Научная статья
DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-18-25

УДК 512.542

Дата: поступления статьи: 20.09.2022
после рецензирования: 09.11.2022
принятия статьи: 05.12.2022

Г.В. Воскресенская
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: galvosk@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6288-5372

О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ГРУППЫ ЧИСЛАМИ КЛАССОВ СОПРЯЖЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

АННОТАЦИЯ

Обозначим через $c(n, G)$ число классов сопряженных элементов, на которые распределяются в группе G элементы порядка n. В статье рассматривается проблема распознавания конечной группы по множеству ncl(G), состоящему из чисел $c(n, G)$. Доказывается, что абелевы группы распознаются по множеству ncl(G) при известном порядке группы. Описываются также некоторые другие типы распознаваемых групп. Приведены примеры неизоморфных групп, для которых множества ncl(G) совпадают. Доказано несколько теорем о распознавании группы по частичным условиям на $c(n, G)$.

Ключевые слова: конечная группа; классы сопряженных элементов; порядок элемента; генетический код группы; теоремы Силова; абелевы группы; знакопеременные группы; диэдральные группы.

Цитирование. Воскресенская Г.В. О характеризации группы числами классов сопряженных элементов // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2022. Т. 28, № 3–4. С. 18–25. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-18-25.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Галина Валентиновна Воскресенская — доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и геометрии, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

1. Постановка задачи

Основные понятия и цитируемые факты можно найти в [1; 2; 6; 8; 11].

В современных исследованиях по теории групп актуальными являются проблемы распознавания групп по некоторым условиям. Здесь возможны разные подходы. В исследованиях математиков В.Д. Мазурова, Д.О. Ревина, М.А. Гречкосеевой и других исследуется проблема распознавания группы по ее спектру-множеству $\omega(G)$ порядков ее элементов [4; 8; 9]. В работах И.Б. Горшкова, Н.В. Масловой исследуется распознавание по графу Грюнберга — Кегеля [5]. В работе В.В. Паньшина изучается распознавание групп по множеству размеров классов сопряженности [10].

В этой статье мы расскажем о распознавании еще по по одному множеству. Эти исследования начаты в работе автора [3]. Пусть G — конечная группа, $c(n, G)$ — количество классов сопряженных элементов, на которые распределяются элементы порядка n в группе G. Если в группе нет элементов порядка n, то $c(n, G) = 0$. Мы расскажем об исследованиях проблемы распознавания по множеству $\{c(n, G)\}$, которое для краткости обозначим через $ncl(G)$. Если группы распознаваемы по спектру, то они распознаются и по множеству $ncl(G)$, однако групп, распознаваемых по множеству $ncl(G)$, больше. В ряде случаев для распознавания группы нет необходимости указывать все это множество и даже предварительно указывать порядок группы.

Число $c(1, G) = 1$ всегда. Мы это значение далее указывать не будем.

Выделяются три основных вопроса:

1. Когда группа G определяется множеством $ncl(G)$ однозначно?

2. Какие группы имеют одни и те же множества $ncl(G)$?

3. Какие группы можно определить частичными условиями на числа $c(n, G)$?

Теорема 7.3. цитируется по книге [2]. Остальные теоремы статьи являются новыми.

2. Абелевы группы

Лемма 2.1.

$\sum_{n \in \mathbf{N}} c(n, G) = |G|$ в том и только том случае, когда G — абелева группа.

Доказательство.

Это легко следует из того факта, что $|g^G| = 1 \quad \forall g \in G \Longleftrightarrow G$ — абелева группа.

Теорема 2.2.

Абелева группа однозначно распознается по множеству $ncl(G)$, если указан ее порядок.

Доказательство.

Сначала мы проверим выполнение условие леммы 2.1, а затем достаточно показать, что однозначно определяется силовская p-подгруппа для каждого простого числа p.

$$G \cong \underbrace{Z_p \times ... \times Z_p}_{m_1} \times \underbrace{Z_{p^2} \times ... \times Z_{p^2}}_{m_2} ... \times \underbrace{Z_{p^s} \times ... \times Z_{p^s}}_{m_s},$$

m_k могут быть равны 0.

Тогда

$$\begin{gathered}
c(p, G) = p^{m_1 + \ldots + m_s} - 1, \\
c(p^2, G) = p^{m_1 + 2m_2 + 2m_3 + \ldots + 2m_s} - c(p, G) - 1, \\
c(p^3, G) = p^{m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \ldots + 3m_s} - c(p^2, G) - c(p, G) - 1, \\
\vdots \\
c(p^k, G) = p^{m_1 + 2m_2 + \ldots + (k-1)m_3 + km_3 + \ldots + km_s} - c(p^{k-1}, G) - c(p^{k-2}, G) - \ldots - 1, \\
c(p^s, G) = p^{m_1 + 2m_2 + \ldots + sm_s} - c(p^{s-1}, G) - c(p^{s-2}, G) - \ldots - 1.
\end{gathered}$$

Отсюда получаем

$$\begin{gathered}
m_1 + \ldots + m_s = log_p c(p, G) + 1, \\
m_1 + 2m_2 \ldots + 2m_s = log_p c(p^2, G) + log_p c(p, G) + 1, \\
\vdots \\
m_1 + 2m_2 + 3m_3 \ldots + 3m_s = log_p c(p^3, G) + log_p c(p^2, G) + log_p c(p, G) + 1, \\
m_1 + 2m_2 + \ldots + sm_s = log_p c(p^s, G) + log_p c(p^{s-1}, G) + \ldots + log_p c(p, G) + 1,
\end{gathered}$$

m_k находятся однозначно.

3. Группы порядков 8, p, p^2, pq, p^3

Здесь p, q — различные нечетные простые числа.

Теорема 3.1.

Группы порядков 8, p, p^2, pq, p^3 однозначно определяются указанием порядков и множествами $ncl(G)$, указанными в табл. 1 и 2.

Таблица 1
Table 1

G	|G|	$c(n)$
$\mathbf{Z_8}$	8	$c(8)=4,\ c(4)=2,\ c(2)=1$
$\mathbf{Z_4}\times\mathbf{Z_2}$	8	$c(4)=4,\ c(2)=3$
$\mathbf{Z_2}\times\mathbf{Z_2}\times\mathbf{Z_2}$	8	$c(2)=7$
$\mathbf{D_4}$	8	$c(4)=1,\ c(2)=3$
$\mathbf{Q_8}$	8	$c(4)=3,\ c(2)=1$

Таблица 2
Table 2

G	$\|G\|$	$c(n)$
Z_p	p	$c(p)=p-1$
Z_{p^2}	p^2	$c(p)=p-1,$ $c(p^2)=p(p-1)$
Z_{pq}	pq	$c(p)=p-1,\ c_G(q)=q-1,$ $c(pq)=pq-p-q+1$
$<a,b:a^q=b^p=e,$ $b^{-1}ab=a^r>,\ r^p\equiv 1(q)$	pq	$c_G(p)=p-1,\ c_G(q)=\frac{q-1}{p}$
Z_{p^3}	p^3	$c(p)=p-1,$ $c(p^2)=p(p-1),$ $c(p^3)=p^2(p-1),$
$Z_{p^2}\times Z_p$	p^3	$c(p)=p^2-1,$ $c(p^2)=p^2(p-1)$
$Z_p\times Z_p\times Z_p$	p^3	$c(p)=p^3-1$

Доказательство.

Эти данные получаются прямыми вычислениями. Мы используем известные данные о генетическом коде этих групп, взятые из книги [11]. Мы видим, что эти множества различны.

4. Группы порядков $p^n, n\geqslant 4$, с условием $c(p^{n-1},G)\neq 0$

Теорема 4.1.

Группы порядков $p^n, n\geqslant 4$, с условием $c(p^{n-1},G)\neq 0$ однозначно определяются порядком и частичными условиями на числа $c(n,G)$, указаны в табл. 3 (для нечетных p) и табл. 4 (для p=2).

Таблица 3
Table 3

G	Частичные условия на $c(n,G)$
$Z_{p^{n-1}}\times Z_p$	$c(p^n,G)=0,$ $c(p^{n-1},G)=p^n-p^{n-1}$
Z_{p^n}	$c(p^n,G)\neq 0$
$<a,b:a^{p^{n-1}}=$ $=b^p=e, ba=a^{1+p^{n-2}}b>$	$c(p^n,G)=0,\ c(p^{n-1},G)=p^{n-1}-p^{n-2}$

Доказательство.

Условия на числа $c(n,G)$ находятся явными вычислениями из генетических кодов, приведенных в [11].

5. Группы Z_p и D_p

В этом и следующем параграфах мы докажем несколько утверждений, в которых группа однозначно определяется частичными условиями на $c(n,G)$ без указания порядка группы.

Теорема 5.1.

Пусть p — простое число. Тогда условия $c(p,G)=p-1,\ c(1,G)=1,\ c(n,G)=0\ \forall\ n\neq 1,\ p,$ выполняются в том и только том случае, когда $G\cong Z_p$.

Таблица 4
Table 4

G	Частичные условия на $c(n,G)$
Z_{2^n}	$c(2^n,G)\neq 0$
$Z_{2^{n-1}}\times Z_2$	$c(2^n,G)=0,\ c(2^{n-1},G)$ $=2^{n-1}, c(2)=3$
$D_{2^{n-1}}$	$c(2^n,G)=0,$ $c(2^{n-1},G)=2^{n-2},\ c(2,G)=3$
$< a,b: a^{2^{n-1}}=b^2=e,$ $bab^{-1}=a^{1+2^{n-2}} >$	$c(2^{n-2},G)=2^{n-1},$ $c(2^n,G)=0,\ c(2,G)=2,\ c(8,G)=4$
$< a,b: a^{2^{n-1}}=b^2=e,$ $bab^{-1}=a^{-1+2^{n-2}} >$	$c_G(2^{n-2})=2^{n-2},$ $c(2^n,G)=0,\ c(2,G)=2,\ c(8,G)=2$
$< a,b: a^{2^{n-1}}=b^2=e,$ $b^2=a^{2^{n-2}}, bab^{-1}=a^{-1} >$	$c(2^n,G)=0,\ c(2,G)=1$

Доказательство.

В этой группе имеются элементы только порядка 1 и p. Имеется, по крайней мере, $p-1$ класс сопряженных элементов, эти классы образованы центральными элементами порядка p. Но больше классов для таких элементов нет. Получим, $Z(G)\cong Z_p\cong G$.

Пусть далее p — нечетное простое число.

Теорема 5.2.

Условия $c(p,G)=\frac{p-1}{2}$, $c(1,G)=c(2,G)=1$, $c(n,G)=0\ \forall\ n\neq 1,\ 2,\ p$, выполняются в том и только том случае, когда $G\cong D_p$.

Доказательство.

$|G|=2^k\cdot p^l$.

В нашем случае G_2 абелева, так как любая группа экспоненты 2 абелева, в группе нет элементов порядка $2p$. Нет элементов порядка $2p$ и в фактор-группе G/G'.

Поэтому если $ord(g)=2$, то $|Z(g)|=2^k$.

$|g^G|=p^l$.

Возникают две возможности : $G'\cong G_p$ или $G'\supseteq G_2$, так как G' целиком содержит или не содержит G_2, так как она является нормальной подгруппой, а элементы порядка 2 образуют один класс сопряженных элементов.

Случай 1. $G'\cong G_p$

$|G|=|G_p|+|g^G|=p^l+p^l=2p^l$,

$ord(g)=2$. Получаем $k=1$.

Пусть $h\in Z(G_p)$, $ord(h)=p$, $|h^G|=2$. Существуют $\frac{p-1}{2}$ классов сопряженных элементов, которые состоят из элементов $h,...h^{p-1}$. Все классы сопряженных элементов мы перебрали, для других элементов порядка p больше нет места. Получаем, что $|G|=2p$.

Таким образом, $G\cong D_p$, так как G — неабелева группа.

Случай 2. $G'\supseteq G_2$

В этом случае $|G/G'|=p^k$, $0<k\leqslant l$.

Тогда

$$p^k\leqslant\frac{p-1}{2}+2=\frac{p+3}{2}.$$

Это невозможно.

6. Группа A_4

Теорема 6.1.

Условия $c(3,G)=2$, $c(1,G)=c(2,G)=1$, $c(n,G)=0\ \forall\ n\neq 1,\ 2,\ 3$, выполняются в том и только том случае, когда $G\cong A_4$.

Доказательство.

В группе 4 класса сопряженных классов группа G неабелева и разрешима.

Случай 1. $G' \cong G_2, G/G' \cong Z_3$.

$|G| = 3 \cdot 2^l$.
В этом случае G/G' является степенью числа 3, но не может быть больше 3, так как G/G' — это количество одномерных представлений, а оно не превосходит 4 в нашей ситуации.
Если $ord(g) = 2$, то $|g^G| = 3$, так как $Z(g) = G_2$.
$2^l - 1 = 3, \quad l = 2$.
$|G| = 12$.
$G \cong A_4$.

Случай 2. $G' \cong G_3, G/G' \cong Z_2$.

Группа неабелева, все ее представления не могут быть одномерными, поэтому если $G' \cong G_3$, то $G/G' \cong Z_2$.
$|G| = 2 \cdot 3^m$.
S_3 не удовлетворяет условию на классы сопряженных элементов, поэтому $m \geqslant 2$.
Пусть $h, h^2 \in Z(G_3)$, $ord(h) = ord(h^2) = 3$.
$|h^G| = |(h^2)^G| = 2$.
Если h и h^2 не сопряжены, то $|G_3| = 5$, а это невозможно.
Если эти элементы сопряжены, то рассмотрим элемент третьего порядка f, который с ними не сопряжен, в классе f^G содержатся все оставшиеся элементы порядка 3.
$|f^G| = 3^m - 3$ делит $2 \cdot 3^m$.
$3^{m-1} - 1|2$. Получаем $|G| = 18$. Но группы порядка 18 не удовлетворяют заявленному условию на классы сопряженных элементов.

Случай 3. $G/G' \cong Z_3$, $G' \neq G_3$, $G' \neq G_2$.

$|G| = 2^l \cdot 3^m$.
Один класс сопряженных элементов порядка 3 лежит в G', а другой — нет.
Пусть $h \notin G'$ $ord(h) = 3$.
$|h^G| = 2^l \cdot 3^m - 2^l \cdot 3^{m-1} = 2^{l+1} \cdot 3^{m-1}$.
$|h^G|$ делит $2^l \cdot 3^m$. Получаем противоречие.

7. Группы с одинаковым $ncl(G)$

Пример 7.1.

$$G \cong \; < a, b, c : a^5 = b^5 = c^4 = e,$$
$$c^{-1}ac = a^2, \; c^{-1}bc = b^2, \; ab = ba >,$$
$$H \cong \; < a, b, c : a^5 = b^5 = c^4 = e,$$
$$c^{-1}ac = a^2, \; c^{-1}bc = b^3, \; ab = ba > .$$

Эти группы имеют одинаковые множества $ncl(G)$,

$$c(2) = 1, \; c(4) = 2, \; c(5) = 6.$$

Однако эти группы неизоморфны. В группе H можно найти такие элементы порядков 5 и 4, которые порождают всю группу. Например, это элементы ab и c. В группе G таких элементов нет. Любая пара элементов, где один пятого, а другой четвертого порядка, порождает группу порядка 20.

Пример 7.2.

Пусть p — нечетное простое число,
$l = 1 + p$, $m = 1 - p$.
$G_1 \cong \; < a, b, c : a^{p^2} = b^{p^2} = c^p = e, \; c^{-1}ac = a^l, \; c^{-1}bc = b^l, \; ab = ba >$,
$G_2 \cong \; < a, b, c : a^{p^2} = b^{p^2} = c^p = e, \; c^{-1}ac = a^l, \; c^{-1}bc = b^m, \; ab = ba >$.

$$|G_1| = |G_2| = p^5,$$
$$c(p, G) = c(p, H) = p^2 + p - 1, \; c(p^2, G) = c(p^2, H) = 2p^3 - p^2 - 2p + 1.$$

Рассмотрим группу G_1. Центр этой группы $Z(G_1) =< a^p > \times < b^p >$.

Рассмотрим подгруппу $H =< a > \times < b >$. В H имеется $p^4 - p^2$ элементов p^2. Каждый класс содержит p элементов. Возникает $p^3 - p$ классов. Вне H имеется $(p^4 - p^2)(p - 1)$ элементов порядка p^2. Централизатор каждого такого элемента имеет порядок p^3, индекс централизатора равен p^2. Вне H лежит $(p^2 - 1)(p - 1)$ классов, состоящих из элементов порядка p^2. Итак, $c(p^2, G) = 2p^3 - p^2 - 2p + 1$. В H имеется $p^2 - 1$ элементов p. Каждый класс состоит из одного элемента. Вне H имеется p^3 элементов порядка p. Централизатор каждого такого элемента имеет порядок p^3, индекс централизатора равен p^2. Возникает p классов. Итак, $c(p, G) = p^2 + p - 1$.

Во второй группе есть подгруппа порядка p^4, порожденная элементом порядка p^2 и элементом порядка p. Эта подгруппа является прямым произведением метациклической группы и циклической группы. В первой группе такой подгруппы нет. Любой элемент порядка p^2 и элемент порядка p, который не является степенью первого, порождают подгруппу порядка p^3.

В монографии [2] на странице 307 приводится следующая теорема.

Теорема 7.3.

Пусть группа G равна прямому произведению $G_1 \times G_2$ своих подгрупп G_1 и G_2. Тогда, если C_1 — класс сопряженных элементов группы G_1, а C_2 — класс сопряженных элементов группы G_2, то всевозможные произведения вида $g_1 g_2$, где $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$, образуют класс сопряженных элементов самой группы G, и обратно, каждый класс сопряженных элементов группы G получается таким образом.

Из нее сразу следует

Утверждение 7.4.

Если $ncl(G) = ncl(H)$, F — некоторая группа, то

$$ncl(G \times F) = ncl(H \times F).$$

Поэтому рассматривать неизоморфные группы с одинаковыми множествами $ncl(G)$ следует с точностью до умножения на одинаковый прямой множитель. Интересно исследовать, насколько схожей является структура групп с одинаковым $ncl(G)$. Например, если группа G является полупрямым произведением подгруппы H и фактора $G/H = F$, то верно ли это для всех групп с таким же множеством $ncl(G)$? Во всех известных примерах это так.

Выводы

Таким образом, в статье показывается, что изучение структуры группы по множеству $ncl(G)$ является актуальной проблемой, так как группы многих типов могут быть определены этим множеством однозначно, и в любом случае знание этого множества является хорошей стартовой площадкой для ее изучения.

Литература

[1] Винберг Э.Б. Курс алгебры. Москва: Факторил Пресс, 2002, 544 с. URL: https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZGVmYXVsdGRvbWFpbnxraG1lbG5pdG1ldGF1YXxneDoz MDhiMmU3NTg2MzJhNTY0.

[2] Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. Москва: Наука, 1975, 408 с. URL: https://studizba.com/files/show/djvu/2439-1-l-i-golovina–lineynaya-algebra-i.html.

[3] Воскресенская Г.В. Распознавание группы по условиям на классы сопряженных элементов // Восьмая школа-конференция "Алгебры Ли. Алгебраические группы и теория инвариантов": тез. докл. Москва: МЦНМО, 2020. С. 19.

[4] Горшков И.Б. Распознаваемость симметрических групп по спектру // Алгебра и логика, 2014, Т. 53, № 6. С. 693–703. URL: https://www.mathnet.ru/rus/al660; https://elibrary.ru/item.asp?id=23159536. EDN: https://elibrary.ru/tmuurv.

[5] Горшков И.Б., Маслова Н.В. Конечные почти простые группы с графами Грюнберга — Кегеля как у разрешимых групп // Алгебра и логика, 2018. Т. 57, № 2. С. 175–196. DOI: http://doi.org/10.17377/alglog.2018.57.203. EDN: https://www.elibrary.ru/uunuwx.

[6] Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. Санкт-Петербург: Лань, 2022, 288 с. URL: https://lanbook.com/catalog/matematika/osnovy-teorii-grupp-73277352/.

[7] Коксетер Г.С.М., Мозер У.О.Дж. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. Москва: Наука, 1980. 240 с. URL: https://knigogid.ru/books/1868817-porozhdayuschie-elementy-i-opredelyayuschie-sootnosheniya-diskretnyh-grupp/toread.

[8] Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A. Atlas of Finite Groups: Maximal Subgroups and Ordinary Characters for Simple Groups. Oxford: Oxford Press, 1985, 252 pp.

[9] Мазуров В.Д. Распознавание конечных групп по множеству порядков их элементов // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 6. С. 651–666. URL: https://www.mathnet.ru/rus/al2451.

[10] Паньшин В.В. О распознавании групп по множеству размеров классов сопряженности // Вторая конференция Математических центров России (7–11 ноября 2022): сборник тезисов. Москва: Изд-во МГУ, 2022. С. 172–173. URL: https://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=36711.

[11] Холл М. Теория групп. Москва: Изд–во иностр. лит., 1962, 468 с. URL: https://vdocuments.site/589c3be41a28abec478b5da7.html?page=1.

Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-18-25

Submited: 20.09.2022
Revised: 09.11.2022
Accepted: 05.12.2022

G.V. Voskresenskaya
Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: galvosk@mail.ru. ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6288-5372

ON GROUP CHARACTERIZATION BY NUMBERS OF CONJUGATE CLASSES

ABSTRACT

Let $c(n, G)$ be a number of conjugate elements of order n in a group G. In the article we study the problem of recognition of finite group by the set ncl(G) that consists of numbers $c(n, G)$. We prove that Abelian groups can be recognized by the set ncl(G) when the order of the group is known. We also describe some other types of groups that can be recognized. The examples of non-isomorphic groups with the same sets ncl(G) are given. Some theorems about a group recognition by partial conditions on $c(n, G)$. are proved.

Key words: finite group; class of conjugate elements; order of element; genetic code; Sylow theorem; Abelian group; alternating group; dihedral groups.

Citation. Voskresenskaya G.V. On group characterization by numbers of conjugate classes. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 3–4, pp. 18–25. DOI: http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-3-4-18-25. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: author and reviewers declare no conflict of interests.

Galina V. Voskresenskaya — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Algebra and Geometry, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

[1] Vinberg E.B. Course of algebra. Moscow: Faktorial Press, 2002, 544 p. Available at: https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZGVmYXVsdGRvbWFpbnxraG1lbG5pdG1ldGF1YXxneDozMDhiMmU3NTg2MzJhNTY0. (In Russ.)

[2] Golovina L.I. Linear algebra and some its applications. Moscow: Nauka, 1975, 408 p. Available at: https://studizba.com/files/show/djvu/2439-1-l-i-golovina–lineynaya-algebra-i.html. (In Russ.)

[3] Voskresenskaya G.V. Group recognition by conditions on classes of conjugate elements. In: *Eighth school-conference "Lie algebras, algebraic groups and the theory of invariants".* Abstracts. Moscow: MTsNMO, 2020, p. 19. (In Russ.)

[4] Gorshkov I.B. Recognizability of Symmetric Groups by Spectrum. *Algebra and Logic*, 2014, vol. 53, issue 6, pp. 450–457. DOI: http://doi.org/10.1007/s10469-015-9306-0. (In English; original in Russian).

[5] Gorshkov I.B., Maslova N.V. Finite almost simple groups whose Gruenberg-Kegel graphs coicide with Gruenberg-Kegel graphs of solvable groups. *Algebra and Logic*, 2018, vol. 57, issue 2, pp. 115–129. DOI: http://doi.org/10.1007/s10469-018-9484-7. EDN: https://www.elibrary.ru/ycchpv. (In English; original in Russian).

[6] Kargapolov M.I., Merzlyakov Yu.I. Basics of group theory. Saint Petersburg: Lan', 2022, 288 p. Availabl at: https://lanbook.com/catalog/matematika/osnovy-teorii-grupp-73277352/.

[7] Coxeter H.S.M., Moser W.O.J. Generators and relations for discrete groups. Moscow: Nauka, 1980, 240 p. Available at: https://knigogid.ru/books/1868817-porozhdayuschie-elementy-i-opredelyayuschie-sootnosheniya-diskretnyh-grupp/toread. (In Russ.)

[8] Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A. Atlas of Finite Groups: Maximal Subgroups and Ordinary Characters for Simple Groups. Oxford: Oxford Press, 1985, 252 p.

[9] Mazurov V.D. Recognition of finite groups by a set of orders of their elements. *Algebra and Logic*, 1998, vol. 37, issue 6, pp. 371–379. DOI: http://doi.org/10.1007/BF02671691. (in English; original in Russian).

[10] Panshin V.V. On group recognition by the set of dimensions of conjugate classes. In: *Second conference of Russian Mathematical Centers (November 7-11, 2022): abstracts.* Moscow: Izd-vo MGU, 2022, pp. 172–173. Available at: https://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus&presentid=36711. (In Russ.)

[11] Hall M. Group theory. Moscow: Izd–vo inostr. lit., 1962, 468 p. Available at: https://vdocuments.site/589c3be41a28abec478b5da7.html?page=1. (In Russ.)