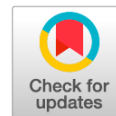


МЕХАНИКА MECHANICS



Научная статья



DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-40-52

УДК 531.39

Дата: поступления статьи: 14.09.2022
после рецензирования: 22.11.2022
принятия статьи: 05.12.2022

П.Г. Великанов

Казанский (Приволжский) федеральный университет;
Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ,
г. Казань, Российская Федерация

E-mail: pvelikanov@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0845-2880>

Ю.П. Артюхин

Казанский (Приволжский) федеральный университет
г. Казань, Российская Федерация

E-mail: ArtukhinYP@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6243-9145>

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК. ЧАСТЬ II

АННОТАЦИЯ

Современное машиностроение порой ставит задачи по расчету тонкостенных конструкций со взаимосоключающими свойствами: с одной стороны, исследуемые конструкции должны сочетать в себе высокую прочность и надежность, а с другой — легкость и экономичность. Для обеспечения вышеперечисленных свойств представляется вполне оправданным использование в конструкциях ортотропных материалов и пластиков.

Во второй части статьи на примерах продемонстрированы дальнейшие возможности методики комплексного представления уравнений общей теории ортотропных оболочек (для изотропных оболочек сделано В.В. Новожиловым), которые позволили существенно сократить число неизвестных и порядок системы дифференциальных уравнений. Особенностью предложенной методики для ортотропных оболочек является появление комплексно-сопряженных неизвестных функций, которые в случае осесимметричной деформации обращаются в нуль, а в других случаях влиянием комплексно-сопряженной функции можно пренебречь.

Проверка правильности предложенной методики была продемонстрирована на полой ортотропной сферической оболочке вращения под действием кольцевой нагрузки в условиях различного преобладания жесткости армирования волокон. В предельном случае были получены результаты и для изотропной оболочки.

Ключевые слова: механика; дифференциальные уравнения; ортотропные пластинки и оболочки; пологие оболочки вращения; осесимметричная деформация; уравнение и функции Бесселя; функция Ломмеля; гипергеометрические функции.

Цитирование. Великанов П.Г., Артюхин Ю.П. Общая теория ортотропных оболочек. Часть II // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2022. Т. 28, № 3–4. С. 40–52. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-40-52>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Великанов П.Г., Артюхин Ю.П., 2022

Пётр Геннадьевич Великанов — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, 420008, Российская Федерация, г. Казань, ул. Кремлевская, 18; кафедра реактивных двигателей и энергетических установок, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ, 420111, Российская Федерация, г. Казань, ул. К. Маркса, 10.

Юрий Павлович Артюхин — доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, 420008, Российская Федерация, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.

1. Предварительные сведения

Комплексное представление уравнений общей теории изотропных оболочек впервые было сделано В.В. Новожиловым в [1]. Представление уравнений в комплексной форме позволило существенно упростить решение задачи: сократить вдвое число неизвестных и порядок системы дифференциальных уравнений. Попытка построения аналогичного комплексного представления исходных дифференциальных уравнений ортотропных оболочек натолкнулась на следующую трудность: появление комплексно-сопряженных неизвестных функций, что не позволило сократить число и порядок исходной системы дифференциальных уравнений. Несмотря на указанную трудность, эта запись позволяет более компактно представить уравнения, а в некоторых случаях имеется возможность вычислить комплексно-сопряженную функцию. В случае осесимметричной деформации эта функция обращается в нуль, а в других случаях влиянием комплексно-сопряженной функции можно пренебречь.

2. Постановка задачи

Рассмотрим кратко (более подробно приведено в первой части статьи) комплексное преобразование исходных уравнений общей теории ортотропных оболочек (более общее преобразование сделано Артюхиным Ю.П. для многослойной оболочки, составленной из произвольного числа ортотропных слоев [2], а также в [3]). Пусть тонкая ортотропная оболочка постоянной толщины испытывает упругие деформации, малые углы поворота и прогибы. Оси ортотропии параллельны координатным линиям кривизны α_1 , α_2 . Считаем справедливыми гипотезы Кирхгофа — Лява. Положительными направлениями для тангенциальных усилий (растяжения/сжатия и сдвига) T_j , S и моментов (изгибающих и крутящего) M_j , H считаются направления, принятые в монографии [1].

Из преобразованных уравнений равновесия и совместности деформаций следует аналогия [1]:

$$\begin{aligned} T_1 &\leftrightarrow \kappa_2; & T_2 &\leftrightarrow \kappa_1; & S &\leftrightarrow -\tau; \\ M_1 &\leftrightarrow -\varepsilon_2; & M_2 &\leftrightarrow -\varepsilon_1; & H &\leftrightarrow \frac{\omega}{2}, \end{aligned}$$

где ε_j , ω — тангенциальные, а κ_j , τ — изгибные деформации.

Согласно преобразованиям и введению комплексных усилий

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1 &= T_1 - i\mu\kappa_2, \quad (\overleftarrow{1,2}); & \tilde{S} &= S + i\mu\tau; & i &= \sqrt{-1}; \\ \tilde{M}_1 &= M_1 + i\mu\varepsilon_2, \quad (\overleftarrow{1,2}); & \tilde{H} &= H - i\mu(\omega/2); & \mu &= h^2 \sqrt{\frac{E_1 E_2}{12(1-\nu_1 \nu_2)}}, \\ \tilde{M}_1 &= ic(\tilde{T}_2 - \nu_2 \tilde{T}_1); & \tilde{M}_2 &= ic\delta(\tilde{T}_1 - \nu_1 \tilde{T}_2); \\ \tilde{H} &= -ic[\lambda \tilde{S} + (\varepsilon + \nu_2) \tilde{S}], & c &= h/K, \end{aligned}$$

где соотношения упругости для ортотропных оболочек имеют вид [4]:

$$\begin{aligned} T_1 &= B_1(\varepsilon_1 + \nu_2 \varepsilon_2), \quad (\overleftarrow{1,2}); & S &= \tilde{G}h\omega; \\ M_1 &= D_1(\kappa_1 + \nu_2 \kappa_2), \quad (\overleftarrow{1,2}); & H &= (\tilde{G}h^3/6)\tau, \end{aligned}$$

где $B_1 = \frac{E_1 h}{1-\nu_1 \nu_2}$, $D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_1 \nu_2)}$, \tilde{G} — модуль сдвига; h — толщина; E_j , ν_j — модули упругости и коэффициенты Пуассона j -го направления; \tilde{T} , \tilde{S} — комплексно-сопряженные величины, получим [2]:

$$\begin{aligned} L_1(\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{S}) &+ \frac{ic}{R_1} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 (\lambda \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 + \varepsilon \tilde{T}_1) - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (\delta \tilde{T}_1 + \lambda \tilde{T}_2 + \varepsilon \tilde{T}_2) \right] = -A_1 A_2 q_1; \\ L_2(\tilde{T}_2, \tilde{T}_1, \tilde{S}) &+ \frac{ic}{R_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 (\delta \tilde{T}_1 + \lambda \tilde{T}_2 + \varepsilon \tilde{T}_2) - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (\lambda \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 + \varepsilon \tilde{T}_1) \right] = -A_1 A_2 q_2; \\ \frac{\tilde{T}_1}{R_1} + \frac{\tilde{T}_2}{R_2} - \frac{ic}{A_1 A_2} &\left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} A_2 (\lambda \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 + \varepsilon \tilde{T}_1) - \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (\delta \tilde{T}_1 + \lambda \tilde{T}_2 + \varepsilon \tilde{T}_2) \right] + \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2} A_1 (\delta \tilde{T}_1 + \lambda \tilde{T}_2 + \varepsilon \tilde{T}_2) - \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (\lambda \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 + \varepsilon \tilde{T}_1) \right] \right\} = q_3, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $L_1(T_1, T_2, S) = \frac{\partial A_2 T_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 S}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_1 S}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2 T_2}{\partial \alpha_1}$; A_j — коэффициенты Ляме; R_j — радиусы кривизны; q_j , q_3 — касательные и нормальная нагрузки, а безразмерные коэффициенты δ , λ , ε , K полностью определяют упругие свойства материала:

$$\delta = \frac{E_2}{E_1}; \quad K = \sqrt{12(1 - \nu_1 \nu_2)} \delta; \quad \lambda = \frac{E_2}{4\tilde{G}} + \frac{\tilde{G}(1 - \nu_1 \nu_2)}{E_1}; \quad \varepsilon = \frac{E_2}{4\tilde{G}} - \frac{\tilde{G}(1 - \nu_1 \nu_2)}{E_1} - \nu_2.$$

Для изотропного материала эти параметры равны:

$$\delta = \lambda = 1; \quad \varepsilon = 0; \quad K = \sqrt{12(1 - \nu^2)}.$$

Если допустить, что для ортотропного материала между модулем сдвига и модулями упругости существует связь

$$\tilde{G} = \tilde{G}_0 = \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{2(1 + \sqrt{\nu_1 \nu_2})},$$

то $\delta = \lambda^2$; $\varepsilon = 0$; $K = \sqrt{12(1 - \nu_1 \nu_2)} \lambda$ и задача путем аффинного преобразования координат может быть сведена к задаче деформирования изотропной оболочки. В этом случае решение будет зависеть только от отношения модулей $\delta = E_2/E_1$. Такое решение может давать неплохие результаты, если сдвиговая деформация мало влияет на другие искомые характеристики интегрального типа.

3. Пологие оболочки

Рассмотрим изгиб полой оболочки нормальной нагрузкой $q_3(\alpha_1, \alpha_2)$. В этом случае в первых двух уравнениях (2.1) можно пренебречь членами уравнения с множителями $1/R_j$ по сравнению с остальными (главными). Упрощенные таким образом два уравнения удовлетворим с помощью комплексной функции усилий [1]:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1 &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \alpha_2} \right) - \frac{1}{A_1^2 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \alpha_1}, \quad (\overleftarrow{1, 2}); \\ \tilde{S} &= \frac{1}{2} \left[\frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \alpha_1} \right) \right]; \quad \tilde{F} = F - i\mu w, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где F — вещественная функция усилий; w — прогиб.

Вводя усилия (3.1) в третье уравнение (2.1), получим:

$$\begin{aligned} \frac{ic}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \nabla_1^2 \tilde{F} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \nabla_2^2 \tilde{F} + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (\nabla_1^2 \tilde{F} - \nabla_2^2 \tilde{F}) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left[\frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (\nabla_2^2 \tilde{F} - \nabla_1^2 \tilde{F}) \right] + \varepsilon \nabla_3^2 \tilde{F} \right\} - D(\tilde{F}) = q_3, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} \nabla_1^2 &= \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \lambda \left[\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right) + A_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) \right] + \overleftarrow{[1, 2]} \right\}; \\ \nabla_2^2 &= \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \lambda \left[\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) + A_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right) \right] + \delta \overleftarrow{[1, 2]} \right\}; \\ \nabla_3^4 &= \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) + \frac{1}{A_1^2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right] - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \overleftarrow{[1, 2]} \right\} + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} \left\{ \overleftarrow{[1, 2]} \right\}; \\ D(\cdot) &= \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{A_2}{R_2 A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{A_1}{R_1 A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) \right]. \end{aligned}$$

4. Осесимметричная деформация полой сферической оболочки

Для решения многих задач теории круглых пластин, сферических и конических оболочек вращения эффективно используются гипергеометрические функции.

Плодотворность привлечения для указанной цели теории гипергеометрических функций объясняется тем, что разрешающие дифференциальные уравнения при определенных профилях пластин и законах изменения кривизны оболочек вращения, имеющих практическое значение, приводятся к хорошо изученным гипергеометрическим уравнениям. В то же время использование многочисленных соотношений между этими функциями дает возможность существенно улучшать решения: усиливать сходимости и сокращать число рядов, подлежащих суммированию — операции с успехом реализуемые, например, в пакете символьной математики WolframMathematica [6; 7]. Ниже приведены результаты по применению гипергеометрических функций в теории оболочек.

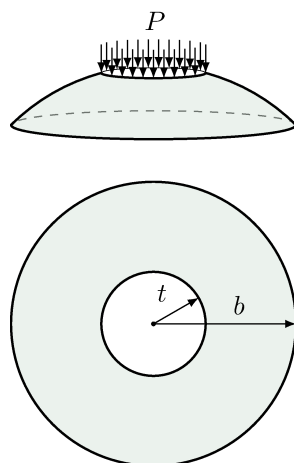


Рис. 4.1. Сферическая оболочка под действием сосредоточенной кольцевой нагрузки
 Fig. 4.1. Spherical shell under the action of concentrated annular load

4.1. Сферическая оболочка под действием сосредоточенной кольцевой нагрузки

Рассмотрим случай осесимметричной деформации пологой сферической оболочки под действием сосредоточенной кольцевой нагрузки вида [7] (рис. 4.1):

$$q_3 = -\frac{P}{2\pi\rho}\delta(\rho - t) = -q\delta(\rho - t),$$

где t — точка приложения кольцевой сосредоточенной нагрузки, а $\delta(\rho - t)$ обобщенная δ -функция Дирака.

Из уравнения равновесия в комплексной форме (3.2) в силу осевой симметрии задачи получим:

$$\frac{d^4\tilde{F}}{d\rho^4} + \frac{2}{\rho}\frac{d^3\tilde{F}}{d\rho^3} + \nu^2\left(-\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\tilde{F}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho^3}\frac{d\tilde{F}}{d\rho}\right) + ia^2\left(\frac{d^2\tilde{F}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\tilde{F}}{d\rho}\right) = \frac{iP}{2\pi c\rho}\delta(\rho - t). \quad (4.1)$$

Уравнение (4.1) может быть приведено к виду:

$$\frac{d}{d\rho}[\rho(\Delta_\nu + ia^2)]\tilde{f} = \frac{iP}{2\pi c}\delta(\rho - t), \quad (4.2)$$

где дифференциальный оператор представим в виде:

$$\Delta_\nu = \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho} - \frac{\nu^2}{\rho^2}; \quad \tilde{f} = \frac{d\tilde{F}}{d\rho}.$$

Однородное дифференциальное уравнение, которое ставится в соответствие неоднородному уравнению (4.2), есть не что иное, как дифференциальное уравнение Бесселя, решениями которого являются модифицированные функции Бесселя первого и второго рода соответственно $(I_\nu(i\sqrt{i}\rho a), K(i\sqrt{i}\rho a))$.

Проинтегрировав однородное уравнение, найдем решение уравнения вида:

$$(\Delta_\nu + ia^2)\tilde{f} = \frac{c}{\rho}. \quad (4.3)$$

Для получения фундаментальных решений линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами прекрасно себя зарекомендовал метод интегрального преобразования Ханкеля [8–10].

Трансформанта (изображение, образ) $\tilde{f}^*(s)$ функции (оригинала, прообраза) $\tilde{f}(\rho)$ интегрального преобразования Ханкеля определяется соотношением вида: $\tilde{f}^*(s) = \int_0^\infty \tilde{f}(\rho)\rho J_\nu(\rho s) d\rho$, где $J_\nu(z)$ — цилиндрическая функция Бесселя первого рода ν -го порядка.

Для восстановления оригиналов по известным трансформантам вводят в рассмотрение формулу обращения интегрального преобразования Ханкеля: $\tilde{f}(\rho) = \int_0^\infty \tilde{f}^*(s) s J_\nu(\rho s) ds$.

Восстановление оригиналов по известным трансформантам осуществляем с помощью таблиц интегралов [10; 11].

Применив к (4.3) интегральное преобразование Ханкеля и воспользовавшись таблицами интегралов [10; 11], получим следующее выражение для трансформанты интегрального преобразования:

$$\tilde{f}^*(s) = -\frac{1}{s(s^2 - ia^2)}. \quad (4.4)$$

Применив к (4.4) формулу обращения интегрального преобразования Ханкеля и воспользовавшись таблицами интегралов [10; 11], после ряда преобразований, используя свойства Γ -функций [8; 9], получим:

$$\tilde{f}(\rho) = -\left\{ \frac{\rho}{(\nu^2 - 1)} {}_1F_2\left(\{1\}; \left\{\frac{3+\nu}{2}, \frac{3-\nu}{2}\right\}; -\frac{\rho^2 a^2}{4}\right) + \frac{\pi \rho^\nu a^{\nu-1} e^{3\pi i(\nu-1)/4}}{2^{\nu+1} \Gamma(\nu+1) \cos \frac{\pi\nu}{2}} {}_1F_2\left(\left\{\frac{\nu+1}{2}\right\}; \left\{\frac{\nu+1}{2}, \nu+1\right\}; -\frac{\rho^2 a^2}{4}\right) \right\}. \quad (4.5)$$

Аналогичная процедура в пакете символьной математики WolframMathematica [5; 6] дает оригинал интегрального преобразования Ханкеля следующего вида:

$$\tilde{f}(\rho) = -\left\{ \frac{\rho}{(\nu^2 - 1)} {}_1F_2\left(\{1\}; \left\{\frac{3+\nu}{2}, \frac{3-\nu}{2}\right\}; -\frac{\rho^2 a^2}{4}\right) + \frac{\pi (-1)^{1/4}}{2a \cos \frac{\pi\nu}{2}} I_\nu\left(-(-1)^{3/4} \rho a\right) \right\}, \quad (4.6)$$

где ${}_1F_2(\{a\}; \{\beta_1, \beta_2\}; \gamma)$ — частный случай обобщенного гипергеометрического ряда с параметрами 1 и 2; $\Gamma(x)$ — гамма-функция; $I_\nu(z)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода ν -го порядка.

В результате анализа полученных соотношений оказалось, что подчеркнутые члены уравнений в (4.5) и (4.6) с машинной точностью совпадают и, кроме того, являются решением однородного дифференциального уравнения, которое поставлено в соответствие неоднородному уравнению (4.2). В силу вышесказанного подчеркнутые члены уравнений из дальнейшего рассмотрения исключаем.

Введем обозначение:

$$\check{G}(\rho) = \frac{\rho}{(\nu^2 - 1)} {}_1F_2\left(\{1\}; \left\{\frac{3+\nu}{2}, \frac{3-\nu}{2}\right\}; -\frac{\rho^2 a^2}{4}\right). \quad (4.7)$$

Из [11] следует, что введенная в рассмотрение функция есть не что иное, как функция Ломмеля $S_{0,\nu}(i\sqrt{i}\rho a)$.

Таким образом, решение дифференциального уравнения (4.1) примет вид:

$$\tilde{F}(\rho) = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 \int I_\nu(i\sqrt{i}\rho a) d\rho + \tilde{C}_3 \int K_\nu(i\sqrt{i}\rho a) d\rho + \tilde{C}_4 \int \check{G}(\rho) d\rho, \quad (4.8)$$

где \tilde{C}_j , ($j = \overline{1,4}$) — произвольные комплексные постоянные.

Проинтегрировав уравнение (4.2) и применив интегральное преобразование Ханкеля, найдем его частное решение:

$$(\Delta_\nu + ia^2) \tilde{f} = \frac{iP}{2\pi c} \frac{H(\rho - t)}{\rho}, \quad (4.9)$$

где $H(\rho - t)$ — функция Хевисайда.

Следуя методике [12], предварительно найдем решение дифференциального уравнения следующего вида (фундаментальное решение):

$$(\Delta_\nu + ia^2) \Phi = \delta(\rho - \rho_0). \quad (4.10)$$

Применим к (4.10) интегральное преобразование Ханкеля, в результате чего получим следующее выражение для трансформанты:

$$\Phi^*(s) = -\frac{\rho_0 J_\nu(\rho_0 s)}{s^2 - ia^2}. \quad (4.11)$$

Применим к (4.11) формулу обращения интегрального преобразования Ханкеля:

$$\Phi(\rho, \rho_0) = -\rho_0 \int_0^\infty \frac{s J_\nu(\rho s) J_\nu(\rho_0 s)}{s^2 - ia^2} ds. \quad (4.12)$$

Интеграл в (4.12) является табличным [11] и имеет вид:

$$\int_0^\infty \frac{s J_\nu(\rho s) J_\nu(\rho_0 s)}{s^2 - ia^2} ds = \begin{cases} I_\nu(i\sqrt{i}\rho a) K_\nu(i\sqrt{i}\rho_0 a), & 0 < \rho < \rho_0; \\ I_\nu(i\sqrt{i}\rho_0 a) K_\nu(i\sqrt{i}\rho a), & 0 < \rho_0 < \rho. \end{cases} \quad (4.13)$$

В соответствии со свойством фундаментального решения для истинной нагрузки имеем следующее решение:

$$\tilde{f}_{\text{част}}(\rho, t) = \frac{iP}{2\pi c} \int_0^b \frac{H(\rho_0 - t)}{\rho_0} \Phi(\rho, \rho_0) \rho_0 d\rho_0 = \frac{iP}{2\pi c} \int_t^b \Phi(\rho, \rho_0) d\rho_0. \quad (4.14)$$

В области $\rho < t < \rho_0$, очевидно, нужно использовать верхнюю формулу в (4.13):

$$\tilde{f}_{\text{част}}(\rho, t) = -\frac{iP}{2\pi c} I_\nu(i\sqrt{i}\rho a) \int_t^b \rho_0 K_\nu(i\sqrt{i}\rho_0 a) d\rho_0. \quad (4.15)$$

В случае $\rho > t$ интеграл приходится разбивать на два (т. к. имеют место два варианта $t < \rho < \rho_0$ и $t < \rho_0 < \rho$) и использовать обе формулы соотношения (4.13):

$$\tilde{f}_{\text{част}}(\rho, t) = -\frac{iP}{2\pi c} \left(K_\nu(i\sqrt{i}\rho a) \int_t^\rho \rho_0 I_\nu(i\sqrt{i}\rho_0 a) d\rho_0 + I_\nu(i\sqrt{i}\rho a) \int_\rho^b \rho_0 K_\nu(i\sqrt{i}\rho_0 a) d\rho_0 \right). \quad (4.16)$$

Добавив к выражениям (4.15) и (4.16) слагаемое, только знаком отличающееся от (4.15), и интегрируя полученное выражение по переменной ρ , получим:

$$\tilde{F}_{\text{част}}(\rho, t) = -\frac{iP}{2\pi c} \begin{cases} 0, & \rho < t; \\ \int_t^\rho \left(K_\nu(i\sqrt{i}\rho a) \int_t^\rho \rho_0 I_\nu(i\sqrt{i}\rho_0 a) d\rho_0 - \right. \\ \left. - I_\nu(i\sqrt{i}\rho a) \int_t^\rho \rho_0 K_\nu(i\sqrt{i}\rho_0 a) d\rho_0 \right) d\rho, & \rho > t. \end{cases} \quad (4.17)$$

Очевидно, что во всей исследуемой области получим выражение вида:

$$\tilde{F}_{\text{част}}(\rho, t) = -\frac{iP}{2\pi c} \int_t^\rho \left(K_\nu(i\sqrt{i}\rho a) \int_t^\rho \rho_0 I_\nu(i\sqrt{i}\rho_0 a) d\rho_0 - \right. \\ \left. - I_\nu(i\sqrt{i}\rho a) \int_t^\rho \rho_0 K_\nu(i\sqrt{i}\rho_0 a) d\rho_0 \right) ds \cdot H(\rho - t). \quad (4.18)$$

В результате найдем следующее представление для общего решения неоднородного уравнения (4.1):

$$\tilde{F}(\rho, t) = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 \int I_\nu(i\sqrt{i}\rho a) d\rho + \tilde{C}_3 \int K_\nu(i\sqrt{i}\rho a) d\rho + \tilde{C}_4 \int \check{G}(\rho) d\rho + \tilde{F}_{\text{част}}(\rho, t). \quad (4.19)$$

При кривизне сферической оболочки вращения равной нулю (т. е. сферическая оболочка вырождается в круглую пластину) и отделении мнимой части общего решения уравнения (4.19) прогиб ортотропной пластины, находящейся под действием кольцевой сосредоточенной нагрузки P , при произвольных граничных условиях принимает вид:

$$w(\xi, \xi_0) = C_1 + C_2 \xi^{1+\nu} + C_3 \xi^{1-\nu} + C_4 \xi^2 + \\ + \frac{Pb^2}{4\pi\nu(\nu^2-1)\xi_0 D_1} [\nu \xi_0 (\xi_0^2 - \xi^2) + \xi_0^{2-\nu} \xi^{1+\nu} - \xi_0^{2+\nu} \xi^{1-\nu}] H(\xi - \xi_0); \quad \xi = \frac{\rho}{b}; \quad \xi_0 = \frac{t}{b}; \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (4.20)$$

который совпадает при $\xi_0 = \frac{t}{b} = 0$ с представлением, полученным в [13].

В случае приложения сосредоточенной нагрузки в полюсе сферической оболочки общее решение неоднородного уравнения (4.2) имеет вид (4.19) при $t = 0$.

Рассмотрим граничные условия, соответствующие скользящей заделке контура:

$$w = \frac{dw}{d\rho} = T_1 = 0 \quad \text{при } \rho = b, \quad (4.21)$$

которые можно сформулировать для искомой комплексной функции усилий следующим образом:

$$\tilde{F} = \frac{d\tilde{F}}{d\rho} = 0 \quad \text{при } \rho = b. \quad (4.22)$$

Кроме того, потребуем конечность искомого функций в центре:

$$\tilde{C}_3 = 0, \quad \tilde{C}_4 = 0. \quad (4.23)$$

Остальные постоянные определим из (4.21):

$$\tilde{C}_1 = \frac{iP}{2\pi c} \left[Q(b) - \frac{\check{G}(b)P_\nu(bai\sqrt{i})}{I_\nu(bai\sqrt{i})} \right]; \quad \tilde{C}_2 = \frac{iP\check{C}(b)}{2\pi c I_\nu(bai\sqrt{i})}; \\ Q(b) = \int \check{G}(\rho) d\rho \Big|_{\rho=b}; \quad P_\nu(bai\sqrt{i}) = \int I_\nu(\rho ai\sqrt{i}) d\rho \Big|_{\rho=b}. \quad (4.24)$$

В результате подстановки (4.24) в (4.19) получим следующее выражение:

$$\tilde{F}(\rho) = F - i\mu w = \frac{iP}{2\pi c} \left(Q(b) - \frac{\check{G}(b)P_\nu(bai\sqrt{i})}{I_\nu(bai\sqrt{i})} + \frac{\check{C}(b)}{I_\nu(bai\sqrt{i})} \int I_\nu(i\sqrt{i}\rho a) d\rho - \int \check{G}(\rho) d\rho \right); \\ w = \frac{1}{\mu} \text{Im}(\tilde{F}(\rho)). \quad (4.25)$$

В результате преобразований выражение для прогиба примет вид:

$$w = -\frac{P}{2\pi\mu c} \operatorname{Im} \left\{ i \left(\int_{\rho}^b \check{G}(\rho) d\rho + \frac{\check{G}(b)}{I_{\nu}(bai\sqrt{i})} \int_b^{\rho} I_{\nu}(i\sqrt{i}\rho a) d\rho \right) \right\}. \quad (4.26)$$

Входящая в (4.26) константа $\mu \cdot c = D_1$ — жесткость в меридиональном направлении.

Интегралы, входящие в (4.26), легко вычисляются через гипергеометрические функции.

Вводя обозначения $k = \frac{b^2}{Rh}$; $\xi = \frac{\rho}{b}$; $\bar{w} = \frac{w}{h}$; $\bar{P} = \frac{Pb^2}{E_1 h^4}$ и вычислив с помощью пакета символьной математики WolframMathematica [5; 6] входящие в (4.26) интегралы от гипергеометрических функций, которые также выражаются через гипергеометрические функции, получим выражение для распределения относительного прогиба $\bar{w}(\xi)$. Эпюра относительного прогиба под действием силы в полусе на основе (4.26) вычисляется по следующей формуле:

$$\bar{w}(\xi) = -\frac{6(1-\nu_1\nu_2)\bar{P}}{\pi(n^2-1)} \operatorname{Re} \left\{ A \left[\xi^{n+1} {}_1F_2 \left(\frac{n+1}{2}; \frac{n+3}{2} (n+1); -\frac{i}{4} k_n^2 \xi^2 \right) - {}_1F_2 \left(\frac{n+1}{2}; \frac{n+3}{2} (n+1); -\frac{i}{4} k_n^2 \right) \right] + \right. \quad (4.26a)$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left[{}_2F_3 \left(1, 1; 2, \frac{3-n}{2}, \frac{3+n}{2}; -\frac{i}{4} k_n^2 \right) - \xi^2 {}_2F_3 \left(1, 1; 2, \frac{3-n}{2}, \frac{3+n}{2}; -\frac{i}{4} k_n^2 \xi^2 \right) \right] \right\},$$

где

$$A = \frac{a_1}{a_2}, \quad a_1 = \frac{k_n^n (1+i)^n 2^{(-3n/2)}}{\Gamma(n+1)} {}_1F_2 \left(1; \frac{3-n}{2}, \frac{3+n}{2}; -\frac{i}{4} k_n^2 \right), \quad a_2 = J_n(\sqrt{i} k_n).$$

Комплексные усилия и моменты могут быть найдены по формулам:

$$\tilde{T}_1 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \rho}; \quad \tilde{T}_2 = -\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \rho^2}; \quad \tilde{M}_1 = ic \left(\tilde{T}_2 - \nu_2 \tilde{T}_1 \right); \quad \tilde{M}_2 = ic \delta \left(\tilde{T}_1 - \nu_1 \tilde{T}_2 \right). \quad (4.27)$$

Подставив в (4.27) представление для комплексной функции усилий, получим:

$$\tilde{T}_1(\rho) = -\frac{iP}{2\pi c \rho} \left(\frac{\check{G}(b)}{I_{\nu}(bai\sqrt{i})} I_{\nu}(i\sqrt{i}\rho a) - \check{G}(\rho) \right); \quad (4.28)$$

$$\tilde{T}_2(\rho) = -\frac{iP}{2\pi c} \left(\frac{\check{G}(b)}{I_{\nu}(bai\sqrt{i})} \frac{dI_{\nu}(i\sqrt{i}\rho a)}{d\rho} - \frac{d\check{G}(\rho)}{d\rho} \right).$$

Осуществив отделение действительной и мнимой частей, получим:

$$M_1 = \operatorname{Re} \left(ic \left(\tilde{T}_2 - \nu_2 \tilde{T}_1 \right) \right); \quad M_2 = \operatorname{Re} \left(ic \delta \left(\tilde{T}_1 - \nu_1 \tilde{T}_2 \right) \right). \quad (4.29)$$

Введем в рассмотрение следующие безразмерные величины:

$$n = \frac{E_2}{E_1}; \quad k_n = \sqrt{k}^4 \sqrt{(1-\nu_1^2)n}. \quad (4.30)$$

Рассмотрим несколько композитных материалов (однонаправленные композиты на основе эпоксидной смолы) [14] с преобладающей жесткостью армирования волокон по радиусу:

- 1) углепластик (волокна AS);
- 2) стеклопластик (E-волокна);
- 3) органопластик (кевлар-49);
- 4) углепластик (волокна IM6);
- 5) материал, по свойствам близкий к изотропному.

Механические характеристики приведенных материалов следующие:

- 1) $n = 0,064$, $\nu_1 = 0,3$, $\nu_2 = 0,019$;
- 2) $n = 0,235$, $\nu_1 = 0,26$, $\nu_2 = 0,061$;
- 3) $n = 0,072$, $\nu_1 = 0,33$, $\nu_2 = 0,024$;
- 4) $n = 0,056$, $\nu_1 = 0,32$, $\nu_2 = 0,018$;
- 5) $n = 0,98$, $\nu_1 = 0,3$, $\nu_2 = 0,294$.

Изменим направления армирования материалов. В этом случае необходимо заменить индексы $1 \leftrightarrow 2$. В случае преобладающей жесткости армирования волокон по окружности получаем:

- 1) $n = 15,625, \nu_1 = 0,019, \nu_2 = 0,3;$
- 2) $n = 4,258, \nu_1 = 0,061, \nu_2 = 0,26;$
- 3) $n = 13,818, \nu_1 = 0,024, \nu_2 = 0,33;$
- 4) $n = 18,018, \nu_1 = 0,018, \nu_2 = 0,32;$
- 5) $n = 1,02, \nu_1 = 0,294, \nu_2 = 0,3.$

Исследуем распределения прогибов в пластинке (сферической оболочке с кривизной $k \rightarrow 0$) в зависимости от преобладающей жесткости волокон композитных материалов. Начнем со случая преобладающей жесткости волокон по радиусу. В табл. 4.1 приведены относительные прогибы в полюсе сферической оболочки $\bar{w}_{\max} = \frac{w(0)E_1h^3}{Rb^2}$ при $k \rightarrow 0$ для рассматриваемых материалов, вычисленные по формуле (4.26а).

Теперь рассмотрим случай преобладающей жесткости армирования волокон по окружности. В табл. 4.2 приведены относительные прогибы в полюсе сферической оболочки при $k \rightarrow 0$ для рассматриваемых материалов.

Таблица 4.1

Относительные прогибы в полюсе сферической оболочки при $k \rightarrow 0$ для рассматриваемых материалов с преобладающей жесткостью армирования волокон по радиусу

Table 4.1

Relative deflections at the pole of spherical shell at $k \rightarrow 0$ for considered materials with predominant hardness of fiber reinforcement along the radius

№ материала	n	$-\bar{w}_{\max}$	$-\bar{w}_{\max}$ изотропной пластинки
1	0,064	0,8386	$n = 1$
2	0,235	0,6163	$\bar{w} = \frac{3(1-\nu^2)}{4\pi}$ при $\nu = 0,3$
3	0,072	0,8238	
4	0,056	0,8523	
5	0,98	0,2221	0,2172

Таблица 4.2

Относительные прогибы в полюсе сферической оболочки при $k \rightarrow 0$ для рассматриваемых материалов с преобладающей жесткостью армирования волокон по окружности

Table 4.2

Relative deflections at the pole of a spherical shell at $k \rightarrow 0$ for the considered materials with a dominant stiffness fiber reinforcement along the radius

№ материала	n	$-\bar{w}_{\max}$	$-\bar{w}_{\max}$ изотропной пластинки
1	15,6	0,003435	$\bar{w} = \frac{3(1-\nu^2)}{4\pi}$ при $\nu = 0,3$
2	4,3	0,034000	
3	13,8	0,004315	
4	18,02	0,002625	
5	1,02	0,213300	

На рис. 4.2 пунктирной линией показана кривая распределения прогиба для материала, близкого к изотропному (материал № 5), а штрих-пунктирной — для материала № 2. Из рис. 4.2 следует, что для случая преобладающей жесткости армирования волокон, направленных по радиусу, наибольшую жесткость обеспечивает изотропный материал, а в случае криволинейной ортотропии — материал с максимальным n , то есть материал № 2.

На рис. 4.3 пунктирной линией показана кривая распределения прогиба для материала, близкого к изотропному (материал № 5), а непрерывная кривая с точками — для материала № 4. Из рис. 4.3 следует, что для случая преобладающей жесткости волокон, направленных по окружности, наибольшую жесткость обеспечивает криволинейно-ортотропный материал с максимальным n , то есть материал № 4.

В табл. 4.3 приведены результаты для оболочки при $k \neq 0$, вычисленные по формуле (4.26а) из материала № 5, близкого к изотропному, с преобладающей жесткостью армирования по радиусу в сравнении с результатами [15].

В таблице 4.4 приведены результаты для оболочки из материала № 5, близкого к изотропному, с преобладающей жесткостью армирования по окружности в сравнении с результатами [15].

Сравнение результатов в табл. 4.3 и 4.4 свидетельствует о достоверности формулы (4.26а).

На рис. 4.4 приведены графики распределения прогибов при $k = 10$ для материала № 2 при изменении направления армирования волокон. Непрерывная линия соответствует преобладающему армированию по радиусу, а пунктирная линия — по окружности.

Как и следовало ожидать, шпангоутное армирование улучшает жесткостные свойства конструкции в сравнении со стрингерным армированием.

На рис. 4.5 показано изменение максимального прогиба при смене направления армирования волокон для материала № 2 в зависимости от кривизны. Непрерывная линия соответствует преобладающему

армированию по радиусу, а пунктирная линия — по окружности. Видно, что в случае армирования по радиусу линия на рис. 4.5 является существенно нелинейной.

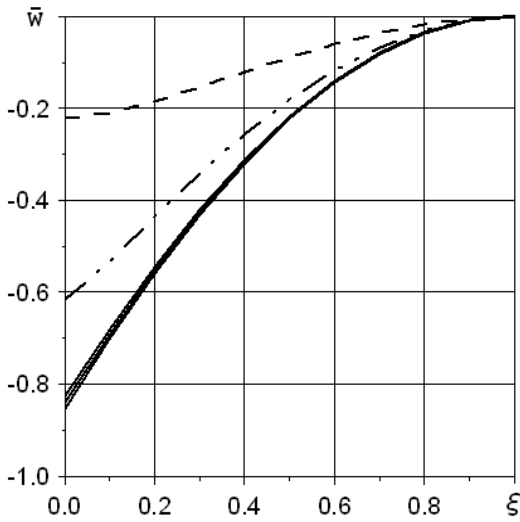


Рис. 4.2. Распределение относительного прогиба в полюсе сферической оболочки при $k \rightarrow 0$ для рассматриваемых материалов с преобладающей жесткостью армирования волокон по радиусу
 Fig. 4.2. Relative deflection distribution in the pole of a spherical shell as $k \rightarrow 0$ for viewed materials with a predominant hardness of fiber reinforcement along the radius

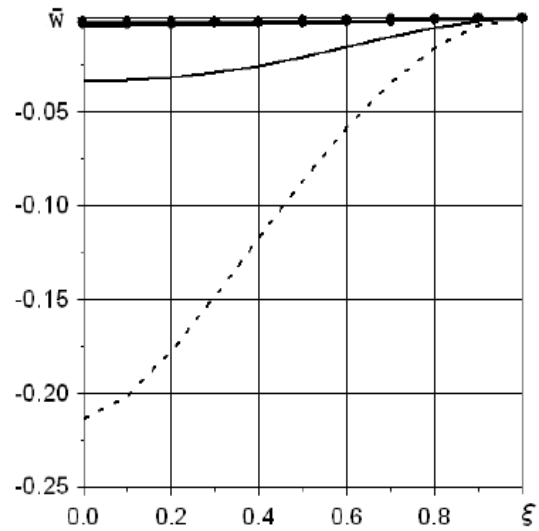


Рис. 4.3. Распределение относительного прогиба в полюсе сферической оболочки при $k \rightarrow 0$ для рассматриваемых материалов с преобладающей жесткостью армирования волокон по окружности
 Fig. 4.3. Relative deflection distribution in the pole of a spherical shell as $k \rightarrow 0$ for viewed materials with a predominant hardness of fiber reinforcement around the circumference

Таблица 4.3

Прогибы в полюсе сферической оболочки при $k \neq 0$ для рассматриваемых материалов с преобладающей жесткостью армирования волокон по радиусу

Table 4.3

Deflections at the pole of a spherical shell at $k \neq 0$ for the considered materials with predominant stiffness of fiber reinforcement along the radius

$k = \frac{b^2}{Rh}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{P} = \frac{Pb^2}{E_1 h^4}$	0,375π					0,75π				
По предложенной методике при $n = 0,98$	0,250	0,221	0,187	0,155	0,128	0,214	0,182	0,156	0,137	0,121
Данные из [15] при $n = 1$	0,249	0,228	0,194	0,160	0,131	0,227	0,188	0,160	0,138	0,121

Таблица 4.4

Прогибы в полюсе сферической оболочки при $k \neq 0$ для рассматриваемых материалов с преобладающей жесткостью армирования волокон по окружности

Table 4.4

Deflections at the pole of a spherical shell at $k \neq 0$ for the considered materials with predominant stiffness of fiber reinforcement around the circumference

$k = \frac{b^2}{Rh}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{P} = \frac{Pb^2}{E_1 h^4}$	0,375π					0,75π				
По предложенной методике при $n = 1,02$	0,240	0,213	0,180	0,150	0,124	0,208	0,177	0,152	0,133	0,118
Данные из [15] при $n = 1$	0,249	0,228	0,194	0,160	0,131	0,227	0,188	0,160	0,138	0,121

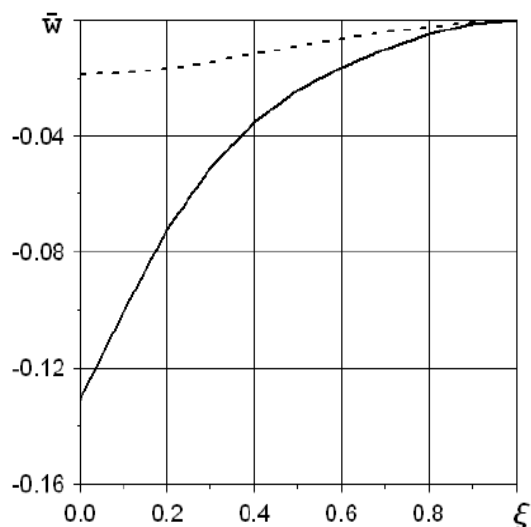


Рис. 4.4. Распределение относительных прогибов при $k = 10$ для материала № 2 при изменении направления армирования волокон
 Fig. 4.4. Relative deflection distribution at $k = 10$ for material No. 2 when changing the fiber reinforcement boards

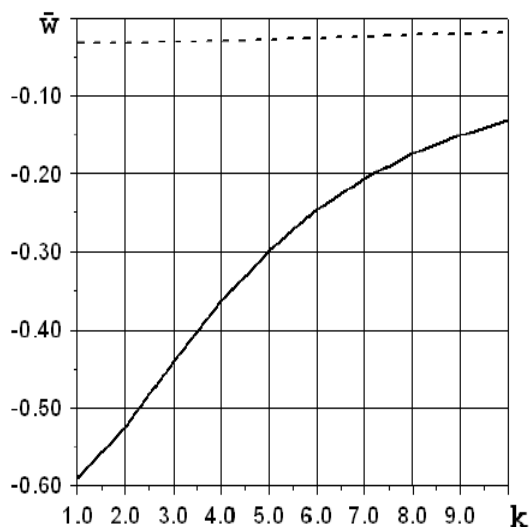


Рис. 4.5. Изменение максимального относительного прогиба при смене направления армирования волокон для материала № 2 в зависимости от кривизны
 Fig. 4.5. Change in the maximum relative deflection when changing the direction of fiber reinforcement for material No. 2 depending on the curvature

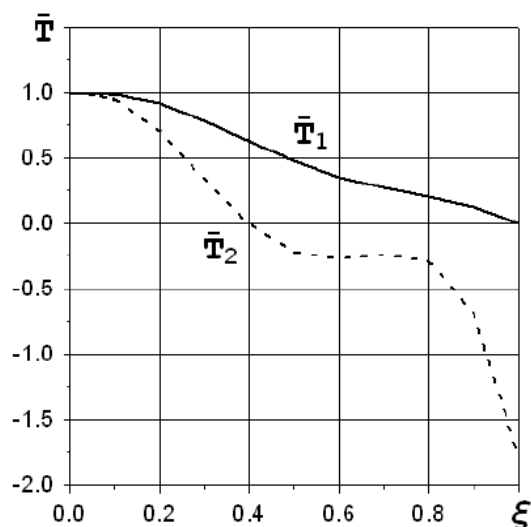


Рис. 4.6. Эпюры приведенных усилий в радиальном и окружном направлениях при $k = 10$ для материала № 2 (с преобладающей жесткостью армирования по окружности)
 Fig. 4.6. Diagrams of reduced forces in the radial and circumferential directions at $k = 10$ for material No. 2 (with the prevailing stiffness of the reinforcement along the circumference)

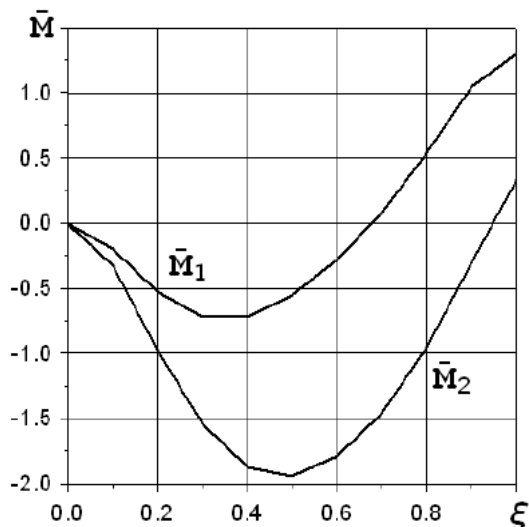


Рис. 4.7. Эпюры приведенных моментов в радиальном и окружном направлениях при $k = 10$ для материала № 2 (с преобладающей жесткостью армирования по окружности)
 Fig. 4.7. Diagrams of the reduced moments in the radial and circumferential directions at $k = 10$ for material No. 2 (with the prevailing stiffness of the reinforcement along the circumference)

Введем в рассмотрение безразмерные усилия и моменты

$$\bar{T}_i = \frac{2\pi c(n^2 - 1) T_i}{P}; \quad \bar{M}_i = \frac{2\pi(n^2 - 1) M_i}{P}; \quad i = 1, 2.$$

Для материала № 2 (с преобладающей жесткостью армирования по окружности) на рис. 4.6–4.7 построены эпюры усилий и моментов в радиальном и окружном направлениях при $k = 10$.

На рис. 4.8–4.9 для материала № 2 (с преобладающей жесткостью армирования по радиусу) построены эпюры усилий и моментов в радиальном и окружном направлениях при $k = 10$.

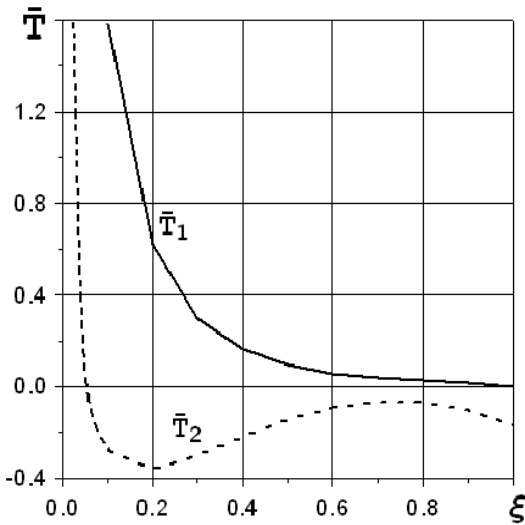


Рис. 4.8. Эпюры приведенных усилий в радиальном и окружном направлениях при $k = 10$ для материала № 2 (с преобладающей жесткостью армирования по радиусу)

Fig. 4.8. Diagrams of reduced forces in the radial and circumferential directions at $k = 10$ for material No. 2 (with the prevailing stiffness of the reinforcement along the radius)

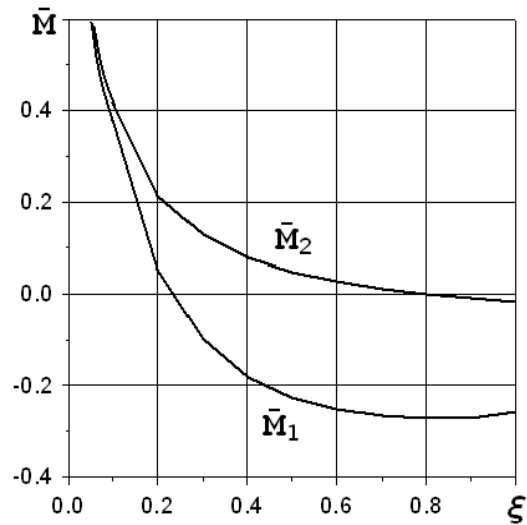


Рис. 4.9. Эпюры приведенных моментов в радиальном и окружном направлениях при $k = 10$ для материала № 2 (с преобладающей жесткостью армирования по радиусу)

Fig. 4.9. Diagrams of the reduced moments in the radial and circumferential directions at $k = 10$ for material No. 2 (with the prevailing stiffness of the reinforcement along the radius)

Из рис. 4.6–4.9 следует, что в оболочке с преобладающими жесткостными свойствами в меридиональном направлении над жесткостными свойствами в окружном направлении в полюсе наблюдается концентрация напряжений и величина их не ограничена; в обратном случае в окрестности приложенной нагрузки оболочка ведет себя как круглая криволинейно-ортотропная пластина, находящаяся в условиях чистого изгиба, причем «кольца жесткости», которыми обладает в этом случае оболочка, полностью гасят краевой эффект, не давая ему распространяться до полюса.

Выводы

В статье было продолжено исследование методики использования комплексного представления уравнений общей теории ортотропных оболочек, которая позволила в комплексной форме существенно сократить число неизвестных функций и порядок системы дифференциальных уравнений, даже несмотря на появление комплексно-сопряженных неизвестных функций. Несмотря на это, предложенная методика позволила более компактно представить уравнения, а в некоторых случаях появилась возможность даже вычислить комплексно-сопряженную функцию. В случае осесимметричной деформации эта функция обращается в нуль, а в других случаях влиянием комплексно-сопряженной функции можно пренебречь, поэтому для указанных случаев были исследованы пологие ортотропные сферические оболочки вращения под действием кольцевой нагрузки в условиях различного преобладания жесткости армирования волокон. В предельном случае были получены результаты и для изотропной оболочки.

Литература

- [1] Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Москва: Судпромгиз, 1962. 431 с. URL: <https://libcats.org/book/661745>.
- [2] Артюхин Ю.П. Расчет однослойных и многослойных ортотропных оболочек на локальные нагрузки // Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во КГУ, 1966. Вып. 4. С. 91–110. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/kutpo593>.

- [3] Артюхин Ю.П., Великанов П.Г. Действие локальных нагрузок на ортотропную сферическую и коническую оболочки вращения // Аналитическая механика, устойчивость и управление движением: материалы Всероссийского семинара. Казань : Изд-во КГУ, 2008. С. 22-23. URL: https://repository.kpfu.ru/?p_id=9408#.
- [4] Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. Москва: Физматгиз, 1961. 384 с. URL: <https://libcats.org/book/438699>.
- [5] Артюхин Ю.П., Гурьянов Н.Г., Котляр Л.М. Система Математика 4.0 и ее приложения в механике: учеб. пособие. Казань: Казанское математическое общество. Изд-во КамПИ, 2002. 415 с. URL: https://repository.kpfu.ru/?p_id=53958.
- [6] Великанов П.Г. Основы работы в системе Mathematica: лабораторный практикум. Казань: Изд-во Казанского гос. техн. ун-та, 2010. 40 с. URL: https://elibs.kai.ru/_docs_file/806166/HTML/.
- [7] Артюхин Ю.П. Изгиб пологих ортотропных оболочек вращения силой, приложенной в полюсе // Исследования по теории пластин и оболочек, 1966. Вып. 5. С. 152-160. URL: <https://www.mathnet.ru/rus/kutpo542>.
- [8] Бейтмен Г., Эрдеи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Москва: Наука, 1974. 295 с. URL: https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/BejtmEnErdeji_t2_1966ru.pdf.
- [9] Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Ч. 1. Москва: Иностран. лит., 1949. 779 с. URL: <http://ega-math.narod.ru/Books/Watson.htm>.
- [10] Снеддон И. Преобразования Фурье. Москва: Иностран. лит., 1955. 668 с. URL: <https://libcats.org/book/579038>.
- [11] Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. Москва: Наука, 1971. 1108 с. URL: <http://www.vixri.ru/?p=991>.
- [12] Гурьянов Н.Г., Тюленева О.Н. Ортотропные пластины и пологие оболочки. Теория, методы решения краевых задач. Казань: КГУ, 2002. 112 с.
- [13] Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. Москва: ОГИЗ-Гостехиздат, 1947. 355 с. URL: <https://lib-bkm.ru/12625>.
- [14] Мэттьюз Ф., Роллингз Р. Композитные материалы. Механика и технология. Москва: Техносфера, 2004. 408 с. URL: <https://knigogid.ru/books/752928-kompozitnye-materialy-mehanika-i-tehnologiya>.
- [15] Корнишин М.С., Исанбаева Ф.С. Гибкие пластины и панели. Москва: Наука, 1968. 260 с.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-40-52

Submitted: 14.09.2022

Revised: 22.11.2022

Accepted: 05.12.2022

P.G. Velikanov

Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, Russian Federation;
Kazan National Research Technical University named after A.N.Tupolev-KAI, Kazan, Russian Federation

E-mail: pvelikanov@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0845-2880>

Y.P. Artyukhin

Kazan (Volga Region) Federal University, Kazan, Russian Federation

E-mail: ArtukhinYP@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6243-9145>

GENERAL THEORY OF ORTHOTROPIC SHELLS. PART II

ABSTRACT

Modern mechanical engineering sets the tasks of calculating thin-walled structures that simultaneously combine sometimes mutually exclusive properties: lightness and economy on the one hand and high strength and reliability on the other. In this regard, the use of orthotropic materials and plastics seems quite justified.

The article demonstrates the complex representation method of the equations of orthotropic shells general theory, which allowed in a complex form to significantly reduce the number of unknowns and the order of the system of differential equations. A feature of the proposed technique for orthotropic shells is the appearance of complex conjugate unknown functions. Despite this, the proposed technique allows for a more compact representation of the equations, and in some cases it is even possible to calculate a complex conjugate function. In the case of axisymmetric deformation, this function vanishes, and in other cases the influence of the complex conjugate function can be neglected.

Verification of the correctness of the proposed technique was demonstrated on a shallow orthotropic spherical shell of rotation under the action of a distributed load. In the limiting case, results were obtained for an isotropic shell as well.

Key words: mechanics; differential equations; orthotropic plates and shells; shallow shells of rotation; axisymmetric deformation; Bessel equation and functions; Lommel function; hypergeometric functions.

Citation. Velikanov P.G., Artyukhin Y.P. General theory of orthotropic shells. Part II. Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series, 2022, vol. 28, no.3–4, pp. 40–52. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-40-52>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Velikanov P.G., Artyukhin Y.P., 2022

Peter G. Velikanov — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of the Department of Theoretical Mechanics, Kazan (Volga Region) Federal University, 18, Kremlevskaya Street, Kazan, 420008, Russian Federation; assistant professor of the Department of Jet Engines and Power Plants, Kazan National Research Technical University named after A.N.Tupolev-KAI, 10, K. Marx Street, Kazan, 420111, Russian Federation.

Yuri P. Artyukhin — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Theoretical Mechanics, Kazan (Volga Region) Federal University, 18, Kremlevskaya Street, Kazan, 420008, Russian Federation.

References

- [1] Novozhilov V.V. Theory of thin shells. Moscow: Sudpromgiz, 1962, 431 p. Available at: <https://libcats.org/book/661745>. (In Russ.)
- [2] Artyukhin Yu.P. Calculation of single-layer and multilayer orthotropic shells for local loads. *Issledovaniya po Teorii Plastin i Obolochek*, 1966, issue 4, pp. 91–110. Available at: <https://www.mathnet.ru/rus/kutpo593>. (In Russ.)
- [3] Artyukhin Y.P., Velikanov P.G. Effect of local loads on orthotropic spherical and conical shells of rotation. *Analytical mechanics, stability and motion control: materials of the all-Russian seminar*. Kazan: Izd-vo KGU, 2008, pp. 22–23. Available at: https://repository.kpfu.ru/?p_id=9408#. (In Russ.)
- [4] Ambartsumyan S.A. General theory of anisotropic shells. Moscow: Fizmatgiz, 1961, 384 p. Available at: <https://libcats.org/book/438699>. (In Russ.)
- [5] Artyukhin Y.P., Guryanov N.G., Kotlyar L.M. Mathematics 4.0 system and its applications in mechanics: textbook. Kazan: Kazanskoe matematicheskoe obshchestvo. Izd-vo KamPI, 2002, 415 p. Available at: https://repository.kpfu.ru/?p_id=53958. (In Russ.)
- [7] Velikanov P.G. Fundamentals of work in the Mathematica system: laboratory course. Kazan: Izd-vo Kazanskogo gos. tekhn. un-ta, 2010, 40 p. Available at: https://elibs.kai.ru/_docs_file/806166/HTML/. (In Russ.)
- [7] Artyukhin Yu.P. Bending of shallow orthotropic shells of revolution by a force applied at the pole. *Issledovaniya po Teorii Plastin i Obolochek*, 1966, issue 5, pp. 152–160. Available at: <https://www.mathnet.ru/rus/kutpo542>. (In Russ.)
- [8] Bateman H., Erdelyi A. Higher Transcendental Functions. Volume 2. Moscow: Nauka, 1974, 295 p. Available at: https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/BejtmEnErdeji_t2_1966ru.pdf. (In Russ.)
- [9] Watson G.N. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Part 1. Moscow: Inostr. lit-ra, 1949, 779 p. Available at: <http://ega-math.narod.ru/Books/Watson.htm>. (In Russ.)
- [10] Sneddon I. Fourier transforms. Moscow: Inostr. lit-ra, 1955, 668 p. Available at: <https://libcats.org/book/579038>. (In Russ.)
- [11] Gradstein I.S., Ryzhik I.M. Tables of integrals, sums of series and products. Moscow: Nauka, 1971, 1108 p. Available at: <http://www.vixri.ru/?p=991>. (In Russ.)
- [12] Guryanov N.G., Tyuleneva O.N. Orthotropic plates and flat shells. Theory, methods of solving boundary value problems. Kazan: KGU, 2002, 112 p. (In Russ.)
- [13] Lekhnitsky S.G. Anisotropic plates. Moscow: OGIZ-Gostekhizdat, 1947, 355 p. Available at: <https://lib-bkm.ru/12625>. (In Russ.)
- [10] Matthews F., Rollings R. Composite Materials. Mechanics and Technology. Moscow: Tekhnosfera, 2004, 408 p. Available at: <https://knigogid.ru/books/752928-kompozitnye-materialy-mehanika-i-tehnologiya>. (In Russ.)
- [11] Kornishin M.S., Isanbayeva F.S. Flexible plates and panels. Moscow: Nauka, 1968, 260 p. (In Russ.)