

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУКАХ MATHEMATICAL METHODS IN NATURAL SCIENCES



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-95-105

УДК 517.9; 519.7; 530.145.83



Дата: поступления статьи: 11.05.2022
после рецензирования: 22.06.2022
принятия статьи: 14.11.2022

А.Р. Багров

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: alexander.bagrov00@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6744-2222>

Е.К. Башкиров

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: bashkirov.ek@ssau.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8682-4956>

ДИНАМИКА ТРЕХКУБИТНОЙ МОДЕЛИ ТАВИСА — КАММИНГСА

АННОТАЦИЯ

В данной статье исследована динамика перепутывания трех идентичных кубитов (естественных или искусственных двухуровневых атомов), резонансно взаимодействующих с выделенной модой теплового поля микроволнового резонатора без потерь посредством однофотонных переходов. Найдено точное решение квантового временного уравнения Шредингера для полной волновой функции системы для начальных сепарабельных и перепутанных состояний кубитов и фоковского начального состояния резонатора. На основе указанного решения построено точное решение квантового уравнения Лиувилля для полной временной матрицы плотности системы в случае теплового поля резонатора. Точное решение для полной матрицы плотности использовано для вычисления критерия перепутанности пар кубитов — отрицательности. Результаты численного моделирования временной зависимости отрицательности пар кубитов показывают, что с увеличением интенсивности теплового поля резонатора степень перепутывания пар кубитов уменьшается. Также показано, что в рассматриваемой модели для любых начальных состояний кубитов и интенсивностях теплового поля резонатора имеет место эффект мгновенной смерти перепутывания. Такое поведение параметра перепутывания пар кубитов в рассматриваемой модели отличается от поведения параметра перепутывания кубитов в двухкубитной модели. Для двухкубитной модели эффект мгновенной смерти перепутывания имеет место только для начальных перепутанных состояний кубитов и интенсивных тепловых полей резонатора.

Ключевые слова: кубиты; резонансное взаимодействие; резонатор; однофотонные переходы; точное решение квантового уравнения Лиувилля; перепутывание; отрицательность; мгновенная смерть перепутывания.

Цитирование. Багров А.Р., Башкиров Е.К. Динамика трехкубитной модели Тависа — Каммингса // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2022. Т. 28, № 1–2. С. 95–105. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-95-105>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Багров А.Р., Башкиров Е.К., 2022

Александр Романович Багров — бакалавр кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Евгений Константинович Башкиров — доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей и теоретической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

Многочастичные перепутанные состояния кубитов играют важную роль в квантовой информации. Они нужны для различных квантовых информационных приложений, таких как квантовые вычисления и безопасная связь [1–3]. В последние годы наблюдается существенный прогресс в проектировании квантовых чипов, содержащих большое количество кубитов. В 2019 году [4] представлен квантовый компьютер на 53 сверхпроводящих джозефсоновских кольцах. В 2021 году создан чип для квантового компьютера на 127 сверхпроводящих джозефсоновских кольцах [5]. В последние годы также реализованы многокубитные устройства на ионах в магнитных ловушках, фотонах, квантовых точках, примесных спинах, содержащие более десятка кубитов [6]. Для реализации эффективной работы квантовых устройств, таких как квантовые компьютеры или квантовые сети, используют перепутанные состояния кубитов [7; 8]. Для количественной меры перепутывания кубитов предложены различные меры. Однако большинство из них требуют выполнения определенных условий, которые можно определить как набор аксиом, таких как обнуление меры для сепарабельных состояний, инвариантность относительно локальных унитарных операций и другие. Сложность расчета этих мер для произвольных состояний лежит в их незамкнутой форме. Простейшая система, для которой в настоящее время определены строгие количественные критерии перепутывания кубитов, — двухкубитная. Критерии Переса — Хорощеких (отрицательность) [9; 10] и Вуутерса (согласованность) [11] являются необходимыми условиями сепарабельности двухкубитной матрицы плотности. Для систем с числом кубитов, большим чем два, такие строгие количественные критерии отсутствуют. В этом случае при анализе динамики перепутывания многокубитной системы обычно рассматривают перепутывание различных пар кубитов с использованием отрицательности или согласованности. При этом особое внимание уделялось строгому математическому анализу свойств и динамики перепутанных состояний в трехкубитных системах [12–17].

Для генерации, управления и контроля перепутанными состояниями кубитов обычно используют поля резонаторов. В настоящее время экспериментально получены перепутанные состояния кубитов различной физической природы (сверхпроводящих джозефсоновских колец, примесных спинов, ионов в магнитных ловушках и др.) в резонаторах при различных температурах от милликельвин до комнатных [1–3]. Для теоретического анализа динамики систем кубитов в резонаторах обычно используется модель Тависа-Каммингса [18]. В резонаторах конечной температуры естественно присутствуют тепловые фотоны. Поэтому представляет значительный интерес исследование динамики перепутывания кубитов, индуцированного тепловыми полями резонаторов. Особенности динамики перепутывания кубитов, индуцированного тепловым полем резонатора, для двухкубитных систем впервые были рассмотрены в работе Питера Найта с соавторами [19], а для различных обобщений двухкубитной модели в работах [20–27]. Динамика перепутывания трех кубитов, индуцированного тепловым полем одномодового резонатора, была рассмотрена в работе [13]. В качестве критерия перепутывания пар кубитов была использован параметр Вуутерса или согласованность. Однако авторы ограничились рассмотрением сепарабельных начальных состояний кубитов. Представляет большой интерес изучить особенности перепутывания трех кубитов, взаимодействующих с тепловым полем резонатора, как для сепарабельных, так и для перепутанных начальных состояний кубитов. В настоящей статье мы нашли точное решение квантового уравнения Лиувилля для системы, состоящей из трех идентичных кубитов, резонансно взаимодействующих с модой теплового квантового электромагнитного поля идеального резонатора посредством однофотонных состояний. Точное решение использовано для расчета параметра перепутывания кубитов в качестве критерия отрицательности для сепарабельных и перепутанных начальных состояний кубитов.

1. Модель и точное решение квантового уравнения Лиувилля

Рассмотрим систему трех идентичных кубитов (двухуровневых атомов), резонансно взаимодействующих с модой квантового электромагнитного поля идеального микроволнового резонатора. Гамильтониан взаимодействия такой системы в дипольном приближении и приближении вращающейся волны есть

$$H = \hbar\gamma \sum_{i=1}^3 (a^+ \sigma_i^- + \sigma_i^+ a), \quad (1)$$

где a^+ (a) — оператор рождения (уничтожения) фотонов резонаторной моды поля, σ_i^+ и σ_i^- — повышающий и понижающий оператор в i -м кубите и γ — константа взаимодействия кубитов с полем резонатора.

Обозначим через $|+\rangle_i$ и $|-\rangle_i$ возбужденное и основное состояние i -го кубита. Выберем в качестве начальных состояний подсистемы кубитов сепарабельные состояния вида

$$|\Psi(0)\rangle_{Q_1 Q_2 Q_3} = |+, +, -\rangle, \quad (2)$$

$$|\Psi(0)\rangle_{Q_1 Q_2 Q_3} = |+, -, -\rangle, \quad (3)$$

а также состояния, в которых перепутаны второй и третий кубит

$$|\Psi(0)\rangle_{Q_1 Q_2 Q_3} = \cos \theta |+, +, -\rangle + \sin \theta |+, -, +\rangle \quad (4)$$

или

$$|\Psi(0)\rangle_{Q_1 Q_2 Q_3} = \cos \theta |-, +, -\rangle + \sin \theta |-, -, +\rangle. \quad (5)$$

В качестве начального состояния поля резонатора выберем тепловое состояние с матрицей плотности вида one-mode state

$$\rho_F(0) = \sum_n p_n |n\rangle \langle n|. \quad (6)$$

Весовые коэффициенты в (6) есть

$$p_n = \frac{\bar{n}^n}{(1 + \bar{n})^{n+1}},$$

где \bar{n} – среднее число тепловых фотонов

$$\bar{n} = (\exp[\hbar\omega_{cav}/k_B T] - 1)^{-1},$$

k_B – постоянная Больцмана и T – температура резонатора.

Найдем вначале временную волновую функцию системы для фоковского начального состояния поля $|n\rangle$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). А потом обобщим результаты на случай теплового поля резонатора. Введем для нашей системы число возбуждений N , равное $N = n + n$, где n – число кубитов, приготовленных в возбужденном состоянии. Для чисел возбуждения $N \geq 3$ в работе [12] ранее был найден оператор эволюции, который имеет вид

$$U(n, t) = \begin{pmatrix} U_{11}(n) & \cdots & U_{18}(n) \\ \vdots & & \vdots \\ U_{81}(n) & \cdots & U_{88}(n) \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} U_{11}(n) &= \frac{(7 + 2n + \Omega) \cos(\theta_1 \gamma t) + (-7 - 2n + \Omega) \cos(\theta_2 \gamma t)}{2\Omega}, \\ U_{22}(n) &= \frac{4\Omega \cos(\sqrt{2 + n} \gamma t) + (-1 - 2n + \Omega) \cos(\theta_1 \gamma t) + (1 + 2n + \Omega) \cos(\theta_2 \gamma t)}{6\Omega}, \\ u_{12}(n) &= -i \frac{(7 + 2n + \Omega) \theta_1 \sin(\theta_1 \gamma t) + (-7 - 2n + \Omega) \theta_2 \sin(\theta_2 \gamma t)}{6\sqrt{1 + n} \Omega}, \\ U_{15}(n) &= \frac{\sqrt{(1 + n)(2 + n)} (-\cos(\theta_1 \gamma t) + \cos(\theta_2 \gamma t))}{\Omega}, \\ U_{25}(n) &= -i \frac{\sqrt{2 + n} \Omega \sin(\sqrt{2 + n} \gamma t) - (2 + n) \theta_1 \sin(\theta_1 \gamma t) + (2 + n) \theta_2 \sin(\theta_2 \gamma t)}{3\sqrt{2 + n} \Omega}, \\ U_{58}(n) &= -i \frac{(1 + 2n + \Omega) \theta_1 \sin(\theta_1 \gamma t) + (-1 - 2n + \Omega) \theta_2 \sin(\theta_2 \gamma t)}{6\sqrt{3 + n} \Omega}, \\ U_{18}(n) &= -i \frac{\sqrt{2 + n} (\sin(\theta_2 \gamma t) \theta_1 - \sin(\theta_1 \gamma t) \theta_2)}{\Omega}, \\ U_{55}(n) &= u_{22}(n) - \frac{1}{\Omega} (\cos(\theta_1 \gamma t) - \cos(\theta_2 \gamma t)), \quad u_{23}(n) = u_{22}(n) - \cos(\sqrt{2 + n} \gamma t), \\ U_{88}(n) &= u_{11}(n) - \frac{3}{\Omega} (\cos(\theta_1 \gamma t) - \cos(\theta_2 \gamma t)), \quad u_{56}(n) = u_{55}(n) - \cos(\sqrt{2 + n} \gamma t), \\ U_{27}(n) &= u_{25}(n) + i \sin(\sqrt{2 + n} \gamma t), \quad u_{28}(n) = \sqrt{\frac{n + 3}{n + 1}} u_{15}(n) \\ U_{22} &= U_{33} = U_{44}, \quad U_{55} = U_{66} = U_{77}, \quad U_{12} = U_{13} = U_{14} = U_{21} = U_{31} = U_{41}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_{15} &= U_{16} = U_{17} = U_{51} = U_{61} = U_{71}, U_{23} = U_{24} = U_{32} = U_{34} = U_{42} = U_{43}, \\
 U_{27} &= U_{36} = U_{45} = U_{54} = U_{63} = U_{72}, U_{56} = U_{57} = U_{65} = U_{67} = U_{75} = U_{76}, \\
 U_{25} &= U_{26} = U_{35} = U_{37} = U_{46} = U_{47} = U_{52} = U_{53} = U_{62} = U_{64} = U_{73} = U_{74}, \\
 U_{28} &= U_{38} = U_{48} = U_{82} = U_{83} = U_{84}, U_{58} = U_{68} = U_{78} = U_{85} = U_{86} = U_{87}, U_{18} = U_{81}
 \end{aligned}$$

и

$$\Omega_n = \sqrt{9 + 16(n+2)^2}, \theta_1 = \sqrt{5(n+2) - \Omega_n}, \theta_2 = \sqrt{5(n+2) + \Omega_n}.$$

При записи оператора эволюции в матричной форме мы использовали базисные векторы вида

$$\begin{aligned}
 &|+, +, +, n\rangle, |+, +, -, n+1\rangle, |+, -, +, n+1\rangle, |-, +, +, n+1\rangle, \\
 &|+, -, -, n+2\rangle, |-, +, -, n+2\rangle, |-, -, +, n+2\rangle, |-, -, -, n+3\rangle.
 \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае волновую функцию можно найти как

$$|\Psi_{Q_1 Q_2 Q_3 F}(t)\rangle_n = U|\Psi(t)\rangle_{Q_1 Q_2 Q_3}|n\rangle. \quad (8)$$

В дальнейшем при обобщении результатов на случай теплового поля резонатора нам потребуются также волновые функции, соответствующие числам возбуждения $N = 2, 1, 0$. Для $N = 2$ базис гильбертова пространства должен быть сужен до набора

$$\begin{aligned}
 &|+, +, -, 0\rangle, |+, -, +, 0\rangle, |-, +, +, 0\rangle, \\
 &|+, -, -, 1\rangle, |-, +, -, 1\rangle, |-, -, +, 1\rangle, |-, -, -, 2\rangle.
 \end{aligned}$$

Соответствующая временная волновая функция есть

$$\begin{aligned}
 |\psi_1(t)\rangle &= x_1(t)|+, +, -, 0\rangle + x_2(t)|+, -, +, 0\rangle + x_3(t)|-, +, +, 0\rangle + \\
 &+ x_4(t)|+, -, -, 1\rangle + x_5(t)|-, +, -, 1\rangle + x_6(t)|-, -, +, 1\rangle + x_7(t)|-, -, -, 2\rangle,
 \end{aligned} \quad (9)$$

где коэффициенты $x_i(t)$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$) есть

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= \frac{1}{15} \left[3 \left(C_1 + C_2 + C_3 - \sqrt{2}C_7 \right) + 5 \left(2C_1 - C_2 - C_3 \right) \cos t + \left(2C_1 + 2C_2 + 2C_3 + 3\sqrt{2}C_7 \right) \cos \sqrt{10}t - \right. \\
 &\quad \left. - i \left(5(C_4 + C_5 - 2C_6) \sin t + \sqrt{10}(C_4 + C_5 + C_6) \sin \sqrt{10}t \right) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_2(t) &= \frac{1}{15} \left[3 \left(C_1 + C_2 + C_3 - \sqrt{2}C_7 \right) - 5(C_1 - 2C_2 + C_3) \cos t + (2C_1 + 2C_2 + 2C_3 + 3\sqrt{2}C_7) \cos \sqrt{10}t - \right. \\
 &\quad \left. - i \left(5(C_4 - 2C_5 + C_6) \sin t + \sqrt{10}(C_4 + C_5 + C_6) \sin \sqrt{10}t \right) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_3(t) &= \frac{1}{15} \left[3 \left(C_1 + C_2 + C_3 - \sqrt{2}C_7 \right) - 5(C_1 + C_2 - 2C_3) \cos t + (2C_1 + 2C_2 + 2C_3 + 3\sqrt{2}C_7) \cos \sqrt{10}t + \right. \\
 &\quad \left. + 5i \left(2C_4 - C_5 - C_6 \right) \sin t - i\sqrt{10} \left(C_4 + C_5 + C_6 \right) \sin \sqrt{10}t \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_4(t) &= \frac{1}{15} \left[5 \left(2C_4 - C_5 - C_6 \right) \cos t + 5(C_4 + C_5 + C_6) \cos \sqrt{10}t - i \left(5(C_1 + C_2 - 2C_3) \sin t + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sqrt{5}(\sqrt{2}C_1 + \sqrt{2}C_2 + \sqrt{2}C_3 + 3C_7) \sin \sqrt{10}t \right) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_5(t) &= \frac{1}{15} \left[-5(C_4 - 2C_5 + C_6) \cos t + 5(C_4 + C_5 + C_6) \cos \sqrt{10}t - i \left(5(C_1 - 2C_2 + C_3) \sin t + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sqrt{5}(\sqrt{2}C_1 + \sqrt{2}C_2 + \sqrt{2}C_3 + 3C_7) \sin \sqrt{10}t \right) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_6(t) &= \frac{1}{15} \left[-5(C_4 + C_5 - 2C_6) \cos t + 5(C_4 + C_5 + C_6) \cos \sqrt{10}t + 5i \left(2C_1 - C_2 - C_3 \right) \sin t - \right. \\
 &\quad \left. - i\sqrt{5} \left(\sqrt{2}C_1 + \sqrt{2}C_2 + \sqrt{2}C_3 + 3C_7 \right) \sin \sqrt{10}t \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_7(t) &= \frac{1}{5} \left[\sqrt{2}C_1 - \sqrt{2}C_2 - \sqrt{2}C_3 + 2C_7 + \left(\sqrt{2}C_1 + \sqrt{2}C_2 + \sqrt{2}C_3 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 3C_7 \right) \cos \sqrt{10}t - i\sqrt{5} \left(C_4 + C_5 + C_6 \right) \sin \sqrt{10}t \right].
 \end{aligned}$$

Здесь использовано обозначение $C_i = x_i(0)$.

Для $N = 1$ выбираем базис гильбертова пространства в виде

$$|+, -, -, 0\rangle, |-, +, -, 0\rangle, |-, -, +, 0\rangle, |-, -, -, 1\rangle.$$

Соответствующая временная волновая функция есть

$$|\psi_2(t)\rangle = y_1(t)|+, -, -, 0\rangle + y_2(t)|-, +, -, 0\rangle + y_3(t)|-, -, +, 0\rangle + y_4(t)|-, -, -, 1\rangle, \quad (10)$$

где коэффициенты $y_i(t)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) имеют вид

$$y_1(t) = \frac{1}{3} \left[2F_1 - F_2 - F_3 + (F_1 + F_2 + F_3) \cos \sqrt{3}t - i\sqrt{3}F_4 \sin \sqrt{3}t \right],$$

$$y_2(t) = \frac{1}{3} \left[-F_1 + 2F_2 - F_3 + (F_1 + F_2 + F_3) \cos \sqrt{3}t - i\sqrt{3}F_4 \sin \sqrt{3}t \right],$$

$$y_3(t) = \frac{1}{3} \left[-F_1 - F_2 + 2F_3 + (F_1 + F_2 + F_3) \cos \sqrt{3}t - i\sqrt{3}F_4 \sin \sqrt{3}t \right],$$

$$y_4(t) = F_4 \cos \sqrt{3}t - \frac{i(F_1 + F_2 + F_3) \sin \sqrt{3}t}{\sqrt{3}}.$$

Здесь использованы обозначения $F_i = y_i(0)$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

Наконец для $N = 0$ базис гильбертова пространства составляет вектор $|-, -, -, 0\rangle$. Соответствующая временная волновая функция есть

$$|\psi_3(t)\rangle = |-, -, -, 0\rangle. \quad (11)$$

Имея явный вид для временных волновых функций системы (8)–(11), мы можем вычислить временную матрицу плотности полной системы "три кубита+мода поля" в случае теплового состояния поля. Для состояний (2) и (4) временную матрицу плотности можно записать как

$$\rho_{Q_1 Q_2 Q_3 F} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n |\Psi_{Q_1 Q_2 Q_3 F}(t)\rangle_{n-1} \langle \Psi_{Q_1 Q_2 Q_3 F}(t)| + p_0 |\psi_1(t)\rangle \langle \psi_1(t)|. \quad (12)$$

Для состояний (3) и (5) временная матрица плотности есть

$$\rho_{Q_1 Q_2 Q_3 F}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} p_n |\Psi_{Q_1 Q_2 Q_3 F}(t)\rangle_{n-2} \langle \Psi_{Q_1 Q_2 Q_3 F}(t)| + p_1 |\psi_1(t)\rangle \langle \psi_1(t)| + p_0 |\psi_2(t)\rangle \langle \psi_2(t)|. \quad (13)$$

Редуцированную матрицу плотности трех кубитов мы можем вычислить, усредняя выражения (12) или (13) по переменным поля

$$\rho_{Q_1 Q_2 Q_3}(t) = Sp_F \rho_{Q_1 Q_2 Q_3 F}(t). \quad (14)$$

Как уже отмечалось во введении, точные количественные меры перепутывания кубитов в настоящее время разработаны только для двухкубитных систем. настоящей работе в качестве меры перепутывания выбран критерий Переса — Хородецких или отрицательность. Для вычисления отрицательности двух кубитов необходимо вычислить редуцированную двухкубитную матрицу плотности. Для это необходимо усреднить трехкубитную матрицу плотности (14) по переменным третьего кубита, т. е.

$$\rho_{Q_i Q_j}(t) = Sp_{Q_k} \rho_{Q_1 Q_2 Q_3}(t) (i, j, k = 1, 2, 3 \ i \neq j, j \neq k, i \neq k)$$

2. Вычисление отрицательности и обсуждение результатов

Определим отрицательность для двух кубитов Q_i и Q_j стандартным образом [8]

$$\varepsilon_{ij} = -2 \sum_l \mu_l^-,$$

где μ_l^- — отрицательные собственные значения частично транспонированной по переменным одного кубита (атома) редуцированной двухкубитной матрицы плотности. Для неперепутанных состояний $\varepsilon = 0$. Для перепутанных состояний $0 < \varepsilon \leq 1$. Максимальной степени перепутывания соответствует значение $\varepsilon = 1$.

Для сепарабельных начальных состояний кубитов (2) и (3) и перепутанных состояний (4) и (5) двухкубитная матрица редуцированная матрица плотности имеет вид

$$\rho_{Q_i Q_j}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{23}^* & \rho_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Матричные элементы (15) для начального состояния (2) и кубитов Q_1 и Q_2 имеют вид

$$\begin{aligned}\rho_{11} &= \sum_{n=1}^{\infty} (|U_{12}(n-1)|^2 + |U_{22}(n-1)|^2) + p_0 |x_1|^2, \\ \rho_{22} &= \sum_{n=1}^{\infty} (|U_{32}(n-1)|^2 + |U_{52}(n-1)|^2) + p_0 (|x_2|^2 + |x_4|^2), \\ \rho_{33} &= \sum_{n=1}^{\infty} (|U_{42}(n-1)|^2 + |U_{62}(n-1)|^2) + p_0 (|x_3|^2 + |x_5|^2), \\ \rho_{44} &= \sum_{n=1}^{\infty} (|U_{72}(n-1)|^2 + |U_{82}(n-1)|^2) + p_0 (|x_6|^2 + |x_7|^2), \\ \rho_{23} &= \sum_{n=1}^{\infty} (U_{32}(n-1)U_{42}^*(n-1) + U_{52}(n-1)U_{62}^*(n-1)) + p_0 (x_4x_5^* + x_2x_3^*), \\ \rho_{32} &= (\rho_{23})^*.\end{aligned}$$

Для того же начального состояния и кубитов Q_2 и Q_3 матричные элементы принимают вид

$$\begin{aligned}\rho_{11} &= \sum_{n=1}^{\infty} (|U_{12}(n-1)|^2 + |U_{42}(n-1)|^2) + p_0 |x_3|^2, \\ \rho_{22} &= \sum_{n=1}^{\infty} (|U_{22}(n-1)|^2 + |U_{62}(n-1)|^2) + p_0 (|x_1|^2 + |x_5|^2), \\ \rho_{33} &= \sum_{n=1}^{\infty} (|U_{32}(n-1)|^2 + |U_{72}(n-1)|^2) + p_0 (|x_2|^2 + |x_6|^2), \\ \rho_{44} &= \sum_{n=1}^{\infty} (|U_{52}(n-1)|^2 + |U_{82}(n-1)|^2) + p_0 (|x_4|^2 + |x_7|^2), \\ \rho_{23} &= \sum_{n=1}^{\infty} (U_{22}(n-1)U_{32}^*(n-1) + U_{62}(n-1)U_{72}^*(n-1)) + p_0 (x_1x_2^* + x_5x_6^*), \\ \rho_{32} &= (\rho_{23})^*.\end{aligned}$$

Явные выражения для матричных элементов в (15) для начальных состояний кубитов (3)–(5) имеют аналогичную структуру и поэтому в настоящей работе не приведены.

Частично транспонированная по переменным одного кубита редуцированная матрица плотности кубитов для (15) может быть представлена в виде

$$\rho_{Q_i Q_j}^{T_1}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{23}^* \\ 0 & \rho_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{23} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Матрица (16) имеет всего одно собственное значение, которое может быть отрицательным. В результате отрицательность может быть записана как

$$\varepsilon_{ij} = \sqrt{(\rho_{44} - \rho_{11})^2 + 4 \cdot \rho_{23}^2} - \rho_{11} - \rho_{44}.$$

Результаты компьютерного моделирования временной зависимости отрицательностей ε_{12} и ε_{13} для кубитов 1 и 2 и 1 и 3 от приведенного времени γt для начального сепарабельного состояния кубитов, в котором два из них возбуждены, а один находится в основном состоянии, например $|+, +, -\rangle$, и различных значений средних чисел тепловых фотонов в моде представлены на рис. 1. Для выбранного начального состояния кубиты 1 и 2 перепутаны в любой момент времени, в то время как для кубитов 1 и 3 имеет место эффект мгновенной смерти и возрождения перепутывания. Мгновенной смертью перепутывания называется исчезновение перепутывания кубитов на временах меньше времени диссипации энергии, фазы и т. д. Степень перепутывания монотонно уменьшается с увеличением среднего числа фотонов. Поведение отрицательности в случае, когда два кубита изначально находятся в основном состоянии, а один – в возбужденном состоянии, например $|+, -, -\rangle$, представлено на рис. 2. Для указанного начального состояния кубитов поведение отрицательностей ε_{12} и ε_{13} аналогично предыдущему случаю. Заметим, что для двухкубитной модели и начального состояния, в котором один из них возбужден,

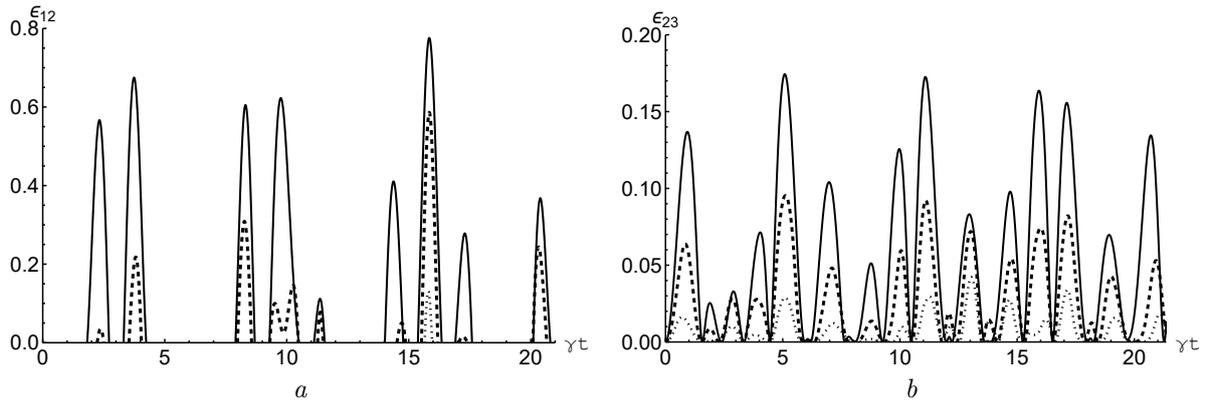


Рис. 1. Зависимость отрицательностей ε_{12} (a) и ε_{23} (b) от приведенного времени γt для начального состояния кубитов $|+, +, -\rangle$. Среднее число тепловых фотонов в моде $\bar{n} = 0.1$ (сплошная линия), $\bar{n} = 1$ (штриховая линия) и $\bar{n} = 4$ (пунктирная линия)

Fig. 1. Negativities ε_{12} (a) and ε_{23} (b) vs scaled time γt for initial qubits state $|+, +, -\rangle$. Mean thermal photon number $\bar{n} = 0.1$ (solid), $\bar{n} = 1$ (dashed) and $\bar{n} = 4$ (dotted)

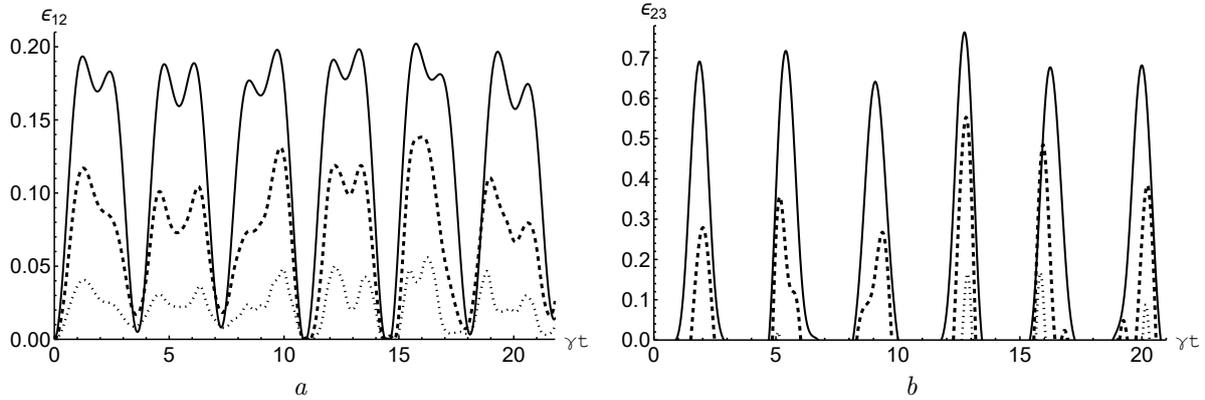


Рис. 2. Зависимость отрицательностей ε_{12} (a) и ε_{23} (b) от приведенного времени γt для начального состояния кубитов $|+, -, -\rangle$. Среднее число тепловых фотонов в моде $\bar{n} = 0.1$ (сплошная линия), $\bar{n} = 1$ (штриховая линия) и $\bar{n} = 4$ (пунктирная линия)

Fig. 2. Negativities ε_{12} (a) and ε_{23} (b) vs scaled time γt for initial qubits state $|+, -, -\rangle$. Mean thermal photon number $\bar{n} = 0.1$ (solid), $\bar{n} = 1$ (dashed) and $\bar{n} = 4$ (dotted)

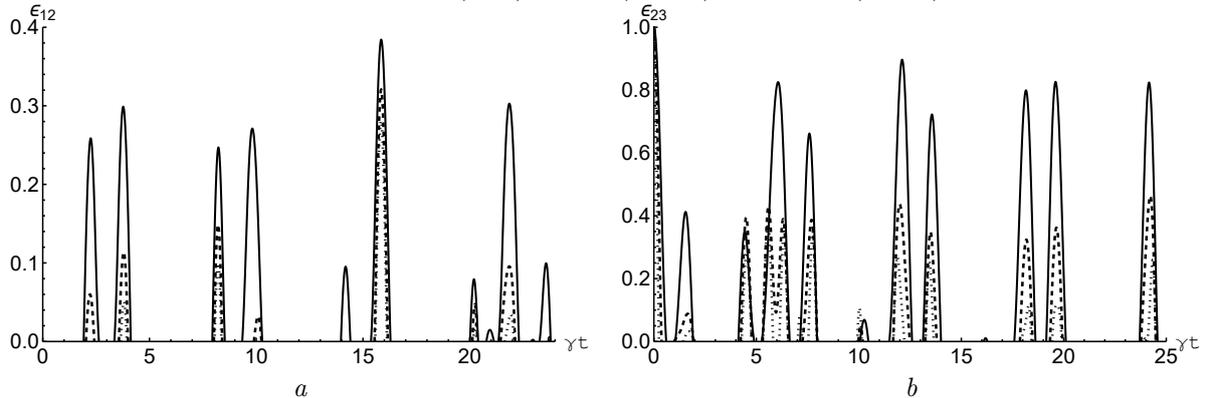


Рис. 3. Зависимость отрицательностей ε_{12} (a) и ε_{23} (b) от приведенного времени γt для начального перепутанного состояния кубитов (4) при $\theta = \Pi/4$. Среднее число тепловых фотонов в моде для расчёта ε_{12} $\bar{n} = 0.1$ (сплошная линия), $\bar{n} = 0.5$ (штриховая линия) и $\bar{n} = 0.7$ (пунктирная линия). Для ε_{23} $\bar{n} = 0.1$ (сплошная линия), $\bar{n} = 1$ (штриховая линия) и $\bar{n} = 3$ (пунктирная линия)

Fig. 3. Negativities ε_{12} (a) and ε_{23} (b) vs scaled time γt for entangled initial qubits state (4) with $\theta = \Pi/4$. The average number of thermal photons in the mode for calculating ε_{12} $\bar{n} = 0.1$ (solid), $\bar{n} = 0.5$ (dashed) and $\bar{n} = 0.7$ (dotted). For ε_{23} $\bar{n} = 0.1$ (solid), $\bar{n} = 1$ (dashed) and $\bar{n} = 3$ (dotted)

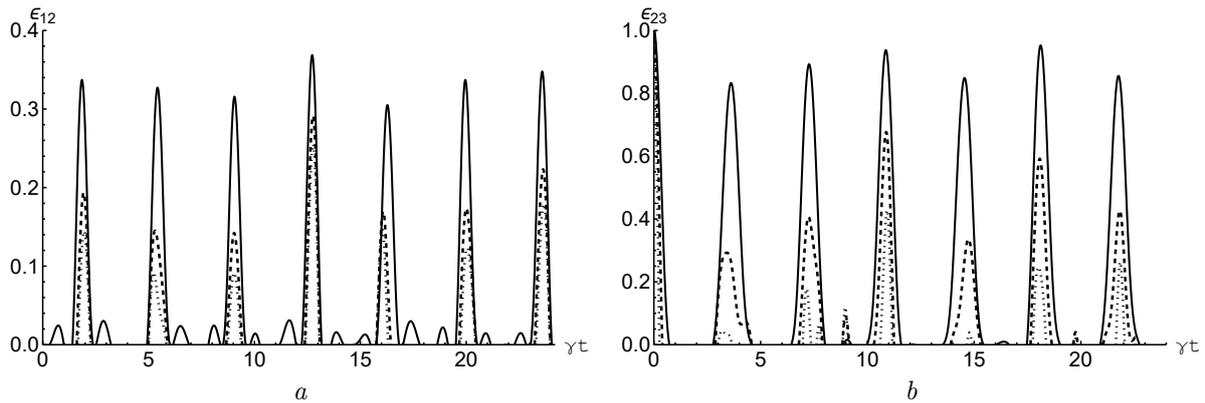


Рис. 4. Зависимость отрицательностей ε_{12} (a) и ε_{23} (b) от приведенного времени γt для начального перепутанного состояния кубитов (5) при $\theta = \Pi/4$. Среднее число тепловых фотонов в моде для расчёта ε_{12} $\bar{n} = 0.1$ (сплошная линия), $\bar{n} = 0.5$ (штриховая линия) и $\bar{n} = 0.7$ (пунктирная линия). Для ε_{23} $\bar{n} = 0.1$ (сплошная линия), $\bar{n} = 1$ (штриховая линия) и $\bar{n} = 3$ (пунктирная линия)

Fig. 4. Negativities ε_{12} (a) and ε_{23} (b) vs scaled time γt for entangled initial qubits state (5) with $\theta = \Pi/4$. The average number of thermal photons in the mode for calculating ε_{12} $\bar{n} = 0.1$ (solid), $\bar{n} = 0.5$ (dashed) and $\bar{n} = 0.7$ (dotted). For ε_{23} $\bar{n} = 0.1$ (solid), $\bar{n} = 1$ (dashed) и $\bar{n} = 3$ (dotted)

а второй находится в основном состоянии, эффект мгновенной смерти перепутывания отсутствует для любых интенсивностей теплового поля резонатора [19].

Результаты компьютерного моделирования временной зависимости отрицательностей ε_{12} и ε_{13} для кубитов 1 и 2 и 1 и 3 от приведенного времени γt для начального состояния (4), в котором перепутаны состояния кубитов 2 и 3, а кубит 1 находится в возбужденном состоянии, представлены на рис. 3. Аналогичные зависимости для начального состояния (5), в котором также перепутаны состояния кубитов 2 и 3, а кубит 1 находится в основном состоянии, представлены на рис. 4. Наиболее интересным в поведении отрицательности как для случая начальных сепарабельных, так и перепутанных состояний кубитов, представленных на рис. 3 и 4, является проявление эффекта мгновенной смерти перепутывания кубитов для любых средних чисел тепловых фотонов. Заметим, что для двухкубитной модели и белловских начальных состояний кубитов вида $\cos \theta |+, -\rangle + \sin \theta |-, +\rangle$ эффект мгновенной смерти перепутывания имеет место только для достаточно интенсивных тепловых полей резонатора $\bar{n} \geq 1$ [26].

Выводы

Таким образом, в данной статье нами была найдена точная динамика системы, состоящей из трех идентичных кубитов, взаимодействующих с модой теплового поля резонатора без потерь. Полученное явное выражение для полной матрицы плотности системы использовано для вычисления критерия перепутывания пар кубитов как для начальных сепарабельных, так и для перепутанных состояний кубитов. Результаты численного моделирования кубитов показывают, что максимальная степень перепутывания пар кубитов быстро уменьшается с увеличением интенсивности теплового поля резонатора. Установлено, что для рассматриваемой системы для любых начальных состояний кубитов и среднего числа тепловых фотонов в моде имеет место эффект мгновенной смерти перепутывания. Полученное в настоящей работе точное решение для временной матрицы плотности будет использовано нами для расчета других наблюдаемых подсистемы кубитов и поля: населенностей, дипольных моментов, корреляционных функций, параметра сжатия моды поля и других. Будет рассмотрено также влияние диссипации энергии и фазы на динамику системы. Такие расчеты будут предметом нашей следующей работы.

Литература

- [1] Buluta I., Ashhab S., Nori F. Natural and artificial atoms for quantum computation. // Reports on Progress in Physics. 2011. Vol. 74. Number 10. P. 104401. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/74/10/104401>.
- [2] Xiang Z.L., Ashhab S., You J.Y., Nori F. Hybrid quantum circuits: Superconducting circuits interacting with other quantum systems // Reviews of Modern Physics. 2013. Vol. 85, Issue 2. Pp. 623–653. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.85.623>.
- [3] Gu X., Kockum A.F., Miranowicz A., Liu Y.X., Nori F. Microwave photonics with superconducting quantum circuits // Physics Reports. 2017. Vol. 718–719. P. 1–102. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2017.10.002>

- [4] Arute F. [et al.] Quantum supremacy using a programmable superconducting processor // *Nature*. 2019. Vol. 574. P. 505–510. DOI: <http://doi.org/10.1038/s41586-019-1666-5>
- [5] Ball P. First quantum computer to pack 100-qubits enters crowded race. // *Nature*. 2021. Vol. 599. P. 542. DOI: <http://dx.doi.org/10.1038/d41586-021-03476-5>.
- [6] Georgescu I.M., Ashhab S., Nori P. Quantum simulation // *Reviews of Modern Physics*. 2014. Vol. 88. Issue 1. P. 153–185. DOI: <http://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153>.
- [7] Wendin G. Quantum information processing with super-conducting circuits: a review // *Reports on Progress in Physics*. 2017. Vol. 80. Number 10. P. 1–60. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6633/aa7e1a>.
- [8] Peres A. Separability Criterion for Density Matrices // *Physical Review Letters*. 1996. Vol. 77. Issue 8. P. 1413–1415. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413>.
- [9] Horodecki R., Horodecki M., Horodecki P. Separability of Mixed States: Necessary and Sufficient Condition // *Physics Letters A*. 1996. Vol. 223. Issues 1–2, Pp. 333–339. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(96\)00706-2](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2).
- [10] Wootters W.K. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits // *Physical Review Letters*. 1998. Vol. 80. Issue 10. P. 2245–2248. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2245>.
- [11] Kazuyuki F., Kyoko H., Ryosuke K., Tatsuo S., Yukako W. Explicit Form of the Evolution Operator of TAVIS-CUMMINGS Model: Three and Four Atoms Cases // *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*. 2012. Vol. 1. No. 6, Pp. 721–730. DOI: <http://doi.org/10.1142/S0219887804000344>.
- [12] Liu H.P., Cai J.F. Entanglement in Three-Atom Tavis Cummings Model Induced by a Thermal Field // *Communications in Theoretical Physics*. 2005. Vol. 43. Issue 3. P. 427–431.
- [13] Cirac J.I., Vidal G., Dur W. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways // *Physical Review A*. 2000. Vol. 62. Issue 6. P. 062314. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.62.062314>.
- [14] Garcia-Alcaine G., Sabin C. A classification of entanglement in three-qubit systems // *The European Physical Journal D*. 2008. Vol. 48. Issue 3. P. 435–442. DOI: <http://dx.doi.org/10.1140/epjd/e2008-00112-5>.
- [15] Youssef M., Metwally N., Obada A.-S.F. Some entanglement features of a three-atom Tavis–Cummings model: a cooperative case // *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*. 2010. Vol. 43. P. 095501. URL: <https://arxiv.org/pdf/0908.4337.pdf>.
- [16] Han K.H., Kye S.H. The role of phases in detecting three-qubit entanglement // *Journal of Mathematical Physics*. 2017. Vol. 58. Issue 10. P. 102201. DOI: <http://doi.org/10.1063/1.5004977>.
- [17] Siti Munirah Mohd S.M., Idrus B., Zainuddin H., Mukhtar M. Entanglement Classification for a Three-qubit System using Special Unitary Groups // *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*. 2019. Vol. 10, issue 7. P. 374–379. DOI: <http://dx.doi.org/10.14569/IJACSA.2019.0100751>.
- [18] Tavis M., Cummings F.W. Exact solution for an n-molecule–radiation-field hamiltonian // *Physical Review*. 1968. Vol. 170. Issue 2. P. 379–384. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRev.170.379>.
- [19] Kim M.S., Lee J., Ahn D., Knight P.L. Entanglement induced by a single-mode heat environment // *Physical Review A*. 2002. Vol. 65. Issue 4. P. 040101. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.65.040101>.
- [20] Zhou L., Song H.S. Entanglement induced by a single-mode thermal field and criteria for entanglement // *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*. 2002. Vol. 4. Number 6. Pp. 425–429. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1464-4266/4/6/310>.
- [21] Bashkirov E.K. Entanglement induced by the two-mode thermal noise // *Laser Physics Letters*. 2006. Vol. 3. P. 145–150. Available at: https://www.researchgate.net/publication/2196323_Entanglement_induced_by_a_two-mode_thermal_field.
- [22] Aguiar L.S., Munhoz P.P., Vidiella-Barranco A., Roversi J.A. The entanglement of two dipole-dipole coupled in a cavity interacting with a thermal field // *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*. 2005. Vol. 7. Issue 12. P. 769–771. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1464-4266/7/12/049>.
- [23] Liao X.-P., Fang M.-F., Cai J.-W., Zheng X.-J. The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms interacting with a thermal field via two-photon process // *Chinese Physics B*. 2008. Vol. 17. Number 6. Pp. 2137–2142. DOI: <http://doi.org/10.1088/1674-1056/17/6/032>.
- [24] Bashkirov E.K., Stupatskaya M.P. The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms induced by nondegenerate two-mode thermal noise // *Laser Physics*. 2009. Vol. 19. P. 525–530. DOI: <http://dx.doi.org/10.1134/S1054660X09030281>.
- [25] Zhang B. Entanglement between two qubits interacting with a slightly detuned thermal field // *Optics Communications*. 2010. Vol. 283. Issue 23, P. 4676–4679. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.optcom.2010.06.094>.
- [26] Bashkirov E.K. Thermal Entanglement Between a Jaynes-Cummings Atom and an Isolated Atom // *International Journal of Theoretical Physics*. 2018. Vol. 57. P. 3761–3771. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10773-018-3888-y>.
- [27] Башкиров Е.К. Динамика перепутывания атомов с двухфотонными переходами, индуцированного тепловым полем // *Компьютерная оптика*. 2010. Т. 44, № 2. С. 167–176. DOI: <http://doi.org/10.18287/2412-6179-CO-595>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-95-105

Submitted: 11.05.2022

Revised: 22.06.2022

Accepted: 14.11.2022

A.R. Bagrov

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail:alexander.bagrov00@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6744-2222>

E.K. Bashkirov

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail:bashkirov.ek@ssau.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8682-4956>

DYNAMICS OF THE THREE-QUBITS TAVIS — CUMMINGS MODEL

ABSTRACT

In this article, we have studied the entanglement dynamics of three identical qubits (natural or artificial two-level atoms) resonantly interacting with the one mode of the thermal field of a microwave lossless resonator via one-photon transitions. An exact solution of the quantum time Schrodinger equation is found for the total wave function of the system for the initial separable and entangled states of qubits and the Fock initial state of the resonator. On the basis of this solution, an exact solution of the quantum Liouville equation for the total time-dependent density matrix of the system in the case of a thermal field of the resonator is constructed. The exact solution for the full density matrix is used to calculate the criterion of entanglement of pairs of qubits – negativity. The results of numerical simulation of the time dependence of the negativity of pairs of qubits showed that with an increase in the intensity of the thermal resonator field, the degree of entanglement of pairs of qubits decreases. It is also shown that In the model under consideration, for any initial states of qubits and intensities of the thermal field of the resonator, the effect of sudden death of entanglement takes place. This behavior of the entanglement parameter in the model under consideration differs from that in the two-qubit model. For two-qubit model, the effect of the sudden death of entanglement takes place only for the initial entangled states of qubits and intense thermal fields of the resonator.

Key words: qubits; resonant interaction; cavity; one-photon transitions; exact solution of the quantum Liouville equation; entanglement; negativity; sudden death of entanglement.

Citation. Bagrov A.R., Bashkirov E.K. Dynamics of the three-qubits Tavis – Cummings model. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2022, vol. 28, no. 1–2, pp. 95–105. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2022-28-1-2-95-105>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Bagrov A.R., Bashkirov E.K., 2022

Alexander R. Bagrov — undergraduate student of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

Eugene K. Bashkirov — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of General and Theoretical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Buluta I., Ashhab S., Nori F. Natural and artificial atoms for quantum computation. *Reports on Progress in Physics*, 2011, vol. 74, number 10, p. 104401. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/74/10/104401>.
- [2] Xiang Z.L., Ashhab S., You J.Y., Nori F. Hybrid quantum circuits: Superconducting circuits interacting with other quantum systems. *Reviews of Modern Physics*, 2013, vol. 85, issue 2, pp. 623–653. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.85.623>.
- [3] Gu X., Kockum A.F., Miranowicz A., Liu Y.X., Nori F. Microwave photonics with superconducting quantum circuits. *Physics Reports*, 2017, vol. 718–719, pp. 1–102. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2017.10.002>.
- [4] Arute F. [et al.] Quantum supremacy using a programmable superconducting processor. *Nature*, 2019, vol. 574, pp. 505–510. DOI: <http://doi.org/10.1038/s41586-019-1666-5>.
- [5] Ball P. First quantum computer to pack 100-qubits enters crowded race. *Nature*, 2021, vol. 599, p. 542. DOI: <http://dx.doi.org/10.1038/d41586-021-03476-5>.

- [6] Georgescu I.M., Ashhab S., Nori P. Quantum simulation. *Reviews of Modern Physics*, 2014, vol. 88, issue 1, pp. 153–185. DOI: <http://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153>.
- [7] Wendin G. Quantum information processing with super-conducting circuits: a review. *Reports on Progress in Physics*, 2017, vol. 80, number 10, pp. 1–60. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6633/aa7e1a>.
- [8] Peres A. Separability Criterion for Density Matrices. *Physical Review Letters*, 1996, vol. 77, issue 8, pp. 1413–1415. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.1413>.
- [9] Horodecki R., Horodecki M., Horodecki P. Separability of Mixed States: Necessary and Sufficient Condition. *Physics Letters A*, 1996, vol. 223, issues 1–2, pp. 333–339. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0375-9601\(96\)00706-2](http://doi.org/10.1016/S0375-9601(96)00706-2).
- [10] Wootters W.K. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits. *Physical Review Letters*, 1998, vol. 80, issue 10, pp. 2245–2248. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.2245>.
- [11] Kazuyuki F., Kyoko H., Ryosuke K., Tatsuo S., Yukako W. Explicit Form of the Evolution Operator of TAVIS-CUMMINGS Model: Three and Four Atoms Cases. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 2012, vol. 1, no. 6, pp. 721–730. DOI: <http://doi.org/10.1142/S0219887804000344>.
- [12] Liu P., Cai J.F. Entanglement in Three-Atom Tavis — Cummings Model Induced by a Thermal Field. *Communications in Theoretical Physics*, 2005, vol. 43, issue 3, pp. 427–431.
- [13] Cirac J.I., Vidal G., Dur W. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways. *Physical Review A*, 2000, vol. 62, issue 6, p. 062314. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.62.062314>.
- [14] Garcia-Alcaine G., Sabin C. A classification of entanglement in three-qubit systems. *The European Physical Journal D*, 2008, vol. 48, issue 3, pp. 435–442. DOI: <http://dx.doi.org/10.1140/epjd/e2008-00112-5>.
- [15] Youssef M., Metwally N., Obada A.-S.F. Some entanglement features of a three-atom Tavis–Cummings model: a cooperative case. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 2010, vol. 43, p. 095501. Available at: <https://arxiv.org/pdf/0908.4337.pdf>.
- [16] Han K.H., Kye S.H. The role of phases in detecting three-qubit entanglement. *Journal of Mathematical Physics*, 2017, vol. 58, issue 10, p. 102201. DOI: <http://doi.org/10.1063/1.5004977>.
- [17] Siti Munirah Mohd S.M., Idrus B., Zainuddin H., Mukhtar M. Entanglement Classification for a Three-qubit System using Special Unitary Groups, SU(2) and SU(4). *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, 2019, vol. 10, issue 7, pp. 374–379. DOI: <http://dx.doi.org/10.14569/IJACSA.2019.0100751>.
- [18] Tavis M., Cummings F.W. Exact solution for an n-molecule—radiation-field hamiltonian. *Physical Review*, 1968, vol. 170, issue 2, pp. 379–384. DOI: <http://doi.org/10.1103/PhysRev.170.379>.
- [19] Kim M.S., Lee J., Ahn D., Knight P.L. Entanglement induced by a single-mode heat environment. *Physical Review A*, 2002, vol. 65, issue 4, p. 040101. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.65.040101>.
- [20] Zhou L., Song H.S. Entanglement induced by a single-mode thermal field and criteria for entanglement. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 2002, vol. 4, number 6, pp. 425–429. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1464-4266/4/6/310>.
- [21] Bashkirov E.K. Entanglement induced by the two-mode thermal noise. *Laser Physics Letters*, 2006, vol. 3, pp. 145–150. Available at: https://www.researchgate.net/publication/2196323_Entanglement_induced_by_a_two-mode_thermal_field.
- [22] Aguiar L.S., Munhoz P.P., Vidiella-Barranco A., Roversi J.A. The entanglement of two dipole-dipole coupled in a cavity interacting with a thermal field. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 2005, vol. 7, issue 12, pp. 769–771. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1464-4266/7/12/049>.
- [23] Liao X.-P., Fang M.-F., Cai J.-W., Zheng X.-J. The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms interacting with a thermal field via two-photon process. *Chinese Physics B*, 2008, vol. 17, number 6, pp. 2137–2142. DOI: <http://doi.org/10.1088/1674-1056/17/6/032>.
- [24] Bashkirov E.K., Stupatskaya M.P. The entanglement of two dipole-dipole coupled atoms induced by nondegenerate two-mode thermal noise. *Laser Physics*, 2009, vol. 19, pp. 525–530. DOI: <http://dx.doi.org/10.1134/S1054660X09030281>.
- [25] Zhang B. Entanglement between two qubits interacting with a slightly detuned thermal field. *Optics Communications*, 2010, vol. 283, issue 23, pp. 4676–4679. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.optcom.2010.06.094>.
- [26] Bashkirov E.K. Thermal Entanglement Between a Jaynes-Cummings Atom and an Isolated Atom. *International Journal of Theoretical Physics*, 2018, vol. 57, pp. 3761–3771. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10773-018-3888-y>.
- [27] Bashkirov E.K. Dynamics of entanglement of atoms with two-photon transitions induced by a thermal field. *Computer Optics*, 2020, vol. 44, no. 2, pp. 167–176. DOI: <https://doi.org/10.18287/2412-6179-CO-595>. (In Russ.)