

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ MATHEMATICAL MODELLING



Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-4-92-98

УДК 517.93



Дата: поступления статьи: 20.09.2021
после рецензирования: 22.10.2021
принятия статьи: 25.11.2021

А.С. Кирсанова

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: askirsanova99@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0000-0000-0000>

БИФУРКАЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ В МОДЕЛИ ВЕТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ УСТАНОВКИ

АННОТАЦИЯ

В статье рассматривается математическая модель ветроэнергетической установки. В современном мире альтернативная энергетика активно развивается, так как природные ресурсы для традиционных энергоносителей значительно уменьшаются каждый год. В свою очередь истощение энергетических запасов приведет к мировым проблемам. Таким образом, актуальность данной задачи заключается в эффективном использовании ветрового потенциала. Сложность данной работы заключается в том, что модель не определена полностью аналитически, то есть часть функций в математической модели задана лишь графически на основе экспериментальных данных. Производится аппроксимация графика относительного аэродинамического момента сил. Исследуется уравнение стационарных режимов при различных значениях внешнего сопротивления динамической модели. Найдены условия, при которых в системе наблюдается бифуркация типа седло–узел и суперкритическая бифуркация Андронова–Хопфа.

Ключевые слова: математическое моделирование; динамические модели; ветроэнергетическая установка; стационарные режимы; аппроксимация функции; бифуркация Андронова–Хопфа; бифуркация типа седло–узел; дифференциальные уравнения.

Цитирование. Кирсанова А.С. Бифуркации стационарных режимов в модели ветроэнергетической установки // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2021. Т. 27, № 4. С. 92–98. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-4-92-98>.

Информация о конфликте интересов: автор и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© Кирсанова А.С., 2021

Кирсанова Алена Сергеевна — студент, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Введение

В данной статье проводится математическое моделирование колебаний ветроэнергетической установки (ВЭУ). Представленный анализ рассматриваемой системы приводится в первые, так как в более ранних работах на данную тему не было описания динамической модели в аналитическом виде. В работах [1; 2] были предложены новые типы конструкции ветроэнергетической установки. В статьях [3–5] исследуются движения электромеханической системы, моделирующей стационарные режимы генератора с ветротурбинными движителем с помощью качественных методов теоретической механики. Рассмотрены вопросы существования и устойчивости установившихся режимов и описаны области их притяжения [3–5]. Математическая модель в безразмерной форме представляет собой дифференциальную систему [1–5]:

$$\begin{aligned} J\dot{\Omega} &= -kI + M(\Omega), \\ LI &= k\Omega - (R + r)I, \end{aligned} \quad (1)$$

где J — момент инерции турбины, L — индуктивность якоря, I — сила тока в обмотке якоря, Ω — коэффициент быстроходности, R — внешнее сопротивление, M — относительный момент аэродинамических сил. Параметр k — коэффициент electromеханического взаимодействия, r — малое внутреннее сопротивление якоря. Здесь точка означает производную по времени t . Функция $M(\Omega)$ задается графиком, представленным на рис. 1 [3].

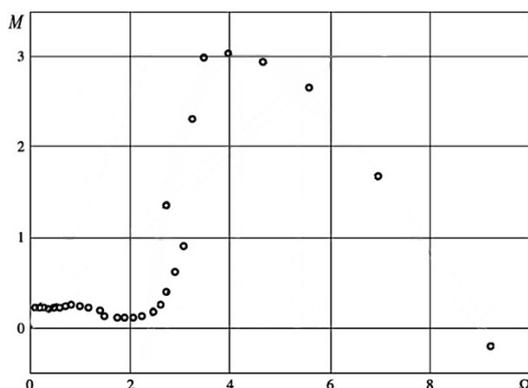


Рис. 1. Экспериментальные данные
 Fig. 1. Experimental data

Рассмотрим задачу определения условий, при которых в системе (1) наблюдается бифуркации Андронова–Хопфа. Для этого нужно сначала получить аналитические выражения для функции $M(\Omega)$.

1. Основные результаты

1.1. Аппроксимация функции $M(\Omega)$

Рассмотрим график экспериментальных данных $M(\Omega)$, изображенный на рис. 1, 2. В литературе экспериментальные данные представлены только в графической форме. Величины на рис. 1, 2 являются безразмерными ($M = \frac{M_a}{0,5\rho S b V^2}$, $\Omega = \frac{b\omega}{V}$, где ω — угловая скорость, b — расстояние от эффективного давления лопастей для оси вращения, V — скорость воздуха, M_a — момент аэродинамических сил, ρ — плотность воздуха, S — площадь лопастей) [3; 5]. Рисунок вида 2 приводится в литературе без аналитического задания, просто на основе экспериментальных данных, приведенных на предыдущем рисунке. Для построения функции $M(\Omega)$ разобьем его на четыре промежутка:

$\Omega \in [0, 2, 0200000000]; [2, 0200000000; 2, 7700000000]; [2, 7700000000; 4, 6700000000]; [4, 6700000000; 9, 2000000000]$

и аппроксимируем ее на каждом из них отдельно.

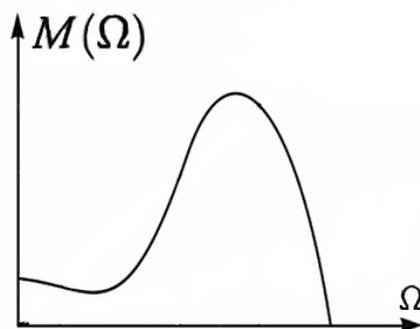


Рис. 2. График зависимости аэродинамического момента от угловой скорости
 Fig. 2. Graph of aerodynamic moment versus angular velocity

Зададим набор точек в каждом интервале Ω . Применяя процедуру интерполяции полинома Лагранжа, получим следующие интерполяционные полиномы третьей степени, которые и задают функцию $M(\Omega)$:

$$M(\Omega) = \begin{cases} 0,08352201429 \Omega^3 - 0,3205588527 \Omega^2 + 0,2393989228 \Omega + 0,2, \\ \text{где } \Omega \in [0; 2,0200000000]; \\ 1,642804329 \Omega^3 - 8,942851383 \Omega^2 + 15,98373866 \Omega - 9,273404856, \\ \text{где } \Omega \in [2,0200000000; 2,7700000000]; \\ 0,3083893674 \Omega^3 - 4,335287773 \Omega^2 + 20,01021546 \Omega - 27,41855423, \\ \text{где } \Omega \in [2,7700000000; 4,6700000000]; \\ 0,01644836128 \Omega^3 - 0,3994220004 \Omega^2 + 2,444416690 \Omega - 1,489696994, \\ \text{где } \Omega \in [4,6700000000; 9,2000000000]. \end{cases} \quad (2)$$

Рисунок 3 демонстрирует график функции $M(\Omega)$, заданной (2).

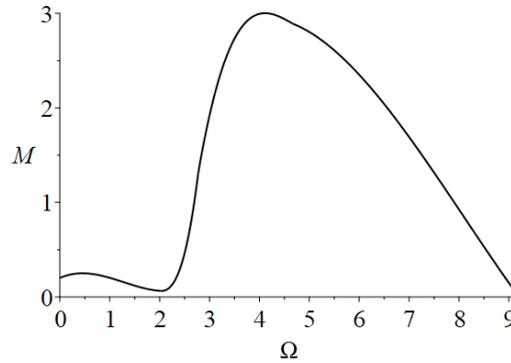


Рис. 3. График функции $M(\Omega)$, заданной (2)
 Fig. 3. Graph of the function $M(\Omega)$ given by (2)

1.2. Стационарные положения

Стационарные положения динамической системы (1) определяются системой уравнений

$$\begin{aligned} -kI + M(\Omega) &= 0, \\ k\Omega - (R + r)I &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Преобразовав систему (3), получаем:

$$\begin{aligned} I &= \frac{M(\Omega)}{k}, \\ I &= \frac{k\Omega}{R + r}. \end{aligned} \quad (4)$$

Рассмотрим систему (4) при $k = 0,5$, $r = 0,1$ и различных R (рис. 4).

Рассмотрим некоторые характерные значения параметра R .

При $R = 0$ система (1) имеет единственное положение равновесия с координатами $(0,08741320041; 0,4370660021)$. Оно принадлежит первому участку кривой $\Omega \in [0; 2,0200000000]$. Это положение равновесия является устойчивым фокусом.

При $R = 0,22$ система (1) имеет три положения равновесия: $(0,3258577352; 0,4937238412)$ (устойчивый фокус), $(3,511108308; 5,486106731)$ (седло) и $(3,696593975; 5,775928086)$ (неустойчивый фокус). Первое положение равновесия принадлежит участку $\Omega \in [0; 2,0200000000]$, второе и третье положения равновесия принадлежат участку $\Omega \in [2,7700000000; 4,6700000000]$.

При $R = 0,25$ система (1) имеет три положения равновесия: $(0,9332841322; 0,4242200600)$ (устойчивый фокус), $(3,162469338; 4,517813341)$ (седло), $(4,197279906; 5,996114154)$ (устойчивый фокус). Первое положение равновесия принадлежит участку $\Omega \in [0; 2,0200000000]$, второе и третье положения равновесия принадлежат участку $\Omega \in [2,7700000000; 4,6700000000]$.

При $R = 1$ система (1) имеет три положения равновесия: $(0,3471586022; 0,4959408604)$ (устойчивый фокус), $(2,552429151; 1,160195069)$ (седло) и $(7,104353566; 3,229251620)$ (устойчивый фокус). Первое положение равновесия принадлежит участку $\Omega \in [0; 2,0200000000]$, второе — участку $\Omega \in [2,7700000000; 4,6700000000]$, а третье — участку $\Omega \in [4,6700000000; 9,2000000000]$.

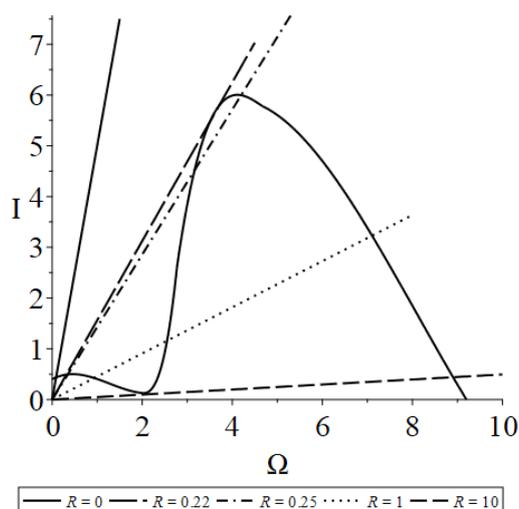


Рис. 4. Графики функции $M(\Omega)/k$ и прямой $I = k\Omega/(R+r)$ при различных значениях R
 Fig. 4. Graphs of the function $M(\Omega)/k$ and the line $I = k\Omega/(R+r)$ for different values of R

При $R = 10$ система (1) имеет единственное положение равновесия с координатами $(8,903433655; 0,4407640424)$, которое принадлежит четвертому участку кривой, $\Omega \in [4,6700000000; 9,2000000000]$ и является устойчивым узлом.

Найдем такое значение параметра R , при котором прямая, задаваемая уравнением системы (4), проходит как касательная к кривой, описываемой системой (4) на промежутках $\Omega \in [2,0200000000; 2,7700000000]$ и $\Omega \in [2,7700000000; 4,6700000000]$. Для этого должно выполняться следующее условие:

$$\frac{M(\Omega)}{k} = \frac{k\Omega}{R+r}. \quad (5)$$

Дискриминант уравнения (5), представляющий собой кубическое уравнение относительно переменной Ω , равен нулю.

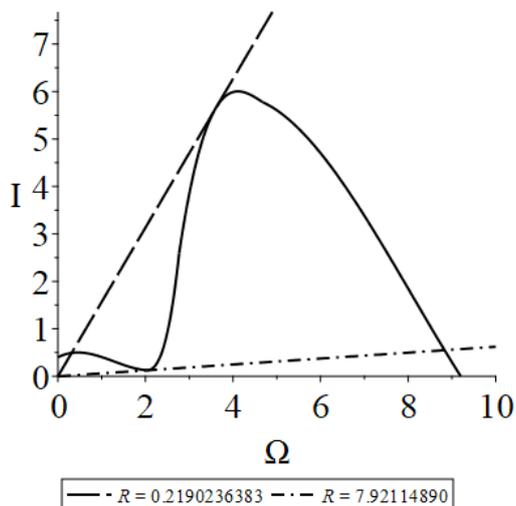


Рис. 5. Графики функции $M(\Omega)/k$ и прямой $I = k\Omega/(R+r)$ при значениях R , соответствующих условиям (1) и (2)

Fig. 5. Graphs of the function $M(\Omega)/k$ and the line $I = k\Omega/(R+r)$ for the values of R corresponding to conditions (1) and (2)

Выполнение этих условий на участке $\Omega \in [2,0200000000; 2,7700000000]$ определяет значение $R = 7,921148903$ (рис. 5). Подставив найденное значение параметра в систему (4), мы получаем три положения равновесия: $(2,049034796; 0,1277270140)$ (устойчивый узел), $(2,052221612; 0,1279256648)$ (седло) и

(8, 831167333; 0, 5504926689) (устойчивый фокус). Первое и второе положения равновесия принадлежат участку $\Omega \in [2, 0200000000; 2, 7700000000]$, а третье — участку $\Omega \in [4, 6700000000; 9, 2000000000]$.

В точке касания с координатами (2, 050629377; 0, 1278205044) при $R^* = 7, 921519655$ одно из собственных чисел является нулевым, а другое — отрицательным. При $\Omega < 2, 050629377$ мы получаем устойчивый узел, а при $\Omega > 2, 050629377$ — седло. Таким образом, точка касания на участке $\Omega \in [2, 02; 2, 77]$, соответствует бифуркации типа седло–узел.

Выполнение условий (1), (2) на участке $\Omega \in [2, 7700000000; 4, 6700000000]$ дает значение $R = 0, 2190236383$. Подставив найденный параметр в систему (4), мы получаем три состояния равновесия: (0, 3141219902; 0, 4923177354) (устойчивый фокус), (3, 600676648; 0, 643275634) (седло) и (3, 601993738; 5, 645339886) (неустойчивый узел). Первое положение равновесия принадлежит участку $\Omega \in [0; 2, 0200000000]$, второе и третье — участку $\Omega \in [2, 7700000000; 4, 6700000000]$.

Рассмотрим теперь более подробно промежуток $\Omega \in [2, 7700000000; 4, 6700000000]$. Найдем условия, при которых на данном участке возникает бифуркация Андронова–Хопфа. Для этого необходимо выполнение следующих условий: $\text{Tr}A = 0$ и $\det A > 0$, где A — матрица первого приближения системы (1):

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{kJ} \frac{dM(\Omega)}{d\Omega} & -\frac{1}{J} \\ \frac{k}{(R+r)L} & -\frac{1}{L} \end{pmatrix}.$$

Из условия $\text{Tr}A = 0$ находим соответствующее значение Ω и подставляем в систему (4). В результате для случая $J = 1, L = 1$ получаем $R = 0, 2214383123$, где положение равновесия имеет координаты (3, 753316623; 5, 838315595) (рис. 6).

Таким образом, в системе наблюдается бифуркация рождения цикла (суперкритическая бифуркация Андронова–Хопфа). Рисунок 7 демонстрирует предельный цикл при выбранных значениях параметров. Устойчивый фокус при уменьшении значения параметра R и $\Omega < 3, 753316623$ теряет устойчивость при бифуркационном значении $R = 0, 2214383123$ и становится неустойчивым фокусом, одновременно с этим рождается устойчивый предельный цикл.

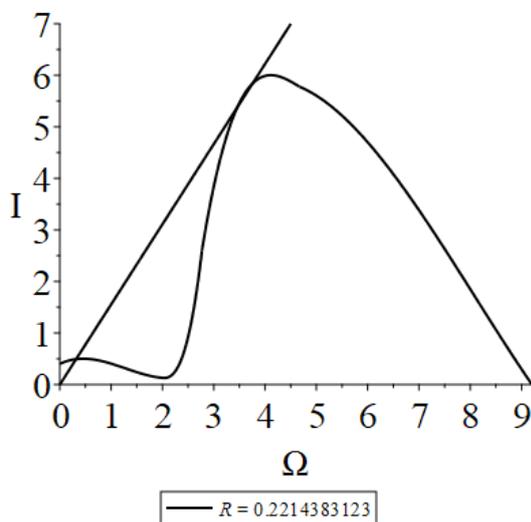


Рис. 6. Графики функции $M(\Omega)/k$ и прямой $I = k\Omega/(R+r)$ при значении $R = 0, 2214383123$

Fig. 6. Graphs of the function $M(\Omega)/k$ and straight lines $I = k\Omega/(R+r)$ with $R = 0, 2214383123$

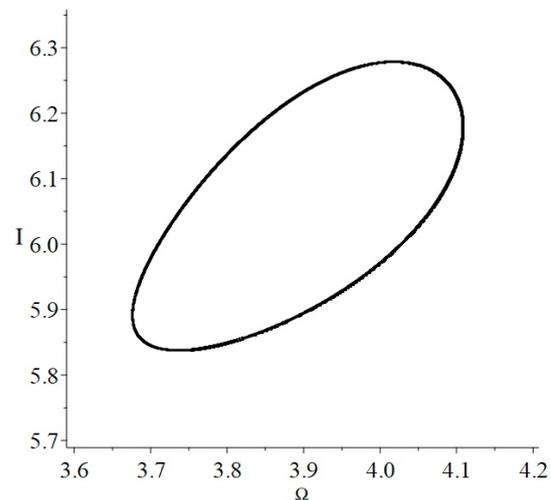


Рис. 7. Предельный цикл
 Fig. 7. Limit cycle

Выводы

В результате анализа динамической модели малой ветроэнергетической установки, в предположении неизменности внешнего сопротивления R , были получены условия, при которых в системе наблюдаются

ся бифуркация типа седло–узел и суперкритическая бифуркация Андронова–Хопфа. Это означает, что возможны смены режимов работы малой ВЭУ и колебания в системе.

Литература

- [1] Климина Л.А., Досаев М.З., Селюцкий Ю.Д. О динамике ветроэнергетической установки с рабочим элементом на основе механизма антипараллелограмма // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2016. Т. 17. № 8. С. 536–540. DOI: <http://doi.org/10.17587/mau.17.536-540>. EDN: <https://www.elibrary.ru/whtppl>.
- [2] Андронов П.Р., Досаев М.З., Дынникова Г.Я. [и др.]. Моделирование ветродвигателя колебательного типа // *Проблема машиностроения и надёжности машин*. 2009. № 4. С. 86–91. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=12806991>. EDN: <https://www.elibrary.ru/kugqnt>.
- [3] Досаев М.З., Линь Ч.Х., Лю В.Л. [и др.]. Качественный анализ стационарных режимов малых ветровых электростанций // *Прикладная математика и механика*. 2009. Т. 73. Вып. 3. С. 368–374. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=12242530>. EDN: <https://www.elibrary.ru/khxmj>.
- [4] Досаев М.З., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д. О динамике малой ветроэлектростанции // *Доклады академии наук*. 2007. Т. 416. № 1. С. 50–53. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=9533786>. EDN: <https://www.elibrary.ru/iaqit>.
- [5] Досаев М.З., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д. [и др.]. Бифуркации режима функционирования малых ветроэлектростанций и оптимизации их характеристик // *Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела*. 2009. № 2. С. 59–66. DOI: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=13064268>. EDN: <https://www.elibrary.ru/kzxakl>.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-4-92-98

Submitted: 20.09.2021

Revised: 22.10.2021

Accepted: 25.11.2021

A.S. Kirsanova

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

E-mail: askirsanova99@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0000-0000-0000>

BIFURCATIONS OF STATIONARY REGIMES IN THE MODEL OF A WIND POWER PLANT

ABSTRACT

The article should use a mathematical model of a wind power plant. In the chosen world, alternative energy is actively developing, as natural resources for harmful energy carriers are significantly reduced every year. In turn, the energy reserves of life situations turned out to be related to world problems. Thus, the relevance of this problem is solved in the free system of the wind section. The complexity of this work is determined by the fact that the model, which is not defined, is found completely, that is, part of the functions in the mathematical model is set only graphically, based on experimental data. The graph of relative aerodynamic moment of forces is approximated. The ratio of stationary modes is studied for various values of external resistance of the dynamic model. Conditions are found under which a saddle-node bifurcation and a supercritical Andronov–Hopf bifurcation are observed in the system.

Key words: mathematical modelling; dynamical models; wind power plant; stationary modes; function approximation; Andronov–Hopf bifurcation; saddle-node bifurcation; differential equations.

Citation. Kirsanova A.S. Bifurcations of stationary regimes in the model of a wind power plant. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia serii* = *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 4, pp. 92–98. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-4-92-98>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Kirsanova A.S., 2021

Alena S. Kirsanova — student, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Klimina L.A., Dosayev M.Z., Selyutski Yu.D. Dynamics of a wind turbine with the working element based on an antiparallel link mechanism. *Mechatronics, Automation, Control*, 2016, vol. 17, no. 8, pp. 536–540. DOI: <http://doi.org/10.17587/mau.17.536-540>. EDN: <https://www.elibrary.ru/whtppl> (in Russ.)
- [2] Andronov P.R., Dosaev M.Z., Dynnikova G.Ya., Selyutskii Y.D., Strekalov S.D. Modeling of oscillating wind turbine. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2009, vol. 38, no. 4, pp. 383–387. DOI: <http://doi.org/10.3103/S1052618809040153>. EDN: <https://www.elibrary.ru/wrsift> (in English; Russian original).
- [3] Dosaev M.Z., Lin C.H., Lu W.L., Samsonov V.A., Selyutskii Y.D. A qualitative analysis of the steady modes of small wind power generators. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, vol. 73, issue 3, pp. 259–263. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2009.07.015>. EDN: <https://www.elibrary.ru/ukvmqq> (in English; Russian original).
- [4] Dosaev M.Z., Samsonov V.A., Seliutski Yu.D. On the dynamics of a small-scale wind power generator. *Doklady Physics*, 2007, vol. 52, no. 9, pp. 493–495. DOI: <http://doi.org/10.1134/S1028335807090091>. EDN: <https://www.elibrary.ru/lkgtzn> (in English; Russian original)
- [5] Dosaev M.Z., Samsonov V.A., Selyutskii Y.D., Lu W.L., Lin C.H. Bifurcation of operation modes of small wind power stations and optimization of their characteristics. *Mechanics of Solids*, 2009, vol. 44, issue 2, pp. 214–221. DOI: <http://doi.org/10.3103/S002565440902006X>. EDN: <https://www.elibrary.ru/mwuwdp>. (in English; Russian original)