbf{F} = T\gamma$ — ее градиент. Если поля \mathbf{H} и \mathbf{H}' локальных деформаций, определенные на формах \mathcal{S}_R и \mathcal{S}'_R соответственно, связаны между собой равенством $\mathbf{H}' = \mathbf{H}\mathbf{F}$, то имеют место следующие свойства:

- (а) Материальные метрики \mathbf{G} и \mathbf{G}' , порожденные полями \mathbf{H} и \mathbf{H}' соответственно, связаны равенством $\mathbf{G}' = \gamma^*\mathbf{G}$.
- (б) В случае римановых геометрий, построенных по материальным метрикам \mathbf{G} и \mathbf{G}' , справедливы равенства $\mathfrak{R}' = \gamma^*\mathfrak{R}$ между тензорами кривизны Римана, $\text{Ric}' = \gamma^*\text{Ric}$ между тензорами Риччи, и $\text{Scal}' = \text{Scal} \circ \gamma$ между скалярными кривизнами.
- (в) В случае геометрий Вайценбока, построенных по локальным деформациям \mathbf{H} и \mathbf{H}' , имеется соотношение $\mathfrak{T}' = \gamma^*\mathfrak{T}$ между тензорами кручения. Если $n = 3$, то справедливо дополнительное соотношение $\alpha' = \gamma^*\alpha$ между тензорами плотности дислокаций.

Доказательство. Будем использовать введенные выше обозначения для локальных координат на многообразиях M_R и M'_R . Более того, пусть $(e_A)_{A=1}^n$ — некоторый базис архетипа \mathcal{U} . Тогда имеет место диадное представление

$$\mathbf{H} = H^A{}_B e_A \otimes dX^B$$

для поля \mathbf{H} , что влечет равенство

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H}\mathbf{F} = H^A{}_B F^B{}_C e_A|_{\gamma(\cdot)} \otimes dY^C$$

для другого поля \mathbf{H}' .

(а) Определение (2.6) материальной метрики влечет, что

$$\mathbf{G}'_{AB} = \mathbf{G}'(\partial_{Y^A}, \partial_{Y^B}) = g_{CD} F^E{}_A F^F{}_B H^C{}_E H^D{}_F,$$

где $g_{CD} = e_C \cdot e_D$. Аналогично то же самое определение дает равенство

$$\mathbf{G}_{EF} = g_{CD} H^C{}_E H^D{}_F,$$

поэтому

$$\mathbf{G}'_{AB} = \mathbf{F}^E{}_A \mathbf{F}^F{}_B \mathbf{G}_{EF}|_{\gamma(\cdot)}.$$

Поскольку $\mathbf{G} \in \text{Sec}(T^*M_R \otimes T^*M_R)$, выражение в правой части последнего равенства совпадает с координатным представлением (2.20) для обратного образа, где символ \mathbf{Q} нужно заменить на \mathbf{G} . Приходим к искомому равенству $\mathbf{G}' = \gamma^*\mathbf{G}$.

(b) Коэффициенты (2.13) связности Леви-Чивита, определенные на многообразии M'_R посредством метрики \mathbf{G}' , равны

$$\Gamma'^K{}_{IJ} = \frac{\mathbf{G}'^{KL}}{2} (\partial_{Y^I} \mathbf{G}'_{JL} + \partial_{Y^J} \mathbf{G}'_{IL} - \partial_{Y^L} \mathbf{G}'_{IJ}),$$

где¹⁰

$$\mathbf{G}'_{IJ} = \mathbf{F}^C{}_I \mathbf{F}^D{}_J \mathbf{G}_{CD} \quad \text{и} \quad \mathbf{G}'^{KL} = [\mathbf{F}^{-1}]^K{}_S [\mathbf{F}^{-1}]^L{}_P \mathbf{G}^{SP}.$$

Используя свойство коммутативности смешанных частных производных, получаем

$$\partial_{Y^I} \mathbf{F}^K{}_J = \frac{\partial^2 \chi^K}{\partial Y^I \partial Y^J} = \partial_{Y^J} \mathbf{F}^K{}_I.$$

По этой причине

$$\begin{aligned} \Gamma'^K{}_{IJ} = \frac{\mathbf{G}^{SP}}{2} & ([\mathbf{F}^{-1}]^K{}_S \mathbf{F}^C{}_J \partial_{Y^I} \mathbf{G}_{CP} + [\mathbf{F}^{-1}]^K{}_S \mathbf{F}^C{}_I \partial_{Y^J} \mathbf{G}_{CP} - \\ & - [\mathbf{F}^{-1}]^K{}_S [\mathbf{F}^{-1}]^L{}_P \mathbf{F}^C{}_I \mathbf{F}^D{}_J \partial_{Y^L} \mathbf{G}_{CD}) + [\mathbf{F}^{-1}]^K{}_S \partial_{Y^I} \mathbf{F}^S{}_J. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\partial_{Y^I} \mathbf{G}_{JK} = \partial_{Y^I} (\mathbf{G}_{JK} \circ \gamma) = \mathbf{F}^O{}_I \partial_{X^O} \mathbf{G}_{CP},$$

приходим к равенству

$$\Gamma'^K{}_{IJ} = [\mathbf{F}^{-1}]^K{}_S \mathbf{F}^O{}_I \mathbf{F}^C{}_J \Gamma^S{}_{OC}|_{\gamma(\cdot)} + [\mathbf{F}^{-1}]^K{}_S \partial_{Y^I} \mathbf{F}^S{}_J, \quad (2.23)$$

где скалярные поля $\Gamma^S{}_{OC}$ соответствуют коэффициентам связности Леви-Чивита на M_R , порожденным материальной метрикой \mathbf{G} .

Отметим сходство полученного соотношения для коэффициентов связности на M'_R с законом преобразования (2.9) коэффициентов связности при замене координат. Действительно, с точностью до композиций с координатными отображениями деформацию γ можно рассматривать как замену локальных координат в M_R . Вместе с тем в рассматриваемом случае имеется большее, чем просто преобразование координат, поскольку формы также преобразуются. В этом причина, почему прямые соотношения между «штрихованными» и «нештрихованными» полями не могут быть получены без использования преобразования обратного образа.

Подставляя полученное соотношение (2.23) для коэффициентов связности в координатное представление (2.14) тензора кривизны, получаем

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}'^T{}_{IJK} = \partial_{Y^I} \Gamma'^T{}_{JK} - \partial_{Y^J} \Gamma'^T{}_{IK} + \Gamma'^L{}_{JK} \Gamma'^T{}_{IL} - \Gamma'^L{}_{IK} \Gamma'^T{}_{JL} = \\ = \partial_{Y^I} ([\mathbf{F}^{-1}]^T{}_S \mathbf{F}^O{}_J \mathbf{F}^C{}_K \Gamma^S{}_{OC} + [\mathbf{F}^{-1}]^T{}_S \partial_{Y^J} \mathbf{F}^S{}_K) - \partial_{Y^J} ([\mathbf{F}^{-1}]^T{}_S \mathbf{F}^O{}_I \mathbf{F}^C{}_K \Gamma^S{}_{OC} + [\mathbf{F}^{-1}]^T{}_S \partial_{Y^I} \mathbf{F}^S{}_K) + \\ + ([\mathbf{F}^{-1}]^L{}_S \mathbf{F}^O{}_J \mathbf{F}^C{}_K \Gamma^S{}_{OC} + [\mathbf{F}^{-1}]^L{}_S \partial_{Y^I} \mathbf{F}^S{}_K) ([\mathbf{F}^{-1}]^T{}_B \mathbf{F}^A{}_I \mathbf{F}^D{}_L \Gamma^B{}_{AD} + [\mathbf{F}^{-1}]^T{}_B \partial_{Y^I} \mathbf{F}^B{}_L) - \\ - ([\mathbf{F}^{-1}]^L{}_S \mathbf{F}^O{}_I \mathbf{F}^C{}_K \Gamma^S{}_{OC} + [\mathbf{F}^{-1}]^L{}_S \partial_{Y^I} \mathbf{F}^S{}_K) ([\mathbf{F}^{-1}]^T{}_B \mathbf{F}^A{}_J \mathbf{F}^D{}_L \Gamma^B{}_{AD} + [\mathbf{F}^{-1}]^T{}_B \partial_{Y^J} \mathbf{F}^B{}_L). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Используя формулу

$$\partial_{Y^I} [\mathbf{F}^{-1}]^M{}_L = -[\mathbf{F}^{-1}]^M{}_N [\mathbf{F}^{-1}]^K{}_L \partial_{Y^I} \mathbf{F}^N{}_K,$$

которая вытекает из дифференцирования обеих частей соотношения $[\mathbf{F}^{-1}]^M{}_N|_{\gamma(\cdot)} \mathbf{F}^N{}_K = \delta^M{}_K$ по переменным Y^I , и равенство

$$\partial_{Y^I} \Gamma^S{}_{OC} = \mathbf{F}^P{}_I \partial_{X^P} \Gamma^S{}_{OC},$$

которое следует из цепного правила дифференцирования, после сокращения соответствующих слагаемых из (2.24) получаем, что

$$\mathfrak{R}'^T{}_{IJK} = [\mathbf{F}^{-1}]^T{}_S \mathbf{F}^P{}_I \mathbf{F}^O{}_J \mathbf{F}^C{}_K \mathfrak{R}_{POC}^S|_{\gamma(\cdot)}.$$

Сравнивая полученное соотношение с формулой (2.22), в которой \mathbf{S} следует заменить на \mathfrak{R} , приходим к выводу, что $\mathfrak{R}' = \gamma^*\mathfrak{R}$.

Для тензора кривизны Риччи имеем равенства

$$\text{Ric}'_{IK} = \mathfrak{R}'^L{}_{ILK} = \mathbf{F}^P{}_I \mathbf{F}^C{}_K \mathfrak{R}^S{}_{PSC} = \mathbf{F}^P{}_I \mathbf{F}^C{}_K \text{Ric}_{PC}|_{\gamma(\cdot)}.$$

¹⁰Здесь и далее в доказательстве «нештрихованные» поля (за исключением \mathbf{F}) следует рассматривать с композицией $|_{\gamma(\cdot)}$. Для экономии места последний символ опускается в промежуточных выкладках и появляется лишь в финальных выражениях.

Таким образом, приходим к соотношению

$$\text{Ric}'_{IK} = F^P{}_I F^C{}_K \text{Ric}_{PC}|_{\gamma(\cdot)}.$$

Поскольку $\text{Ric} \in \text{Sec}(T^*M_R \otimes T^*M_R)$, выражение в правой части полученного равенства совпадает с координатным представлением (2.20) обратного образа, в котором тензорное поле \mathbb{Q} нужно заменить на Ric . Тем самым равенство $\text{Ric}' = \gamma^*\text{Ric}$ установлено.

Наконец, получим соотношение между скалярными кривизнами:

$$\text{Scal}' = G'^{AB} \text{Ric}'_{AB} = [F^{-1}]^A{}_S [F^{-1}]^B{}_P G^{SP} F^L{}_A F^M{}_B \text{Ric}_{LM}|_{\gamma(\cdot)} = G^{LM} \text{Ric}_{LM}|_{\gamma(\cdot)} = \text{Scal} \circ \gamma,$$

как и ожидалось.

(с) В этом случае имеются равенство $\mathbf{H} = \mathbf{H}^A{}_B \mathbf{c}_A \otimes d\mathbf{X}^B$ и соответствующее разложение $\mathbf{H}' = \mathbf{H}^A{}_B F^B{}_C \mathbf{c}_A \otimes dY^C$. В координатном репере $(\partial_{Y^A})^n_{A=1}$ коэффициенты (2.15) связности Вайценбока на многообразии M'_R представлены выражением $\Gamma'^I{}_{JK} = [\mathbf{H}'^{-1}]^I{}_C \partial_{Y^J} \mathbf{H}'^C{}_K$. Здесь

$$\partial_{Y^J} \mathbf{H}'^C{}_K = F^L{}_K F^M{}_J \partial_{X^M} \mathbf{H}^C{}_L + \mathbf{H}^C{}_L \partial_{Y^J} F^K{}_L,$$

поскольку $\partial_{Y^J} \mathbf{H}^C{}_L = F^M{}_J \partial_{X^M} \mathbf{H}^C{}_L$. Тогда приходим к формуле

$$\Gamma'^I{}_{JK} = [F^{-1}]^I{}_R F^L{}_K F^M{}_J \Gamma^R{}_{ML} + [F^{-1}]^I{}_R \partial_{Y^J} F^R{}_K,$$

в которой $\Gamma^R{}_{ML}$ — коэффициенты связности Вайценбока на многообразии M_R . Соотношение (2.16) для компонент тензора кручения, таким образом, принимает вид

$$\mathfrak{T}'^I{}_{JK} = [F^{-1}]^I{}_R F^M{}_J F^L{}_K \mathfrak{T}^R{}_{ML}|_{\gamma(\cdot)}.$$

Сравнивая его с выражением (2.21), в котором \mathbf{R} следует заменить на \mathfrak{T} , получаем $\mathfrak{T}' = \gamma^*\mathfrak{T}$.

Пусть $n = 3$. Компоненты тензора плотности дислокаций α' определены равенством (2.17): $\alpha'^{IJ} = -\frac{1}{2} \epsilon'^{IMN} \mathfrak{T}'^J{}_{MN}$, где $\epsilon'^{IMN} = \frac{e^{IMN}}{\sqrt{\det G'}}$. Определитель $\det G'$ связан с определителем $\det G$ по формуле $\det G' = \Delta^2 \det G$, в которой¹¹ $\Delta = \det F > 0$. Подставляя соотношения для \mathfrak{T}' и $\det G'$ в α'^{IJ} , получаем

$$\alpha'^{IJ} = -\frac{1}{2} \frac{e^{IMN}}{\sqrt{\det G}} \frac{[F^{-1}]^J{}_R F^A{}_M F^B{}_N \mathfrak{T}^R{}_{AB}}{\Delta}. \quad (2.25)$$

Для того чтобы преобразовать полученное выражение к иному виду, вначале заметим, что $\mathfrak{T}^R{}_{AB} = \frac{1}{2} \mathfrak{T}^R{}_{SL} (\delta^S_A \delta^L_B - \delta^L_A \delta^S_B)$. Вместе с тем¹² $\delta^S_A \delta^L_B - \delta^L_A \delta^S_B = e_{TAB} e^{TSL}$, и тогда получаем соотношение $\mathfrak{T}^R{}_{AB} = \frac{1}{2} e_{TAB} e^{TSL} \mathfrak{T}^R{}_{SL}$. Учитывая его в (2.25) и принимая во внимание, что $[F^{-1}]^I{}_T = \frac{1}{2\Delta} e^{IMN} e_{tab} F^A{}_M F^B{}_N$, приходим к равенству

$$\alpha'^{IJ} = [F^{-1}]^I{}_T [F^{-1}]^J{}_R \alpha^{TR}|_{\gamma(\cdot)},$$

где α^{TR} — компоненты тензора плотности дислокаций $\alpha \in \text{Sec}(TM_R \otimes TM_R)$. Сравнивая полученное выражение с формулой (2.19), в которой \mathbf{P} следует заменить на α , окончательно получаем, что $\alpha' = \gamma^*\alpha$. Этим теорема полностью доказана. \square

2.5. Конторсия связности

Как показано в разд. 2.3, на многообразии M_R можно построить различные материальные связности. Вместе с тем различие материальных связностей между собой приводит к различию соответствующих уравнений баланса массы и импульса, сформулированных относительно неевклидовой отсчетной формы \mathbf{S}_R [23; 61]. В этой связи для сравнения уравнений баланса друг с другом целесообразно иметь меру отличия одной связности от другой. Эту меру можно задать следующим образом [26]. Предположим, что на многообразии M_R выбраны две связности ∇ и $\tilde{\nabla}$. Тогда разность

$$\mathfrak{K} = \nabla - \tilde{\nabla}, \quad (2.26)$$

по определению, характеризует отличие связности $\tilde{\nabla}$ от связности ∇ . Рассмотрим поле \mathfrak{K} более детально.

Если $(\partial_A)_{A=1}^n$ — координатный репер на M_R , то ковариантные производные, определяемые связностями $\tilde{\nabla}$ и ∇ , представлены выражениями

$$\nabla_u v = u^A (\partial_A v^B + v^C \Gamma^B{}_{AC}) \partial_B \quad \text{и} \quad \tilde{\nabla}_u v = u^A (\partial_A v^B + v^C \tilde{\Gamma}^B{}_{AC}) \partial_B,$$

¹¹Предполагается, что деформация сохраняет ориентацию.

¹²Здесь e_{TAB} и e^{TSL} — альтернаторы.

в которых $u, v \in \text{Vec}(M_R)$ — произвольные векторные поля, а Γ^B_{AC} и $\tilde{\Gamma}^B_{AC}$ — коэффициенты связности. Поэтому для значения поля (2.26) на тех же векторах u, v справедливо равенство

$$\mathfrak{K}_u v = \nabla_{uv} - \tilde{\nabla}_{uv} = u^A v^C (\Gamma^B_{AC} - \tilde{\Gamma}^B_{AC}) \partial_B,$$

и поле \mathfrak{K} , таким образом, имеет следующее полиадное представление:

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^A_{BC} \partial_A \otimes dx^B \otimes dx^C, \quad \text{где } \mathfrak{K}^A_{BC} = \Gamma^A_{BC} - \tilde{\Gamma}^A_{BC}.$$

Заметим, что несмотря на то что аффинная связность не образует тензорного поля третьего ранга, разность между любыми двумя связностями, напротив, является тензорным полем [55]. По этой причине \mathfrak{K} — тензорное поле третьего ранга: $\mathfrak{K} \in \text{Sec}(T^*M_R \otimes TM_R \otimes TM_R)$.

Используя поле \mathfrak{K} , можно связать кручения, кривизны и неметричности различных материальных связностей следующим образом. Тензор кручения \mathfrak{T} (2.10) связности ∇ может быть выражен через тензор кручения $\tilde{\mathfrak{T}}$ второй связности $\tilde{\nabla}$ в соответствии с формулой

$$\mathfrak{T}(u, v) = \tilde{\mathfrak{T}}(u, v) + \mathfrak{K}_u v - \mathfrak{K}_v u,$$

при выводе которой использовалось равенство $\nabla_u v = \tilde{\nabla}_u v + \mathfrak{K}_u v$. В координатном репере

$$\mathfrak{T}^A_{BC} = \tilde{\mathfrak{T}}^A_{BC} + \mathfrak{K}^A_{BC} - \mathfrak{K}^A_{CB}.$$

Аналогично тензор кривизны Римана \mathfrak{R} (2.11) связности ∇ может быть выражен через тензор кривизны $\tilde{\mathfrak{R}}$ связности $\tilde{\nabla}$ согласно соотношению

$$\mathfrak{R}(u, v) = \tilde{\mathfrak{R}}(u, v) + [\tilde{\nabla}_u, \mathfrak{K}_v] + [\mathfrak{K}_u, \tilde{\nabla}_v] - \mathfrak{K}_{[u, v]} + [\mathfrak{K}_u, \mathfrak{K}_v].$$

В координатном репере

$$\mathfrak{R}_{ABC}{}^D = \tilde{\mathfrak{R}}_{ABC}{}^D + \partial_A \mathfrak{K}^D_{BC} - \partial_B \mathfrak{K}^D_{AC} + \tilde{\Gamma}^L_{BC} \mathfrak{K}^D_{AL} + \mathfrak{K}^L_{BC} \tilde{\Gamma}^D_{AL} + \mathfrak{K}^L_{BC} \mathfrak{K}^D_{AL} - \tilde{\Gamma}^L_{AC} \mathfrak{K}^D_{BL} - \mathfrak{K}^L_{AC} \tilde{\Gamma}^D_{BL} - \mathfrak{K}^L_{AC} \mathfrak{K}^D_{BL}.$$

Наконец, тензор неметричности \mathfrak{Q} (2.12) связности ∇ может быть выражен через тензор неметричности $\tilde{\mathfrak{Q}}$ связности $\tilde{\nabla}$ по формуле:

$$\mathfrak{Q}(u, v, w) = \tilde{\mathfrak{Q}}(u, v, w) + G(\mathfrak{K}_u v, w) + G(v, \mathfrak{K}_u w).$$

При ее выводе предполагалось, что материальная метрика G на геометрических пространствах (M_R, G, ∇) и $(M_R, G, \tilde{\nabla})$ одна и та же. В координатном репере

$$\mathfrak{Q}_{ABC} = \tilde{\mathfrak{Q}}_{ABC} + G_{CD} \mathfrak{K}^D_{AB} + G_{BD} \mathfrak{K}^D_{AC}.$$

Рассмотрим частный случай. Предположим, что на многообразии M_R фиксирована материальная метрика G (2.6), которая определяет связность Леви-Чивита $\tilde{\nabla}$. Коэффициенты этой связности в координатном репере $(\partial_A)_{A=1}^n$ представлены выражениями (2.13) $\tilde{\Gamma}^A_{BC} = \frac{G^{AD}}{2} (\partial_B G_{CD} + \partial_C G_{BD} - \partial_D G_{BC})$. Другую связность ∇ будем считать произвольной. Если \mathfrak{T} и \mathfrak{Q} , соответственно, кручение (2.10) и неметричность (2.12) связности ∇ , то тогда справедлива следующая общая формула в координатном репере $(\partial_A)_{A=1}^n$ [23]:

$$\Gamma^A_{BC} = \tilde{\Gamma}^A_{BC} + \frac{G^{AD}}{2} (\mathfrak{T}_{DBC} + \mathfrak{T}_{CDB} + \mathfrak{T}_{BDC}) + \frac{G^{AD}}{2} (\mathfrak{Q}_{BCD} + \mathfrak{Q}_{CDB} - \mathfrak{Q}_{DBC}). \quad (2.27)$$

Отсюда вытекает соотношение для компонент тензора \mathfrak{K} :

$$\mathfrak{K}^A_{BC} = \frac{G^{AD}}{2} (\mathfrak{T}_{DBC} + \mathfrak{T}_{CDB} + \mathfrak{T}_{BDC}) + \frac{G^{AD}}{2} (\mathfrak{Q}_{BCD} + \mathfrak{Q}_{CDB} - \mathfrak{Q}_{DBC}). \quad (2.28)$$

Если связность ∇ является связностью Вайценбока, порожденной полем локальных деформаций $H = H^A{}_B c_A \otimes dx^B$, то $\mathfrak{Q} = 0$ и формула (2.28) принимает вид

$$\mathfrak{K}^A_{BC} = \frac{G^{AD}}{2} (\mathfrak{T}_{DBC} + \mathfrak{T}_{CDB} + \mathfrak{T}_{BDC}). \quad (2.29)$$

Таким образом, \mathfrak{K} полностью определяется тензором кручения \mathfrak{T} связности Вайценбока ∇ . По этой причине будем называть \mathfrak{K} *тензором конторсии* [13]. С геометрической точки зрения отклонение связности Вайценбока от связности Леви-Чивита заключается в несогласованности малых элементов, на которые разбивается многообразие M_R в соответствии с той или иной его геометрией. Именно в случае связности Леви-Чивита эти элементы, пусть даже будучи малыми, обладают кривизной (пример — часть поверхности сферы), а в случае связности Вайценбока малые элементы представляют часть плоскости. Конторсия связности (2.29) определяет дополнительный изгиб плоского элемента с тем, чтобы он совпал с малым римановым элементом многообразия M_R .

Замечание 5. То, что соотношение для коэффициентов связности Вайценбока (получаемое из равенства (2.27) путем отбрасывания слагаемых с неметричностью) содержит в себе коэффициенты связности Леви-Чивита, может быть интерпретировано в рамках континуальной теории дефектов. Действительно, риманово пространство соответствует телу с дисклинациями, в то время как пространство Вайценбока соответствует телу с дислокациями. Вместе с тем, если в кристалле присутствуют дискретно распределенные дислокации, то они индуцируют дисклинации, которые расположены на концах линий дислокации [62]. В случае непрерывного распределения дефектов поля дислокаций и дисклинаций непрерывны и могут быть представлены совокупностью геометрических понятий: кривизна, кручение и неметричность. Математически это и означает, что связность Вайценбока содержит в некотором смысле связность Леви-Чивита.

Наконец, если связность ∇ является связностью Вейля, порожденной материальной метрикой G и полем 1-форм ν , то, согласно (2.18), тензорное поле \mathfrak{K} представлено компонентами

$$\mathfrak{K}^A_{BC} = -\frac{1}{2}(\nu_B \delta_C^A + \nu_C \delta_B^A - \nu_D G_{BC} G^{AD}).$$

Из полученной формулы следует, что поле \mathfrak{K} полностью определяется полем ковекторов ν . Поскольку кривизна связности Вейля может быть отлична от нуля, нет причин связывать отклонение связности Вейля от связности Леви-Чивита с геометрией малых элементов. Вместе с тем отличие двух связностей друг от друга может быть интерпретировано в терминах формы объема. Действительно, в случае риманова пространства форма объема $dV = \sqrt{\det G} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ ковариантно постоянна, т. е.

$$\nabla^L dV = 0.$$

В противоположность этому в случае связности Вейля риманова форма объема эволюционирует при параллельном перенесении, т. е.

$$\nabla^{Wl} dV \neq 0.$$

С физической точки зрения изменение римановой формы объема при переносе от точки к точке означает, что представительные объемы, составляющие тело, содержат точечные дефекты типа пор либо независимо от других элементарных объемов изменяются в силу химических реакций или тепловых процессов [21; 60]. В этой связи возникают «метрические аномалии» (по терминологии [63]), которые могут быть формализованы в виде отличной от нуля 1-формы Вейля ν .

Замечание 6. Существование различных способов задания материальной связности на теле приводит к проблеме формулировки критерия выбора одной из возможных связностей. По-видимому, в рамках теории простого материала, когда отклик тела зависит лишь от градиента первого порядка, такого критерия не существует [25; 64; 65]. Несмотря на отсутствие строго обоснования этого заключения, можно предложить следующий ход рассуждений. Несовместные деформации определяются полем H локальных деформаций, которое имеет n^2 компонент. Вместе с тем аффинная связность для своего полного определения требует задания n^3 коэффициентов связности. Таким образом, задание одного лишь поля локальных деформаций не дает достаточно данных для единственного определения материальной связности.

2.6. Физический смысл конторсии связности Вайценбока

Остановимся более подробно на связности Вайценбока. При этом будем полагать, что размерность тела равна размерности физического пространства, т. е. $n = 3$. Геометрия на многообразии M_R естественным образом индуцирует геометрию на теле \mathfrak{B} , поскольку многообразия M_R и \mathfrak{B} топологически эквивалентны. В этой связи для полей связности и метрики на теле \mathfrak{B} , определяющих геометрию, будем использовать те же обозначения, что использовались для полей на M_R . В частности, на \mathfrak{B} определено поле конторсии (2.29).

Имея дело с телом, вместо поля локальных деформаций H определим единообразную отсчетную [13] P , которая является полем $\mathfrak{B} \ni p \mapsto P_p \in \text{Hom}(T_p \mathfrak{B}; \mathcal{V})$ локальных конфигураций P_p . В свою очередь, каждая локальная конфигурация определяется равенством $P_p = T_p \mathfrak{K}^{(p)}$, где $\mathfrak{K}^{(p)} : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{E}$ — конфигурация, при которой инфинитезимальная окрестность точки p переходит в натуральное состояние. В явном виде, используя элементы семейства $\{\gamma^{(X)}\}_{X \in S_R}$ и обозначая через \mathfrak{K}_R конфигурацию, образом которой является форма S_R , получим

$$\mathfrak{K}^{(p)} = \gamma^{(\mathfrak{K}_R(p))} \circ \mathfrak{K}_R.$$

Тензору конторсии \mathfrak{K} отвечает прямой образ $K : \mathfrak{B} \rightarrow \text{End}(\mathcal{V})$ в физическом пространстве \mathcal{E} согласно следующей формуле:

$$Ku = P \mathfrak{K}_{p-1} u P^{-1} \quad (2.30)$$

для всех $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$. Будем называть поле \mathbf{K} *конторсией в смысле Нолла*, поскольку оно соответствует полю \mathbf{D} , определенному в [13].

Для получения физической интерпретации поля конторсии рассмотрим частную единообразную отсчетную \mathcal{P} , для которой существует конфигурация \varkappa , удовлетворяющая следующему условию:

$$\mathbf{Q} = (T\varkappa)\mathbf{P}^{-1} : \mathfrak{B} \ni \mathfrak{p} \mapsto \mathbf{Q}_{\mathfrak{p}} \in \text{O}(3) \subset \text{End}(\mathcal{V}).$$

Иными словами, композиция полей \mathbf{P}^{-1} и $T\varkappa$ есть не более, чем поле вращений в физическом пространстве \mathcal{E} . В этом случае действие конторсии по Ноллу \mathbf{K} (2.30) дает выражение для производной¹³ \mathbf{Q} [13]:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = -\mathbf{Q}^T(D_{\mathfrak{P}}\mathbf{Q})\mathbf{u},$$

где $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$. С физической точки зрения последнее равенство может быть интерпретировано следующим образом: несовместность локальных деформаций возникает в силу несогласованности поворотов представительных объемов в физическом пространстве. Эта несогласованность ведет к невозможности собрать повернутые объемы в сплошное тело. Обратные вращения, которые делают подобную сборку возможной, определяются полем \mathbf{Q} . В свою очередь, темп изменения значений \mathbf{Q} относительно пространственных сдвигов определяется конторсией по Ноллу \mathbf{K} .

2.7. Восстановление поля локальных деформаций по известным метрике и кручению

До сих пор поле локальных деформаций \mathbf{H} предполагалось известным. По нему синтезировались метрика \mathbf{G} и связность ∇ , определяющие геометрию отсчетной формы \mathcal{S}_R . Отклонение этой геометрии от евклидовой (а с физической точки зрения степень несовместности) определялось тензорными полями кручения, кривизны и неметричности. Рассмотрим теперь обратную задачу. Предположим, что известны: 1) материальная метрика \mathbf{G} и 2) меры несовместности локальных деформаций. Поставим целью восстановить по этим данным поле \mathbf{H} . В дальнейших рассуждениях ограничимся случаем связности Вайценбока.

Пусть известны метрика \mathbf{G} и тензорное поле третьего ранга \mathfrak{T} , которое ассоциируется с кручением связности Вайценбока (в частности, в координатном репере, $\mathfrak{T}^A_{BC} = -\mathfrak{T}^A_{CB}$). Используя поля \mathbf{G} и \mathfrak{T} , из формулы (2.27) (в которой надо положить $\mathfrak{Q} = 0$) получаем значения полей Γ^A_{BC} — коэффициентов связности. В дальнейшем будем полагать эти поля известными.

Формула (2.15) влечет соотношения

$$\partial_B \mathbf{H}^D_C = \Gamma^A_{BC} \mathbf{H}^D_A, \quad B, C, D = 1, \dots, n, \quad (2.31)$$

которые образуют систему n^3 линейных однородных уравнений в частных производных первого порядка относительно n^2 неизвестных \mathbf{H}^A_B — компонент поля локальных деформаций. Поскольку число уравнений больше числа неизвестных, то для однозначного решения системы (2.31) должны выполняться некоторые условия интегрируемости. Эти условия вытекают из того, что функции \mathbf{H}^A_B удовлетворяют равенствам $\partial_B \partial_L \mathbf{H}^D_C = \partial_L \partial_B \mathbf{H}^D_C$:

$$\partial_L (\Gamma^A_{BC} \mathbf{H}^D_A) = \partial_B (\Gamma^A_{LC} \mathbf{H}^D_A). \quad (2.32)$$

Используя правило дифференцирования произведения и равенства (2.31), из (2.32) получаем соотношения

$$\mathbf{H}^D_A \mathfrak{R}^A_{LBC} = 0,$$

где \mathfrak{R}^A_{LBC} — компоненты тензора кривизны \mathfrak{R} . Таким образом, условия интегрируемости равносильны равенству

$$\mathfrak{R} = 0, \quad (2.33)$$

что геометрически очевидно: если Γ^A_{BC} — коэффициенты связности Вайценбока, то определяемая ими кривизна должна быть равна нулю [66].

Предположим, что условие (2.33) выполнено. Для интегрирования системы (2.31) зафиксируем некоторую точку $\mathbf{X}_0 \in M_R$ и выберем произвольную гладкую кривую¹⁴

$$\chi :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M_R, \quad \mathbf{x}^A = \mathbf{x}^A(s), \quad A = 1, \dots, n$$

такую, что $\chi(0) = \mathbf{X}_0$. Домножая обе части (2.31) на компоненты $\dot{\mathbf{x}}^B$ вектора скорости χ , получаем

$$\frac{d\mathbf{H}^D_C}{ds} = \Gamma^A_{BC} \dot{\mathbf{x}}^B \mathbf{H}^D_A, \quad C, D = 1, \dots, n.$$

¹³Здесь $D_{\mathfrak{P}}\psi = (T\psi) \circ \mathbf{P}^{-1}$ для произвольного поля $\psi : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{W}$, где \mathcal{W} обозначает \mathcal{E} , \mathcal{V} , или $\text{End}(\mathcal{V})$.

¹⁴Поскольку M_R как всякое многообразие линейно связно, хотя бы одна такая кривая всегда имеется.

В матричном виде

$$\frac{dH}{ds} = H.P, \quad (2.34)$$

где $H = [H^A_B]$ — неизвестная матрица, а $P = [\Gamma^A_{BC}\dot{X}^B]$ — известная матрица коэффициентов. Таким образом, система (2.31) уравнений в частных производных преобразована к одному матричному обыкновенному дифференциальному уравнению (2.34) вдоль кривой χ . Решение этого уравнения может быть представлено в виде [67]

$$H = H_0.\Omega(s), \quad (2.35)$$

где $H_0 = H(0)$ — заданное значение матрицы H в точке X_0 , а $\Omega(s)$ — матрицант, представленный рядом

$$\Omega(s) = E + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0 < s_1 < \dots < s_n < s} \prod_{k=1}^n P(s_k) \prod_{k=1}^n ds_k, \quad (2.36)$$

в котором E — единичная матрица.

Таким образом, при условии (2.33) решение системы (2.31) не зависит от выбора кривой, соединяющей точки X_0 и X , и однозначно определяется соотношениями (2.35) и (2.36) с точностью до жесткого вращения.

3. Обобщенная деформация и ее градиент

3.1. Отображение уплощения

Поскольку неевклидова единообразная форма $S_R = (M_R, G, \nabla)$ синтезируется относительно некоторой наблюдаемой евклидовой формы $S_R = (M_R, g|_S, \nabla|_S)$, можно ожидать, что формы S_R и S_R как специфические геометрические структуры над общим многообразием M_R связаны между собой посредством некоторого отображения. Действительно, вернемся к примеру криволинейной мембраны (раздел 1.5), формы которой изображены на рис. 1.2. Неевклидова отсчетная форма S_R мембраны является полусферой, в то время как евклидовы формы представлены регионами евклидовой плоскости. Одним из этих регионов является форма S_R . В рамках рис. 1.2 деформацию неевклидовой отсчетной формы S_R в некоторую евклидову форму S можно представить в виде двух последовательных трансформаций. В ходе первой трансформации полусфера «уплощается» на физическую плоскость таким образом, чтобы полученный плоский регион совпадал с S_R . Вторая трансформация преобразует евклидову форму S_R в евклидову форму S и является, таким образом, обычной евклидовой деформацией.

Обобщая пример с криволинейной мембраной на случай произвольного деформируемого твердого тела, определим отображение $\lambda_R : S_R \rightarrow S_R$, которое заменяет неевклидову геометрию над многообразием M_R на геометрию над тем же многообразием, индуцированную из физического пространства \mathcal{E} . В пределах гладких структур отображение λ_R является не чем иным, как тождественным отображением $\text{Id}_{M_R} : M_R \rightarrow M_R$ на общем для рассматриваемых геометрических пространств многообразии M_R . Вместе с тем относительно геометрических структур над этим многообразием λ_R не является тождественным отображением: оно преобразует каждую точку X неевклидовой формы с ее окрестностью и геометрией, индуцированной на эту окрестность, в ту же самую точку X с той же окрестностью, но геометрия которой индуцирована из объемлющего пространства \mathcal{E} . Будем называть отображение λ_R *отображением уплощения* [26].

Для формальной интерпретации отображения уплощения λ_R представляется уместным использовать подход теории категорий. Поскольку этот подход не является общепринятым в механике континуума, изложим его более детально. Произвольная категория Cat состоит из следующих двух совокупностей [68]:

- Класса $\text{Ob}(\text{Cat})$, элементы которого называются объектами категории Cat .
- Класса $\text{Hom}(\text{Cat})$, элементы которого называются морфизмами категории Cat .

Каждому морфизму $f \in \text{Hom}(\text{Cat})$ соответствует пара (X, Y) , состоящая из объектов X и Y . Первый из них называется объектом отправления, а второй — объектом прибытия морфизма¹⁵ f . Кроме того, для любых объектов $X, Y, Z \in \text{Ob}(\text{Cat})$ существует бинарная операция $\circ : \text{Hom}_{\text{Cat}}(X; Y) \times \text{Hom}_{\text{Cat}}(Y; Z) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Cat}}(X; Z)$, называемая композицией. Здесь символ $\text{Hom}_{\text{Cat}}(X; Y)$ обозначает класс всех морфизмов из Cat с объектом отправления X и объектом прибытия Y . Предполагается, что композиция удовлетворяет следующим двум аксиомам:

1. Ассоциативность: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

¹⁵В этом случае принято использовать обозначение $f : X \rightarrow Y$.

2. Существование нейтрального элемента: для любого объекта $X \in \text{Ob}(\text{Cat})$ существует морфизм $\text{Id}_X \in \text{Hom}_{\text{Cat}}(X; X)$, называемый тождественным морфизмом, такой, что $\text{Id}_Y \circ f = f \circ \text{Id}_X = f$ для любого $f \in \text{Hom}_{\text{Cat}}(X; Y)$.

Замечание 7. В определении категории используется терминология, принятая в аксиоматической теории множеств [69]. В рамках нее различаются множества и классы, где последние представляют структуру более общую, нежели множества, что позволяет избежать проблемы с известными противоречиями («множество всех множеств» и др.).

Замечание 8. В общем случае морфизм не является отображением в привычном понимании этого термина. Например, можно рассмотреть категорию, представленную частично упорядоченным множеством (X, \leq) . Объектами этой категории являются элементы множества X , а морфизмами — упорядоченные пары (x, y) :

$$x \rightarrow y \quad \text{если} \quad x \leq y.$$

Композиция двух морфизмов осуществляется удалением среднего элемента по аксиоме транзитивности отношения \leq , а тождественным морфизмом является пара (x, x) .

Таким образом, морфизм является обобщением понятия отображения. В работе используется более узкая интерпретация морфизма как отображения с некоторыми свойствами, одинаковыми для всех морфизмов рассматриваемой категории. Такое представление позволяет с единых позиций говорить, в частности, о стирании геометрических свойств, что будет рассмотрено далее.

Пусть C_1 и C_2 — произвольные категории. Функтором (ковариантным функтором) из C_1 в C_2 называется совокупность отображений (обычно обозначаемых одним и тем же символом \mathcal{F}) таких, что имеется отображение $\mathcal{F} : \text{Ob}(C_1) \rightarrow \text{Ob}(C_2)$ и для всех $X, Y \in \text{Ob}(C_1)$ имеется другое отображение $\mathcal{F} : \text{Hom}_{C_1}(X; Y) \rightarrow \text{Hom}_{C_2}(\mathcal{F}(X); \mathcal{F}(Y))$ такие, что

$$\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g), \quad \mathcal{F}(\text{Id}_X) = \text{Id}_{\mathcal{F}(X)},$$

для всех $f \in \text{Hom}_{C_1}(X; Y)$ и $g \in \text{Hom}_{C_1}(Y; Z)$. Весь функтор обозначается символом $\mathcal{F} : C_1 \rightarrow C_2$.

В рамках формализма теории категорий отображение уплощения можно охарактеризовать следующим образом. Пусть Geom — категория, объектами которой являются геометрические пространства¹⁶ (M, \mathbf{g}, ∇) , а морфизмами которой являются гладкие отображения. Далее, пусть Diff — другая категория. Ее объектами являются гладкие многообразия, а морфизмами — гладкие отображения. Определим стирающий функтор $\mathcal{F} : \text{Geom} \rightarrow \text{Diff}$, который «стирает» информацию о геометрии подлежащего многообразия, т. е. если $f : (M_1, \mathbf{g}_1, \nabla_1) \rightarrow (M_2, \mathbf{g}_2, \nabla_2)$ — морфизм категории Geom , то $\mathcal{F}(f) : M_1 \rightarrow M_2$ является морфизмом категории Diff . Здесь морфизм f преобразует точки и подмножества одного геометрического пространства в точки и подмножества другого геометрического пространства, в то время как морфизм $\mathcal{F}(f)$ действует лишь на уровне подлежащих гладких многообразий. Тогда, используя стирающий функтор, определим отображение уплощения λ_R как морфизм $\lambda_R : (M_R, \mathbf{G}, \nabla) \rightarrow (M_R, \mathbf{g}|_{S_R}, \nabla|_{S_R})$, применение стирающего функтора к которому дает тождественный морфизм, то есть $\mathcal{F}(\lambda_R) = \text{Id}_{M_R} : M_R \rightarrow M_R$.

3.2. Обобщенная деформация

Использование неевклидовой формы позволяет определить кинематику самонапряженного тела подобно классическому подходу. Действительно, пусть S_R — неевклидова форма, рассматриваемая как образ вложения $\varkappa_R : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}$ тела \mathfrak{B} в соответствующий неевклидов аналог \mathbb{R} физического пространства¹⁷. Если $\varkappa : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{E}$ — некоторая «евклидова» конфигурация, образ которой равен \mathcal{S} , то под обобщенной деформацией неевклидовой отсчетной формы S_R в евклидову актуальную форму \mathcal{S} будем понимать композицию

$$\lambda := \widehat{\varkappa} \circ \widehat{\varkappa}_R^{-1} : S_R \rightarrow \mathcal{S}. \quad (3.1)$$

С другой стороны, используя отображение уплощения, можно представить такое же отображение λ как композицию

$$\lambda = \gamma \circ \lambda_R : S_R \rightarrow \mathcal{S}. \quad (3.2)$$

Здесь $\lambda_R : S_R \rightarrow \mathcal{S}_R$ — отображение уплощения, а $\gamma : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}$ — «евклидова» деформация. Таким образом, деформация неевклидовой отсчетной формы в евклидову актуальную форму состоит из уплощения неевклидовой формы, т. е. вложения в евклидово пространство \mathcal{E} , и последующей евклидовой деформации, которая преобразует формы в евклидовом пространстве.

¹⁶В упорядоченном наборе (M, \mathbf{g}, ∇) первый элемент соответствует подлежащему многообразию, а \mathbf{g} и ∇ есть, соответственно, метрика и связность на M .

¹⁷На рис. 1.2 пространству \mathbb{R} соответствует сфера.

Соотношение (3.2) могло бы показаться тривиальной переформулировкой равенства (3.1), в которой λ_R — тождественное отображение. В действительности, с геометрической точки зрения это не так. Для уяснения обстоятельств, позволивших перейти к равенству (3.2), следует все отображения, составляющие композицию (3.1), рассматривать как морфизмы категории Geom . Далее, вспомним, что евклидова форма \mathcal{S}_R является образом евклидовой конфигурации $\varkappa_R : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{E}$ (обратите внимание, здесь нижний индекс R , а не \mathbb{R}). Тогда, вставляя тождественный морфизм $\text{Id}_{\mathfrak{B}} = \widehat{\varkappa}_R^{-1} \circ \widehat{\varkappa}_R : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$ между отображениями $\widehat{\varkappa}_R^{-1}$ и $\widehat{\varkappa}$, получаем из (3.1) формулу (3.2):

$$\lambda = \widehat{\varkappa} \circ \widehat{\varkappa}_R^{-1} \circ \widehat{\varkappa}_R \circ \widehat{\varkappa}_R^{-1} = \gamma \circ \lambda_R,$$

где $\gamma = \widehat{\varkappa} \circ \widehat{\varkappa}_R^{-1} : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}$ — деформация евклидовых форм, а $\lambda_R := \widehat{\varkappa}_R \circ \widehat{\varkappa}_R^{-1} : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}_R$ — искомое отображение уплощения.

Таким образом, в рамках категории Geom отображение λ переводит неевклидово отсчетное состояние в актуальное евклидово напряженное состояние. Каждое из этих состояний формализуется в чисто геометрических терминах, а поля, характеризующие отсчетное и актуальное состояния, трансформируются друг в друга посредством операций прямого и обратного образов. Вместе с тем стирающий функтор \mathcal{F} , примененный к λ , дает морфизм категории Diff , $\mathcal{F}(\lambda) : M_R \rightarrow M$, между подлежащими многообразиями форм, в рамках которого операции прямого и обратного образов пересчитывают лишь дифференциальные свойства полей на подлежащих многообразиях.

3.3. Координатное представление обобщенной деформации

Рассмотрим представление обобщенной деформации $\lambda : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}$ в локальных координатах. Хотя λ является гладким отображением многообразий и его координатное представление может быть рассмотрено с общих позиций теории гладких многообразий, имеется особенность, связанная с тем, что подструктуры M_R и M области определения $\mathcal{S}_R = (M_R, \mathbb{G}, \nabla)$ и области прибытия $\mathcal{S} = (M, \mathbf{g}|_{\mathcal{S}}, \nabla|_{\mathcal{S}})$ являются n -мерными подмногообразиями \mathcal{E} .

Для многообразия M_R существует семейство $\{(U_X^R, \varphi_X^R)\}_{X \in M_R}$ карт из максимального атласа пространства \mathcal{E} такое, что [39, теорема 5.8]

- для любой точки $X \in M_R$ справедливо включение $X \in U_X^R$, и, таким образом, семейство $\{U_X^R\}_{X \in M_R}$ покрывает M_R ,
- пересечение $M_R \cap U_X^R$ является n -срезкой U_X^R .

Последнее условие означает, что для всякой точки $Y \in U_X^R$ образ $\varphi_X(Y)$ имеет нулевыми последние $3-n$ координат¹⁸. Таким образом, семейство $\mathbb{A}_{M_R} = \{(M_R \cap U_X^R, \pi \circ \varphi_X^R|_{M_R \cap U_X^R})\}_{X \in M_R}$ является гладким атласом на M_R . Здесь $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^n$ — проекция на первые n координат. Отбрасывая повторяющиеся карты $(M_R \cap U_X^R, \pi \circ \varphi_X^R|_{M_R \cap U_X^R})$ и обозначая через $U_\alpha = M_R \cap U_X^R$, $\varphi_\alpha = \pi \circ \varphi_X^R|_{M_R \cap U_X^R}$, элементы оставшихся карт, окончательно приходим к следующему представлению для атласа \mathbb{A}_{M_R} : $\mathbb{A}_{M_R} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$. Хотя упоминание о гладкой структуре объемлющего пространства было стерто из этого атласа, следует иметь в виду, что на самом деле карты этого атласа были получены из карт физического пространства. Аналогичные рассуждения, примененные к многообразию M , дают атлас $A_M = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in J}$.

Пусть теперь $X \in \mathcal{S}_R$ — некоторая точка неевклидовой формы. В силу непрерывности λ , существует пара карт (U, φ) и (V, ψ) из гладких структур \mathcal{S}_R и \mathcal{S} такая, что $X \in U$ и $\lambda(U) \subset V$. Тогда композиция

$$\tilde{\lambda} = \psi \circ \lambda \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V), \quad \tilde{\lambda} : (\mathbb{q}^1, \dots, \mathbb{q}^n) \mapsto (\mathbb{q}^1, \dots, \mathbb{q}^n), \quad (3.3)$$

соответствует координатному представлению λ в окрестности X . По определению, она является отображением между открытыми подмножествами \mathbb{R}^n .

3.4. Некоторые замечания о представлении реперов

Поскольку неевклидова форма \mathcal{S}_R рассматривается как отдельное многообразие, приходится определять абстрактные координатный репер $(\partial_{\mathbb{q}^A})_{A=1}^n$ и корепер $(d\mathbb{q}^A)_{A=1}^n$, порожденные локальными координатами $(\mathbb{q}^A)_{A=1}^n$. Иначе обстоит дело в случае евклидовой формы \mathcal{S} , поскольку она рассматривается как подпространство физического пространства \mathcal{E} .

Локальные координаты $(\mathbb{q}^A)_{A=1}^n$ на \mathcal{S} порождают абстрактные поля $(\partial_{\mathbb{q}^A})_{A=1}^n$ и $(d\mathbb{q}^A)_A^n$ координатного репера и корепера. С другой стороны, каноническая инъекция $\iota_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{E}$ индуцирует касательное отображение $T\iota_{\mathcal{S}} : T\mathcal{S} \rightarrow T\mathcal{E}$, которое является инъективным линейным отображением на каждом

¹⁸Для трехмерного тела ($n = 3$) локальные координаты точек евклидовых форм полностью определяются тройками чисел.

касательном слое: $T_x \iota_S \in \text{Hom}(T_x \mathcal{S}; \mathcal{V})$. По этой причине касательное пространство $T_x \mathcal{S}$ может быть отождествлено с n -мерным векторным подпространством \mathcal{V} . В силу этого, полагаем $e_A|_x := T_x \iota_S[\partial_{q^A}]$, что приводит к семейству $(e_A)_{A=1}^n$ векторных полей $e_A : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{V}$, касательных к \mathcal{S} . Это семейство есть не более чем образ абстрактного локального репера $(\partial_{q^A})_{A=1}^n$ при вложении многообразия M , подлежащего для \mathcal{S} , в физическое пространство.

3.5. Градиент обобщенной деформации

Если $\lambda : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}$ — обобщенная деформация и если $X \in \mathcal{S}_R$ — некоторая точка отсчетной формы, то обобщение градиента евклидовой деформации представлено касательным отображением $T_X \lambda \in \text{Hom}(T_X \mathcal{S}_R; T_{\lambda(X)} \mathcal{S})$. Это — линейное отображение, которое в координатах $(q^A)_{A=1}^n$ и $(q^A)_{A=1}^n$ на формах \mathcal{S}_R и \mathcal{S} , определенных в окрестностях X и $\lambda(X)$ соответственно, имеет следующее диадное представление:

$$T_X \lambda = \left. \frac{\partial q^A}{\partial Q^B} \right|_X e_A \otimes dq^B,$$

где $\frac{\partial q^A}{\partial Q^B}$ — частные производные координатного представления (3.3). Таким образом, приходим к семейству $\{T_X \lambda\}_{X \in \mathcal{S}_R}$ касательных отображений. По нему синтезируется глобальное касательное отображение $T\lambda : T\mathcal{S}_R \rightarrow T\mathcal{S}$, которое действует между касательными расслоениями $T\mathcal{S}_R$ и $T\mathcal{S}$.

Можно получить простейшее координатное представление для градиента $T\lambda$ обобщенной деформации, которое аналогично соответствующему представлению градиента евклидовой деформации, используемому в ряде монографий по теории упругости [50]. Это представление может быть получено путем переноса локальных координат из актуальной формы \mathcal{S} на отсчетную \mathcal{S}_R следующим способом.

Пусть $\mathbb{A}_{\mathcal{S}} = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in J}$ — гладкий атлас на \mathcal{S} , индуцированный криволинейными координатами из \mathcal{E} . Здесь множество $V_\beta \subset \mathcal{S}$ открыто в \mathcal{S} , а вся совокупность $\{V_\beta\}_{\beta \in J}$ образует открытое покрытие \mathcal{S} . Более того, для любого $\beta \in J$ отображение

$$\psi_\beta : V_\beta \rightarrow O_\beta, \quad \psi_\beta(x) = (q^1, \dots, q^n)$$

является гомеоморфизмом между V_β и открытым подмножеством O_β пространства \mathbb{R}^n .

Для каждого $\beta \in J$ положим

$$U_\beta = \lambda^{-1}(V_\beta)$$

и

$$\varphi_\beta = \psi_\beta \circ \lambda|_{U_\beta} : U_\beta \rightarrow O_\beta.$$

Тогда $U_\beta \subset \mathcal{S}_R$ — открытое множество, семейство $\{U_\beta\}_{\beta \in J}$ образует покрытие \mathcal{S}_R , а φ_β — гомеоморфизм. Следовательно, совокупность $\mathbb{A}_{\mathcal{S}_R} = \{(U_\beta, \varphi_\beta)\}_{\beta \in J}$ является гладким атласом на \mathcal{S}_R . Это означает, что точки из \mathcal{S}_R и \mathcal{S} характеризуются одинаковыми координатами $(q^A)_{A=1}^n$. Рисунок 3.1 иллюстрирует идею такой арифметизации \mathcal{S}_R .

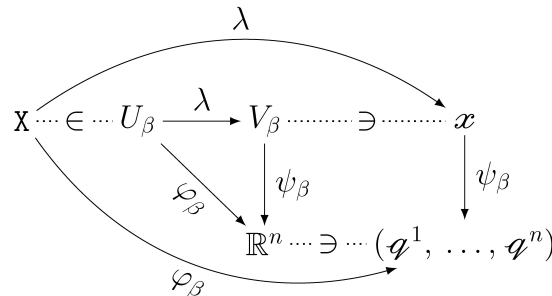


Рис. 3.1. Специальная арифметизация неевклидовой формы \mathcal{S}_R
 Fig. 3.1. Special arithmetization of non-Euclidean shape \mathcal{S}_R

Рассмотрим обобщенную деформацию λ в паре карт (U_β, φ_β) и (V_β, ψ_β) :

$$\tilde{\lambda} = \psi_\beta \circ \lambda \circ \varphi_\beta^{-1}.$$

Раскрывая определение φ_β и принимая во внимание, что

$$\lambda \circ \tilde{\lambda}^{-1}|_{V_\beta} = \iota_{V_\beta} : V_\beta \hookrightarrow \mathcal{S},$$

где ι_{V_β} — каноническая инъекция, получаем

$$\tilde{\lambda} = \psi_\beta \circ \iota_{V_\beta} \circ \psi_\beta^{-1} = \text{Id}_{O_\beta}.$$

Следовательно, координатное представление λ является тождественным отображением.

Пусть $(e_A)_{A=1}^n$ — поле локальных базисов, которое соответствует локальным координатам $(q^A)_{A=1}^n$ на \mathcal{S} , а $(\partial_{q^A})_{A=1}^n$ — локальный репер на \mathcal{S}_R , порожденный теми же локальными координатами $(q^A)_{A=1}^n$. Этим реперам соответствуют кореперы $(E^A)_{A=1}^n$ и $(dq^A)_{A=1}^n$. Поскольку относительно карт (U_β, φ_β) и (V_β, ψ_β) справедливо соотношение $\frac{\partial \lambda^A}{\partial q^B} = \delta_B^A$, то приходим к равенствам

$$T\lambda = \delta_B^A e_A \otimes dq^B = e_A \otimes dq^A.$$

Таким образом, матрица градиента в каждой точке неевклидовой формы совпадает с единичной матрицей.

3.6. Имплант

Главная линейная часть отображения λ_R в точке $X \in \mathcal{S}_R$ определяется касательным отображением, которое в настоящей работе обозначается через $K_X = T_X \lambda_R : T_X \mathcal{S}_R \rightarrow T_X \mathcal{S}_R$, где $X = \lambda_R(X)$. Следуя терминологии, используемой в монографии [18], будем называть отображение K_X *имплантом*. В локальных координатах имплант имеет следующее диадное представление:

$$K_X = \frac{\partial Q^A}{\partial q^B} E_A \otimes dq^B.$$

Здесь $(Q^A)_{A=1}^n$ — локальные координаты на неевклидовой форме \mathcal{S}_R , а $(q^A)_{A=1}^n$ — локальные координаты на евклидовой форме \mathcal{S}_R . Заметим, что хотя обе эти формы имеют одно и то же подлежащее многообразие M_R , локальные координаты на них могут быть выбраны различными. Семейство $(E_A)_{A=1}^n$ является полем локальных базисов на \mathcal{S}_R .

Поскольку по построению форма \mathcal{S}_R глобально единообразна, имплант K_X преобразует инфинитезимальную единообразную окрестность точки X в инфинитезимальную неединообразную (в общем случае) окрестность точки $X = \lambda_R(X)$. Значит, имплант действует подобно обратному отображению к локальной деформации H_X , которая преобразует инфинитезимальную неединообразную окрестность в единообразную. Вместе с тем H_X^{-1} и K_X являются отображениями между разными евклидовыми векторными пространствами:

$$H_X^{-1} : (\mathcal{U}, g_{\mathcal{U}}) \rightarrow (T_X M_R, g|_{M_R})$$

для обратного отображения к локальной деформации и

$$K_X : (T_X M_R, G_X) \rightarrow (T_X M_R, g|_{M_R}),$$

для импланта. В явном виде соотношение между имплантом и локальной деформацией может быть выражено как

$$H_X K_X = \tilde{I}_X,$$

где $\tilde{I}_X = e_A \otimes dq^A$ — изометрия. В этом диадном представлении семейство $(e_A)_{A=1}^n$ отвечает базису \mathcal{U} .

3.7. Сравнение с классическим подходом

Целесообразно сравнить подход, связанный с построением глобальной натуральной формы, со стандартными рассуждениями, в которых такая форма не используется. Классическая теория необратимых деформаций оперирует семейством $\{\mathcal{S}^{(X)}\}_{X \in \mathcal{S}_R}$ евклидовых форм — образов разгрузочных деформаций $\gamma^{(X)} : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}^{(X)}$. Если \mathcal{S} — актуальная форма, а $\gamma : \mathcal{S}_R \rightarrow \mathcal{S}$ — соответствующая деформация, то для каждой точки $X \in \mathcal{S}_R$ композиция

$$\chi^{(X)} = \gamma \circ [\gamma^{(X)}]^{-1} : \mathcal{S}^{(X)} \rightarrow \mathcal{S} \tag{3.4}$$

отвечает деформации, которая преобразует локально единообразную форму $\mathcal{S}^{(X)}$ в актуальную форму \mathcal{S} .

Переходя к касательному отображению в точке $Y \in \mathcal{S}_R$, получаем равенство

$$T_{\gamma^{(X)}(Y)} \chi^{(X)} = F_Y \circ T_{\gamma^{(X)}(Y)} [\gamma^{(X)}]^{-1} : T_{\gamma^{(X)}(Y)} \mathcal{S}^{(X)} \rightarrow T_{\gamma(Y)} \mathcal{S},$$

где $F_Y = T_Y \gamma$ — градиент деформации. Полагая теперь $Y = X$ и используя определение (2.2) локальной деформации, приходим к соотношению

$$D_X = F_X \circ H_X^{-1} : \mathcal{U} \rightarrow T_{\gamma(X)} \mathcal{S}. \tag{3.5}$$

Тензор D_X в левой части этой формулы определен как $D_X = T_{\gamma^{(X)}(Y)} \chi^{(X)}|_{Y=X}$. Будем называть его *полной дисторсией*.

Рассмотрим гиперупругое тело. Его отклик характеризуется плотностью упругой энергии (2.1), которую в рамках настоящих рассуждений можно представить следующей зависимостью:

$$w = W(X, \mathbf{D}_X \mathbf{H}_X).$$

Поскольку как форма \mathcal{S}_R , так и поле \mathbf{H} фиксированы, можно положить

$$\widehat{W}(X, \mathbf{D}_X) := W(X, \mathbf{D}_X \mathbf{H}_X),$$

и отклик принимает вид

$$w = \widehat{W}(X, \mathbf{D}_X).$$

Таким образом, отклик был переопределен относительно семейства локально единообразных форм: аргументом отклика теперь является тензор полной дисторсии. Вместе с тем следует иметь в виду, что поле \widehat{W} рассматривается на евклидовой «промежуточной» форме \mathcal{S}_R , которая в общем случае не единообразна.

Проведем то же самое рассуждение в рамках геометрического подхода. Соотношение (3.2) является аналогом для (3.4), а формула

$$T_X \lambda = \mathbf{F}_X \circ \mathbf{K}_X$$

служит аналогом для (3.5). Поскольку поля \mathbf{H}_X^{-1} и \mathbf{K}_X равны с точностью до изометрии $\widetilde{\mathbf{I}}_X$, можно считать тензоры \mathbf{D}_X и $T_X \lambda$ также равными (что допустимо, ибо отклик инвариантен по отношению к изометрии). В этом случае¹⁹

$$w = \widehat{\widehat{W}}(x, T_X \lambda),$$

и отклик был переопределен относительно неевклидовой единообразной формы \mathcal{S}_R , т. е. полученная зависимость для отклика рассматривается не в точках самонапряженной евклидовой промежуточной формы \mathcal{S}_R , а в точках неевклидовой отсчетной формы.

Заключение

Дифференциально-геометрический язык может быть плодотворно использован для моделирования несовместных деформаций в твердых телах. Он позволяет, в частности, отказаться от явного использования семейства локально единообразных евклидовых форм, заменяя последнее одной неевклидовой единообразной формой. Благодаря такой замене удастся сохранить отсчетное описание состояния тела с несовместными деформациями, что дает, в свою очередь, возможность использовать привычную методологию нелинейной механики континуума.

Геометрия неевклидовой формы синтезируется на основе тензорного поля локальных деформаций (2.3), значение которого в каждой точке исходной формы является обратимым линейным оператором (2.2), переводящим представительный объем, окружающий эту точку, в натуральное состояние. Вместе с тем в классической литературе по теории дефектов (см., к примеру, [70]) отсутствует способ определения локальных деформаций, апеллирующий к некоторому эксперименту. Чтобы восполнить этот пробел, в работе развита идея локальной разгрузки.

Хотя риманова метрика на неевклидовой отсчетной форме однозначно восстанавливается по значениям поля локальных деформаций (формула (2.6)), для аффинной связности это не так. В работе рассмотрены различные способы синтеза материальной связности. Используя их, можно получить связность Леви-Чивита (с нулевыми кручением и неметричностью), связность Вайценбока (с нулевыми кривизной и неметричностью) и связность Вейля (с нулевым кручением). В рамках теории простых тел (т. е. тел, отклик которых характеризуется лишь первым градиентом деформации) при известном поле локальных деформаций \mathbf{H} все эти связности совершенно равноправны и, по-видимому, нет никакого способа предпочесть одну связность другой, опираясь лишь на поле \mathbf{H} . Если же дополнительно известно, что в теле присутствуют дефекты определенного типа, то тогда удастся сделать однозначный выбор: связность Вайценбока соответствует непрерывному распределению дислокаций, связность Леви-Чивита характеризует тело с дисклинациями, а связность Вейля — тело с метрическими аномалиями.

Отличие одной связности от другой может быть охарактеризовано тензором конторсии (2.26), имеющим различный геометрический смысл для каждой пары материальных связностей. В настоящей работе в качестве одной из связностей выбиралась связность Леви-Чивита, которая сравнивалась с двумя другими связностями: Вайценбока и Вейля. Отличие связности Вайценбока от связности Леви-Чивита вызвано различными геометриями «в малом». В случае первой связности малый элемент тела является плоским, а в случае связности Леви-Чивита — искривленным.

¹⁹Заметим, что выполненные преобразования корректны в силу свойства локальности отклика.

В свою очередь, отличие связности Вейля от связности Леви-Чивита вызвано различным поведением римановой формы объема при ее параллельном переносе вдоль кривой на теле. Если на отсчетной форме задана связность Леви-Чивита, то форма объема ковариантно постоянна, т. е. не меняется при параллельном переносе. В случае связности Вейля это не так: форма объема эволюционирует при параллельном переносе вдоль кривой, что физически интерпретируется как наличие метрических аномалий (точечных дефектов, неоднородного поля температур).

Различие между тремя рассмотренными связностями несущественно в рамках функционала отклика, поскольку последний использует лишь метрическую информацию, которая одна и та же для всех связностей. Вместе с тем при формулировке уравнений баланса импульса в отсчетном описании появляются дополнительные слагаемые, которые могут быть интерпретированы как фиктивные силы, возникающие в силу наличия несовместных деформаций [26]. Для получения явного выражения этих фиктивных сил необходимо учесть контрессию, которая присутствует в выражениях для связностей Вайценбока и Вейля. Таким образом, связности Вайценбока и Вейля дают более полное описание несовместных деформаций, чем связность Леви-Чивита: вместе с метрическими данными они содержат информацию о пространственном расположении представительных объемов, что определяет дополнительную часть уравнений баланса импульса в отсчетном описании.

Процедура синтеза неевклидовой формы существенно опирается на выбор некоторой промежуточной формы, с которой стирается геометрия. Такой выбор неоднозначен и в общем случае может приводить к различным геометриям на теле. Вместе с тем при некоторых предположениях о связи полей локальных деформаций, соответствующих двум формам, геометрии на таких формах оказываются неразличимыми в том смысле, что соответствующие инварианты связностей отличаются на обратный образ.

Литература

- [1] Норден А.П. (ред.) Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. Москва: ГИТТЛ, 1956. 530 с. URL: <http://pyrkov-professor.ru/default.aspx?tabid=181&ArticleId=578>.
- [2] Capecchi D., Ruta G. Beltrami's continuum mechanics in non-Euclidean spaces // *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*. 2015. Vol. 15, Issue 1. Pp. 703–704. DOI: <http://doi.org/10.1002/pamm.201510341>.
- [3] Maugin G.A. *Continuum Mechanics Through the Twentieth Century: A Concise Historical Perspective*. Springer Dordrecht, 2013. XV, 314 p. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-94-007-6353-1>.
- [4] Born M. Die Theorie des starren Elektrons in der Kinematik des Relativitätsprinzips // *Annalen der Physik*. 1909. Vol. 335, Issue 11, pp. 1–56. DOI: <http://doi.org/10.1002/andp.19093351102>.
- [5] Born M. Zur Kinematik des starren Körpers im System des Relativitätsprinzips // *Göttinger Nachrichten*. 1910. Vol. 2. Pp. 161–179. URL: https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN252457811_1910.
- [6] Herglotz G. Über die Mechanik des deformierbaren Körpers vom Standpunkte der Relativitätstheorie // *Annalen der Physik*. 1911. Vol. 341, Issue 13. Pp. 493–533. DOI: <http://dx.doi.org/10.1002/andp.19113411303>.
- [7] Nordström G. De gravitatietheorie van Einstein en de mechanica van Herglotz // *Versl. Afdeeling Naturk.* 1917. Vol. 25. Pp. 836–843.
- [8] Bilby B., Bullough R., Smith E. Continuous distributions of dislocations: a new application of the methods of non-Riemannian geometry // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 1955. Vol. 231, Issue 1185. Pp. 263–273. DOI: <http://doi.org/10.1098/rspa.1955.0171>.
- [9] Kondo K. Non-Riemannian geometry of imperfect crystals from a macroscopic viewpoint. // In: Kondo K. (Ed.) *Memoirs of the Unifying Study of the Basic Problems in Engineering Science by Means of Geometry*, 1955. Vol. 1. Pp. 6–17. Division D-I, Gakujutsu Bunken Fukyo-Kai.
- [10] Kondo K. Geometry of elastic deformation and incompatibility // In: Kondo K. (Ed.) *Memoirs of the Unifying Study of the Basic Problems in Engineering Science by Means of Geometry*, 1955. Vol. 1. Pp. 5–17. Division C, Gakujutsu Bunken Fukyo-Kai.
- [11] Kondo K. Non-Riemannian and Finslerian approaches to the theory of yielding // *International Journal of Engineering Science*. 1963. Vol. 1, Issue 1. Pp. 71–88. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(63\)90025-9](https://doi.org/10.1016/0020-7225(63)90025-9).
- [12] Kondo K. On the analytical and physical foundations of the theory of dislocations and yielding by the differential geometry of continua // *International Journal of Engineering Science*. 1964. Vol. 2, Issue 3. Pp. 219–251. DOI: [http://doi.org/10.1016/0020-7225\(64\)90022-9](http://doi.org/10.1016/0020-7225(64)90022-9).
- [13] Noll W. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1967. Vol. 27. Issue 1. Pp. 1–32. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF00276433>.

- [14] Wang C.-C. On the geometric structures of simple bodies, a mathematical foundation for the theory of continuous distributions of dislocations // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1967. Vol. 27. Issue 1. Pp. 33–94. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF00276434>.
- [15] Maugin G.A. *Material inhomogeneities in elasticity*. New York: CRC Press, 1993. 292 p. DOI: <http://doi.org/10.1201/9781003059882>.
- [16] Marsden J.E., Hughes T.J. *Mathematical foundations of elasticity*. New York: Courier Corporation, 1994. 576 p. URL: https://authors.library.caltech.edu/25074/1/Mathematical_Foundations_of_Elasticity.pdf.
- [17] Epstein M. *The Geometrical Language of Continuum Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 312 pp. DOI: <http://doi.org/10.1017/cbo9780511762673>.
- [18] Epstein M., Elzanowski M. *Material inhomogeneities and their evolution: A geometric approach*. Berlin, Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2007. 261 p. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-3-540-72373-8>.
- [19] Ozakin A., Yavari A. A geometric theory of thermal stresses // *Journal of Mathematical Physics*. 2010. Vol. 51, Issue 3. P. 032902. DOI: <http://dx.doi.org/10.1063/1.3313537>.
- [20] Yavari A., Goriely A. Riemann–Cartan Geometry of Nonlinear Dislocation Mechanics // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 2012. Vol. 205, Issue 1. Pp. 59–118. DOI: <http://doi.org/10.1007/s00205-012-0500-0>.
- [21] Yavari A., Goriely A. Weyl geometry and the nonlinear mechanics of distributed point defects // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2012. Vol. 468, Issue 2148. Pp. 3902–3922. DOI: <http://doi.org/10.1098/rspa.2012.0342>.
- [22] Sozio F., Yavari A. Nonlinear mechanics of accretion // *Journal of Nonlinear Science*. 2019. Vol. 29, № 4. Pp. 1813–1863. DOI: <http://doi.org/10.1007/s00332-019-09531-w>.
- [23] Lychev S., Koifman K. *Geometry of Incompatible Deformations: Differential Geometry in Continuum Mechanics*. Berlin: De Gruyter, 2018. 350 p. DOI: <http://doi.org/10.1515/9783110563214>.
- [24] Lychev S.A., Kostin G.V., Lycheva T.N., Koifman K.G. Non-Euclidean Geometry and Defected Structure for Bodies with Variable Material Composition // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1250. P. 012035. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1250/1/012035>.
- [25] Lychev S.A., Koifman K.G. Material Affine Connections for Growing Solids // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2020. Vol. 41, No. 10. Pp. 2034–2052. DOI: <http://doi.org/10.1134/S1995080220100121>.
- [26] Lychev S. A., Koifman K. G. Contorsion of Material Connection in Growing Solids // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2021. Vol. 42, No. 8. Pp. 1852–1875. DOI: <http://doi.org/10.1134/S1995080221080187>.
- [27] Edgar R.G. A Review of Bondi-Hoyle-Lyttleton Accretion // *New Astronomy Reviews*. 2004. Vol. 48. Pp. 843–859. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.newar.2004.06.001>.
- [28] Lander S.K., Andersson N., Antonopoulou D., Watts A.L. Magnetically driven crustquakes in neutron stars // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2015. Vol. 449, Issue 2. Pp. 2047–2058. DOI: <http://doi.org/10.1093/mnras/stv432>.
- [29] Prasanna A. The Role of Space-Time Curvature in the Study of Plasma Processes Near Neutron Stars and Black Holes // *Bulletin of the Astronomical Society of India*, 1978. Vol. 6, Issue 88. URL: https://www.researchgate.net/publication/234299037_The_Role_of_Space-Time_Curvature_in_the_Study_of_Plasma_Processes_Near_Neutron_Stars_and_Black_Holes.
- [30] Epstein M., Burton D.A., Tucker R. Relativistic anelasticity // *Classical and Quantum Gravity*. 2006. Vol. 23, No. 10. Pp. 3545–3571. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/23/10/020>.
- [31] Weingarten J. Sulle superficie di discontinuita nella teoria della elasticita dei corpi solidi // *Rend. Lincei, Serie 5a*, 1901. Vol. X. Pp. 57–60. URL: <https://zbmath.org/32.0799.01>.
- [32] Volterra V. Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes // *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 1907. 3-e série, Vol. 24. Pp. 401–517. DOI: <http://doi.org/10.24033/asens.583>.
- [33] Frenkel J. Zur Theorie der Elastizitätsgrenze und der Festigkeit kristallinischer Körper // *Zeitschrift für Physik*, 1926. Vol. 37, No. 7-8. Pp. 572–609. DOI: <http://doi.org/10.1007/bf01397292>.
- [34] Orowan E. Zur Kristallplastizität. I // *Zeitschrift für Physik*, 1934. Vol. 89, No. 9-10. Pp. 605–613. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF01341478>.
- [35] Taylor G.I. The Mechanism of Plastic Deformation of Crystals. Part I. Theoretical // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 1934. Vol. 145, Issue 855. Pp. 362–387. DOI: <http://doi.org/10.1098/RSPA.1934.0106>.
- [36] Taylor G.I. The Mechanism of Plastic Deformation of Crystals. Part II. Comparison with Observations // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1934. Vol. 145, Issue 855. Pp. 388–404. DOI: <http://doi.org/10.1098/RSPA.1934.0107>.
- [37] Polanyi M. Über eine Art Gitterstörung, die einen Kristall plastisch machen könnte // *Zeitschrift für Physik*, 1934. Vol. 89, No. 9-10. Pp. 660–664. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF01341481>.

- [38] Eckart C. The thermodynamics of irreversible processes. IV. The theory of elasticity and anelasticity // *Physical Review*, 1948. Vol. 73. Issue 4. Pp. 373–382. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRev.73.373>.
- [39] Lee J.M. *Introduction to Smooth Manifolds*. New York: Springer, 2012. URL: <http://sites.math.washington.edu/lee/Books/ISM>.
- [40] Rudolph G., Schmidt M. *Differential Geometry and Mathematical Physics. Part I. Manifolds, Lie Groups and Hamiltonian Systems*. New York: Springer Science+Business Media Dordrecht, 2013. 762 p. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-94-007-5345-7>.
- [41] Постников М.М. *Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра*. Москва: URSS, 2017. 400 с. URL: <http://alexandr4784.narod.ru/pmmgeo2.html>.
- [42] Постников М.М. *Лекции по геометрии. Семестр I. Аналитическая геометрия*. Москва: URSS, 2017. 416 с. URL: <http://alexandr4784.narod.ru/pmmgeo1.html>.
- [43] Honerkamp J., Römer H. *Theoretical Physics: A Classical Approach*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1993. Available at: <https://books.google.ru/books?id=TXn1CAAAQBAJ&printsec=frontcover&hl=ru#v=onepage&q&f=false>.
- [44] Truesdell C., Noll W. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. Antman S.S. (Ed.). New York: Springer Science & Business Media, 2004. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-3-662-10388-3>.
- [45] Gurtin M.E., Fried E., Anand L. *The mechanics and thermodynamics of continua*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 718 p. DOI: <http://doi.org/10.1017/cbo9780511762956>.
- [46] Noll W. The Foundations of Classical Mechanics in the Light of Recent Advances in Continuum Mechanics // In: *The Foundations of Mechanics and Thermodynamics*. Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 31–47. DOI: http://doi.org/10.1007/978-3-642-65817-4_2.
- [47] Lee J.M. *Introduction to Topological Manifolds*. New York: Springer, 2011. URL: https://archive.org/details/springer_10.1007-978-0-387-22727-6.
- [48] Lee J.M. *Introduction to Riemannian Manifolds*. Cham: Springer, 2018. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-3-319-91755-9>.
- [49] Yang W.H., Feng W.W. On Axisymmetrical Deformations of Nonlinear Membranes // *Journal of Applied Mechanics*, 1970. Vol. 37, Issue 4. Pp. 1002–1011. DOI: <http://doi.org/10.1115/1.3408651>.
- [50] Лурье А.И. *Нелинейная теория упругости*. Москва: Наука, 1980. 512 с. URL: <https://libcats.org/book/449646>.
- [51] Жермен П. *Курс механики сплошных сред*. Москва: Высшая школа, 1983. 248 с. URL: <https://libcats.org/book/757877>.
- [52] Teodosiu C. *Elastic Models of Crystal Defects*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1982. 336 p. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-3-662-11634-0>.
- [53] Yavari A. Compatibility Equations of Nonlinear Elasticity for Non-Simply-Connected Bodies // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2013. Vol. 209. Pp. 237–253. DOI: <http://doi.org/10.1007/S00205-013-0621-0>.
- [54] Постников М.М. *Лекции по геометрии. Семестр V. Риманова геометрия*. Москва: Факториал, 1998. 496 с. URL: <http://alexandr4784.narod.ru/pmm52.html>.
- [55] Chern S.S., Chen W.H., Lam K.S. *Lectures on Differential Geometry*. Singapore: World Scientific Publishing, 1999. 356 p. DOI: <https://doi.org/10.1142/3812>.
- [56] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. *Современная геометрия: Методы и приложения*. Москва: Наука, 1986. 760 с. URL: <http://alexandr4784.narod.ru/dubrovinn.html>.
- [57] Levi-Civita T. Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana // *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1916. Vol. 42, Issue 1. Pp. 173–204. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF03014898>.
- [58] Карган Э. *Пространства аффинной, проективной и конформной связности*. Казань: Изд-во Казанского университета, 1962. 210 с. URL: <https://libcats.org/book/444677>.
- [59] Fernandez O.E., Bloch A.M. The Weitzenböck Connection and Time Reparameterization in Nonholonomic Mechanics // *Journal of Mathematical Physics*, 2011. Vol. 52, Issue 1. P. 012901. DOI: <http://doi.org/10.1063/1.3525798>.
- [60] Dhas B., Srinivasa A., Roy D. A Weyl geometric model for thermo-mechanics of solids with metrical defects // *arXiv*, 2019. DOI: <http://doi.org/10.48550/arXiv.1904.06956>.
- [61] Saa A. Volume-forms and minimal action principles in affine manifolds // *Journal of Geometry and Physics*, 1995. Vol. 15, Issue 2. Pp. 102–108. DOI: [http://doi.org/10.1016/0393-0440\(94\)00006-P](http://doi.org/10.1016/0393-0440(94)00006-P).
- [62] Miri M., Rivier N. Continuum elasticity with topological defects, including dislocations and extra-matter // *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2002. Vol. 35, Number 7. Pp. 1727–1739. DOI: <http://doi.org/10.1088/0305-4470/35/7/317>.
- [63] Roychowdhury A., Gupta A. Non-metric Connection and Metric Anomalies in Materially Uniform Elastic Solids // *Journal of Elasticity*, 2017. Vol. 126. Pp. 1–26. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10659-016-9578-1>.

- [64] Le K.C., Stumpf H. On the determination of the crystal reference in nonlinear continuum theory of dislocations // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 1996. Vol. 452, Issue 1945. Pp. 359–371. DOI: <http://doi.org/10.1098/rspa.1996.0019>.
- [65] Le K.C., Stumpf H. Nonlinear continuum theory of dislocations // International Journal of Engineering Science, 1996. Vol. 34, Issue 3. Pp. 339–358. DOI: [http://doi.org/10.1016/0020-7225\(95\)00092-5](http://doi.org/10.1016/0020-7225(95)00092-5).
- [66] Le K.C., Stumpf H. Strain measures, integrability condition and frame indifference in the theory of oriented media // International Journal of Solids and Structures, 1998. Vol. 35, Issues 9–10. Pp. 783–798. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0020-7683\(97\)00087-5](http://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00087-5).
- [67] Гантмахер Ф.П. Теория матриц. Москва: Наука, 1966. 576 с. URL: <https://studfile.net/preview/4067051>.
- [68] Маклейн С. Категории для работающего математика. Москва: Физматлит, 2004. 154 с. URL: <https://djvu.online/file/LMm0QFShaD5Lq>.
- [69] Мендельсон Э. Введение в математическую логику. Москва: Наука, 1971. 322 с. URL: <https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Mendelson1971ru.pdf>.
- [70] Крёнер Э. Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений. Москва: Мир, 1965. 103 с. URL: <https://libcats.org/book/789336>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-53-87

Submitted: 30.09.2022

Revised: 16.11.2022

Accepted: 05.12.2022

S.A. Lychev

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation.

E-mail: lychevsa@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7590-1389>

K.G. Koifman

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

E-mail: koifman.konstantin@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7891-9995>

Reference shape of bodies with finite incompatible deformations

ABSTRACT

The work develops differential-geometric methods for modeling of finite incompatible deformations of hyperelastic solids. Deformation incompatibility can be caused, for example, by inhomogeneous temperature fields and distributed defects. As a result, residual stresses and distortion of geometric shape of the body occur. These factors determine the critical parameters of modern high-precision technologies, in particular, in additive manufacturing technologies. In this regard, the development of methods for their quantitative description is an urgent problem of modern solid mechanics.

The application of methods of differential geometry is based on the representation of a body as a smooth manifold equipped with a metric and a non-Euclidean connection. This approach allows one to interpret the body as a global stress-free shape and to formulate the physical response and material balance equations with respect to this shape. Within the framework of the geometric method, deformations are characterized by embeddings of non-Euclidean shape into physical space, which is still considered to be Euclidean. Measures of incompatibility are identified with the invariants of the affine connection, namely, torsion, curvature, and nonmetricity, and the connection itself is determined by the type of physical process.

Key words: hyperelasticity; incompatible deformations; residual stresses; non-Euclidean geometry; material metric; material connection; torsion; curvature; nonmetricity; moving frame method.

Citation. Lychev S.A., Koifman K.G. Reference shape of bodies with finite incompatible deformations. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 3–4, pp. 53–87. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-53-87>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Lychev S.A., Koifman K.G., 2022

Sergey A. Lychev — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, leading researcher, Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences, bldg. 1, 101, Vernadsky Avenue, Moscow, 119526, Russian Federation.

Konstantin G. Koifman — tutor in mathematics, Bauman Moscow State Technical University, 5, 2nd Baumanskaya Street, Moscow, 105005, Russian Federation.

References

- [1] Norden A.P. (Ed.) On foundations of geometry. Collection of classical works on Lobachevsky geometry and development of its ideas. Moscow: GITTL, 1956, 530 p. Available at: <http://pyrkov-professor.ru/default.aspx?tabid=181&ArticleId=578>. (In Russ.)
- [2] Capecchi D., Ruta G. Beltrami's continuum mechanics in non-Euclidean spaces. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, vol. 15, issue 1, pp. 703–704. DOI: <http://doi.org/10.1002/pamm.201510341>.
- [3] Maugin G.A. *Continuum Mechanics Through the Twentieth Century: A Concise Historical Perspective*. Springer Dordrecht, 2013, XV, 314 p. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-94-007-6353-1>.
- [4] Born M. Die Theorie des starren Elektrons in der Kinematik des Relativitätsprinzips. *Annalen der Physik*, 1909, vol. 335, issue 11, pp. 1–56. DOI: <http://doi.org/10.1002/andp.19093351102>.
- [5] Born M. Zur Kinematik des starren Körpers im System des Relativitätsprinzips. *Göttinger Nachrichten*, 1910, vol. 2, pp. 161–179. Available at: https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN252457811_1910.
- [6] Herglotz G. Über die Mechanik des deformierbaren Körpers vom Standpunkte der Relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, 1911, vol. 341, issue 13, pp. 493–533. DOI: <http://dx.doi.org/10.1002/andp.19113411303>.
- [7] Nordström G. De gravitatietheorie van Einstein en de mechanica van Herglotz. *Versl. Afdeling Naturk.*, 1917, vol. 25, pp. 836–843.
- [8] Bilby B., Bullough R., Smith E. Continuous distributions of dislocations: a new application of the methods of non-Riemannian geometry. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1955, vol. 231, issue 1185, pp. 263–273. DOI: <http://doi.org/10.1098/rspa.1955.0171>.
- [9] Kondo K. Non-Riemannian geometry of imperfect crystals from a macroscopic viewpoint. In: *Kondo K. (Ed.) Memoirs of the Unifying Study of the Basic Problems in Engineering Science by Means of Geometry*, 1955, vol. 1, pp. 6–17. Division D-I, Gakujutsu Bunken Fukyo-Kai.
- [10] Kondo K. Geometry of elastic deformation and incompatibility. In: *Kondo K. (Ed.) Memoirs of the Unifying Study of the Basic Problems in Engineering Science by Means of Geometry*, 1955, vol. 1, pp. 5–17. Division C, Gakujutsu Bunken Fukyo-Kai.
- [11] Kondo K. Non-Riemannian and Finslerian approaches to the theory of yielding. *International Journal of Engineering Science*, 1963, vol. 1, issue 1, pp. 71–88. DOI: [http://doi.org/10.1016/0020-7225\(63\)90025-9](http://doi.org/10.1016/0020-7225(63)90025-9).
- [12] Kondo K. On the analytical and physical foundations of the theory of dislocations and yielding by the differential geometry of continua. *International Journal of Engineering Science*, 1964, vol. 2, issue 3, pp. 219–251. DOI: [http://doi.org/10.1016/0020-7225\(64\)90022-9](http://doi.org/10.1016/0020-7225(64)90022-9).
- [13] Noll W. Materially uniform simple bodies with inhomogeneities. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1967, vol. 27, issue 1, pp. 1–32. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF00276433>.
- [14] Wang C.-C. On the geometric structures of simple bodies, a mathematical foundation for the theory of continuous distributions of dislocations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1967, vol. 27, no. 1, pp. 33–94. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF00276434>.
- [15] Maugin G.A. *Material inhomogeneities in elasticity*. New York: CRC Press, 1993, 292 p. DOI: <http://doi.org/10.1201/9781003059882>.
- [16] Marsden J.E., Hughes T.J. *Mathematical foundations of elasticity*. New York: Courier Corporation, 1994. 576 p. Available at: https://authors.library.caltech.edu/25074/1/Mathematical_Foundations_of_Elasticity.pdf.
- [17] Epstein M. *The Geometrical Language of Continuum Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010, 312 pp. DOI: <http://doi.org/10.1017/cbo9780511762673>.
- [18] Epstein M., Elzanowski M. *Material inhomogeneities and their evolution: A geometric approach*. Berlin, Heidelberg: Springer Science & Business Media, 2007. 261 p. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-3-540-72373-8>.
- [19] Ozakin A., Yavari A. A geometric theory of thermal stresses. *Journal of Mathematical Physics*, 2010, vol. 51, issue 3, p. 032902. DOI: <http://doi.org/10.1063/1.3313537>.
- [20] Yavari A., Goriely A. Riemann–Cartan Geometry of Nonlinear Dislocation Mechanics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2012, vol. 205, issue 1, pp. 59–118. DOI: <http://doi.org/10.1007/s00205-012-0500-0>.
- [21] Yavari A., Goriely A. Weyl geometry and the nonlinear mechanics of distributed point defects. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2012, vol. 468, issue 2148, pp. 3902–3922. DOI: <http://doi.org/10.1098/rspa.2012.0342>.

- [22] Sozio F., Yavari A. Nonlinear mechanics of accretion. *Journal of Nonlinear Science*, 2019, vol. 29, no. 4, pp. 1813–1863. DOI: <http://doi.org/10.1007/s00332-019-09531-w>.
- [23] Lychev S., Koifman K. Geometry of Incompatible Deformations: Differential Geometry in Continuum Mechanics. Berlin: De Gruyter, 2018. 350 p. DOI: <http://doi.org/10.1515/9783110563214>.
- [24] Lychev S.A., Kostin G.V., Lycheva T.N., Koifman K.G. Non-Euclidean Geometry and Defected Structure for Bodies with Variable Material Composition. *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1250, p. 012035. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1250/1/012035>.
- [25] Lychev S.A., Koifman K.G. Material Affine Connections for Growing Solids. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2020, vol. 41, no. 10, pp. 2034–2052. DOI: <http://doi.org/10.1134/S1995080220100121>.
- [26] Lychev S.A., Koifman K.G. Contorsion of Material Connection in Growing Solids. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2021, vol. 42, no. 8, pp. 1852–1875. DOI: <http://doi.org/10.1134/S1995080221080187>.
- [27] Edgar R.G. A Review of Bondi-Hoyle-Lyttleton Accretion. *New Astronomy Reviews*, 2004, vol. 48, pp. 843–859. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.newar.2004.06.001>.
- [28] Lander S.K., Andersson N., Antonopoulou D., Watts A.L. Magnetically driven crustquakes in neutron stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2015, vol. 449, issue 2, pp. 2047–2058. DOI: <http://doi.org/10.1093/mnras/stv432>.
- [29] Prasanna A. The Role of Space-Time Curvature in the Study of Plasma Processes Near Neutron Stars and Black Holes. *Bulletin of the Astronomical Society of India*, 1978, vol. 6, issue 88. Available at: https://www.researchgate.net/publication/234299037_The_Role_of_Space-Time_Curvature_in_the_Study_of_Plasma_Processes_Near_Neutron_Stars_and_Black_Holes.
- [30] Epstein M., Burton D.A., Tucker R. Relativistic anelasticity. *Classical and Quantum Gravity*, 2006, vol. 23, no. 10, pp. 3545–3571. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/23/10/020>.
- [31] Weingarten J. Sulle superficie di discontinuita nella teoria della elasticita dei corpi solidi. *Accademie dei Lincei, Rendiconte, V. Serie*, 1901, vol. X, pp. 57–60. Available at: <https://zbmath.org/32.0799.01>.
- [32] Volterra V. Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 1907, 3e série, vol. 24, pp. 401–517. DOI: <http://doi.org/10.24033/asens.583>.
- [33] Frenkel J. Zur Theorie der Elastizitätsgrenze und der Festigkeit kristallinischer Körper. *Zeitschrift für Physik*, 1926, vol. 37, no. 7-8, pp. 572–609. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF01397292>.
- [34] Orowan E. Zur Kristallplastizität. I. *Zeitschrift für Physik*, 1934, vol. 89, no. 9-10, pp. 605–613. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF01341478>.
- [35] Taylor G.I. The Mechanism of Plastic Deformation of Crystals. Part I. Theoretical. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1934, vol. 145, issue 855, pp. 362–387. DOI: <http://doi.org/10.1098/rspa.1934.0106>.
- [36] Taylor G.I. The Mechanism of Plastic Deformation of Crystals. Part II. Comparison with Observations. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1934, vol. 145, issue 855, pp. 388–404. DOI: <http://doi.org/10.1098/rspa.1934.0107>.
- [37] Polanyi M. Über eine Art Gitterstörung, die einen Kristall plastisch machen könnte. *Zeitschrift für Physik*, 1934, vol. 89, no. 9-10, pp. 660–664. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF01341481>.
- [38] Eckart C. The thermodynamics of irreversible processes. IV. The theory of elasticity and anelasticity. *Physical Review*, 1948, vol. 73, issue 4, pp. 373–382. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRev.73.373>.
- [39] Lee J.M. Introduction to Smooth Manifolds. New York: Springer, 2012. Available at: <http://sites.math.washington.edu/lee/Books/ISM>.
- [40] Rudolph G., Schmidt M. Differential Geometry and Mathematical Physics. Part I. Manifolds, Lie Groups and Hamiltonian Systems. New York: Springer Science+Business Media Dordrecht, 2013. 762 p. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-94-007-5345-7>.
- [41] Postnikov M.M. Lections on geometry. Semester II. Linear algebra. Moscow: URSS, 2017, 400 p. Available at: <http://alexandr4784.narod.ru/pmmgeo2.html>. (In Russ.)
- [42] Postnikov M.M. Lections on geometry. Semester I. Analytical algebra. Moscow: URSS, 2017, 416 p. Available at: <http://alexandr4784.narod.ru/pmmgeo1.html>. (In Russ.)
- [43] Honerkamp J., Römer H. Theoretical Physics: A Classical Approach. Berlin, Heidelberg: Springer, 1993. 572 p. Available at: <https://books.google.ru/books?id=TXn1CAAQBAJ&printsec=frontcover&hl=ru#v=onepage&q&f=false>.
- [44] Truesdell C., Noll W. The Non-Linear Field Theories of Mechanics. New York: Springer Science & Business Media, 2004. 602 p. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-3-662-10388-3>.
- [45] Gurtin M.E., Fried E., Anand L. The mechanics and thermodynamics of continua. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 718 p. DOI: <http://doi.org/10.1017/cbo9780511762956>.

- [46] Noll W. The Foundations of Classical Mechanics in the Light of Recent Advances in Continuum Mechanics. In: *The Foundations of Mechanics and Thermodynamics*. Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 31–47. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-65817-4_2.
- [47] Lee J.M. Introduction to Topological Manifolds. New York: Springer, 2011. Available at: https://archive.org/details/springer_10.1007-978-0-387-22727-6.
- [48] Lee J.M. Introduction to Riemannian Manifolds. Cham: Springer, 2018. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-3-319-91755-9>.
- [49] Yang W.H., Feng W.W. On Axisymmetrical Deformations of Nonlinear Membranes. *Journal of Applied Mechanics*, 1970, vol. 37, issue 4, pp. 1002–1011. DOI: <http://doi.org/10.1115/1.3408651>.
- [50] Lurie A.I. Non-linear theory of elasticity. Moscow: Nauka, 1980. 512 p. Available at: <https://libcats.org/book/449646>. (In Russ.)
- [51] Germain P. Cours de mécanique des milieux continus. Tome I. Théorie générale. Paris: Masson, 1973. 400 p. Available at: <https://libcats.org/book/757877>.
- [52] Teodosiu C. Elastic Models of Crystal Defects. Berlin, Heidelberg: Springer, 1982. 336 p. DOI: <http://doi.org/10.1007/978-3-662-11634-0>.
- [53] Yavari A. Compatibility Equations of Nonlinear Elasticity for Non-Simply-Connected Bodies. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2013, vol. 209, pp. 237–253. DOI: <http://doi.org/10.1007/s00205-013-0621-0>.
- [54] Postnikov M.M. Lectures on geometry. Semester V: Riemannian geometry. Moscow: Faktorial, 1998, 496 p. Available at: <http://alexandr4784.narod.ru/pmm52.html>. (In Russ.)
- [55] Chern S.S., Chen W.H., Lam K.S. Lectures on Differential Geometry. Singapore: World Scientific Publishing, 1999. 356 p. DOI: <https://doi.org/10.1142/3812>.
- [56] Dubrovin B.A., Novikov S.P., Fomenko A.T. Modern geometry: methods and applications. Moscow: Nauka, 1986, 760 p. Available at: <http://alexandr4784.narod.ru/dubrovin.html>. (In Russ.)
- [57] Levi-Civita T. Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884–1940)*, 1916, vol. 42, issue 1, pp. 173–204. DOI: <http://doi.org/10.1007/BF03014898>.
- [58] Kartan E. Spaces of affine, projective and conformal connection. Kazan: Izd-vo Kazanskogo universiteta, 1962, 210 p. Available at: <https://libcats.org/book/444677>. (In Russ.)
- [59] Fernandez O.E., Bloch A.M. The Weitzenböck Connection and Time Reparameterization in Nonholonomic Mechanics. *Journal of Mathematical Physics*, 2011, vol. 52, issue 1, p. 012901. DOI: <http://doi.org/10.1063/1.3525798>.
- [60] Dhas B., Srinivasa A., Roy D. A WEeyl geometric model for thermo-mechanics of solids with metrical defects. *arXiv*, 2019. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1904.06956>.
- [61] Saa A. Volume-forms and minimal action principles in affine manifolds. *Journal of Geometry and Physics*, 1995, vol. 15, no. 2, pp. 102–108. DOI: [http://doi.org/10.1016/0393-0440\(94\)00006-P](http://doi.org/10.1016/0393-0440(94)00006-P).
- [62] Miri M., Rivier N. Continuum elasticity with topological defects, including dislocations and extra-matter. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2002, volume 35, number 7, pp. 1727–1739. DOI: <http://doi.org/10.1088/0305-4470/35/7/317>.
- [63] Roychowdhury A., Gupta A. Non-metric Connection and Metric Anomalies in Materially Uniform Elastic Solids. *Journal of Elasticity*, 2017, vol. 126, pp. 1–26. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10659-016-9578-1>.
- [64] Le K.C., Stumpf H. On the determination of the crystal reference in nonlinear continuum theory of dislocations. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1996, vol. 452, issue 1945, pp. 359–371. DOI: <http://doi.org/10.1098/rspa.1996.0019>.
- [65] Le K. C., Stumpf H. Nonlinear continuum theory of dislocations. *International Journal of Engineering Science*, 1996, vol. 34, issue 3, pp. 339–358. DOI: [http://dx.doi.org/10.1016/0020-7225\(95\)00092-5](http://dx.doi.org/10.1016/0020-7225(95)00092-5).
- [66] Le K.C., Stumpf H. Strain measures, integrability condition and frame indifference in the theory of oriented media. *International Journal of Solids and Structures*, 1998, vol. 35, issues 9–10, pp. 783–798. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0020-7683\(97\)00087-5](http://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00087-5).
- [67] Gantmacher F.R. The Theory of Matrices. Moscow: Nauka, 1966, 576 p. Available at: <https://studfile.net/preview/4067051/>. (In Russ.)
- [68] Mac Lane S. Categories for the Working Mathematician. Moscow: Fizmatlit, 2004, 154 p. Available at: <https://djvu.online/file/LMm0QFShaD5Lq>.
- [69] Mendelson E. Introduction to Mathematical Logic. Moscow: Nauka, 1971, 322 p. Available at: <https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Mendelson1971ru.pdf>. (In Russ.)
- [70] Kröner E. Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1960, vol. 4, issue 4, pp. 18–334. Available at: <https://libcats.org/book/789336>. (In Russ.)