

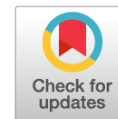


Научная статья

DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-4-30-67

УДК 629.7.05

Дата: поступления статьи: 03.09.2021
после рецензирования: 11.10.2021
принятия статьи: 25.11.2021



Р.М. Жаббаров

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: zhabbarov.rm@ssau.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9340-8512>

Л.В. Степанова

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, г. Самара, Российская Федерация
E-mail: Stepanovalv2015@yandex. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6693-3132>

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ И БОКОВЫХ НАДРЕЗОВ, ПОЛУЧЕННЫХ С ПОМОЩЬЮ УСЕЧЕННЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ УИЛЬЯМСА¹

АННОТАЦИЯ

В настоящей статье выполнен анализ мультипараметрического разложения М. Уильямса полей напряжений и перемещений у вершин трещины в телах с различной конфигурацией. На примере семи различных конфигураций дана оценка вклада высших приближений при описании полей напряжений и перемещений у вершины трещины в линейно упругом изотропном материале. Целью исследования является определение числа слагаемых в ряде Уильямса, необходимых для точного описания поля напряжений у вершины трещины, для различных геометрий тел с трещинами, разрезами и включениями. Показано, что все конфигурации с сосредоточенными силами обладают большей чувствительностью к высшим приближениям. В конфигурациях с распределенными нагрузками требуется меньше слагаемых для достижений такой же точности.

Ключевые слова: многопараметрическое разложение М. Уильямса; поле напряжений у вершины трещины; коэффициенты ряда Уильямса; влияние слагаемых высокого порядка; точные решения; теория функций комплексного переменного.

Цитирование. Жаббаров Р.М., Степанова Л.В. Сравнительный анализ полей напряжений у вершины трещины и боковых надразов, полученных с помощью усеченных разложений Уильямса // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2021. Т. 27, № 4. С. 30–67. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-4-30-67>.

Информация о конфликте интересов: авторы и рецензенты заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Информация об авторах:

© Жаббаров Р.М., 2021

Жаббаров Рамиль Муритович — аспирант кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

© Степанова Л.В., 2021

Степанова Лариса Валентиновна — доктор физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования в механике, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках проекта 19-31-90100

Введение

Отыскание напряженно-деформированного состояния у вершины трещины (острого выреза, включения) было и остается одной из фундаментальных проблем механики разрушения, для решения которой прибегают к теоретическим [1–19], экспериментальным [20–25] и численным подходам и методам [22–27] Zhong. Теоретические результаты, полученные классической механикой хрупкого разрушения, позволяют найти точные формулы для полей напряжений, деформаций и перемещений в области, прилегающей к вершине трещины, углового выреза или включения [2; 3] в линейно-упругих средах. Однако следует заметить, что аналитические подходы ограничены сравнительно простыми конфигурациями тел с трещинами и разрезами и достаточно простыми системами нагрузок. Поэтому в современной механике разрушения прибегают к экспериментальным методам и вычислительным технологиям [4; 5]. Среди экспериментальных методов в последнее время выделяются интерференционно-оптические методы (преимущественно метод корреляции цифровых изображений и классические оптические методы, такие как, спекл-интерферометрия, цифровая голография и цифровая фотоупругость) [6]. В настоящее время поляриционно-оптические методы часто используются для восстановления коэффициентов ряда Уильямса [7–16], представляющего поля напряжений, деформаций и перемещений в зоне, примыкающей к вершине дефекта. При применении экспериментальных методов для определения полей напряжений и перемещений часто ограничивались нахождением лишь коэффициентов интенсивности напряжений, а впоследствии коэффициентами интенсивности напряжений и Т-напряжениями (первыми регулярными слагаемыми в ряде Уильямса), которые дают существенное уточнение оценкам всех определяемых механических параметров. В настоящее время в вычислительных комплексах, исполняющих процедуру метода конечных элементов, появилась возможность автоматического вычисления Т-напряжений.

Одним из классических результатов механики упругого разрушения является асимптотическое представление, найденное М. Уильямсом [28; 29], для компонент тензора напряжений в непосредственной окрестности вершины трещины в изотропной линейно-упругой среде:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sum_{m=1}^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^m f_k^{m,ij}(\theta) r^{k/2-1}, \quad (1)$$

где приняты следующие обозначения: $f_k^{m,ij}(\theta)$ – угловые зависимости компонент тензора напряжений, известные из решения краевых задач о растяжении и поперечном сдвиге; r – расстояние от кончика трещины до рассматриваемой точки; $a_k = a_k$ – масштабные (амплитудные) коэффициенты, обуславливаемые геометрией тела с трещиной и приложенной нагрузкой; индекс m отражает вид нагружения и принимает значения 1 для нагружения, соответствующего нормальному отрыву, значение 2 – поперечному сдвигу.

Угловые распределения компонент тензора напряжений $f_k^{m,ij}(\theta)$, присутствующие в формулах в (1), определяются формулами [30–34]

$$\begin{aligned} f_k^{1,11}(\theta) &= k \left[(2 + k/2 + (-1)^k) \cos(k/2 - 1)\theta - (k/2 - 1) \cos(k/2 - 3)\theta \right] / 2, \\ f_k^{1,22}(\theta) &= k \left[(2 - k/2 - (-1)^k) \cos(k/2 - 1)\theta + (k/2 - 1) \cos(k/2 - 3)\theta \right] / 2, \\ f_k^{1,12}(\theta) &= k \left[- (k/2 + (-1)^k) \sin(k/2 - 1)\theta + (k/2 - 1) \sin(k/2 - 3)\theta \right] / 2, \\ f_k^{2,11}(\theta) &= -k \left[(2 + k/2 - (-1)^k) \sin(k/2 - 1)\theta - (k/2 - 1) \sin(k/2 - 3)\theta \right] / 2, \\ f_k^{2,22}(\theta) &= -k \left[(2 - k/2 + (-1)^k) \sin(k/2 - 1)\theta + (k/2 - 1) \sin(k/2 - 3)\theta \right] / 2, \\ f_k^{2,12}(\theta) &= k \left[- (k/2 - (-1)^k) \cos(k/2 - 1)\theta + (k/2 - 1) \cos(k/2 - 3)\theta \right] / 2. \end{aligned} \quad (2)$$

Компоненты вектора смещений в окрестности вершины трещины вычисляются посредством асимптотических рядов

$$u_i(r, \theta) = \sum_{m=1}^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^m \frac{1}{2\mu} r^{k/2} g_{m,i}^k(\theta), \quad (3)$$

$$g_{1,1}^k(\theta) = (\varkappa + k/2 + (-1)^k) \cos(k/2)\theta - (k/2) \cos(k/2 - 2)\theta, \quad (4)$$

$$g_{1,2}^k(\theta) = (\varkappa - k/2 - (-1)^k) \sin(k/2)\theta + (k/2) \sin(k/2 - 2)\theta, \quad (5)$$

$$g_{2,1}^k(\theta) = - (\varkappa + k/2 - (-1)^k) \sin(k/2)\theta + (k/2) \sin(k/2 - 2)\theta, \quad (6)$$

$$g_{2,2}^k(\theta) = (\varkappa - k/2 + (-1)^k) \cos(k/2)\theta + (k/2) \cos(k/2 - 2)\theta, \quad (7)$$

где $\varkappa = 3 - 4\nu$ для случая плоского деформированного состояния, $\varkappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ – для плоского напряженного состояния [21; 35; 36].

Конфигурация рассматриваемой области и амплитуда приложенной нагрузки не влияют ни на радиальное, ни на угловое распределение напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины. Все разнообразие задач механики разрушения отражается в коэффициентах асимптотического ряда М. Уильямса a_k^m . В полном асимптотическом разложении М. Уильямса (1) в сумме отбрасываются слагаемые, отвечающие $k \leq 0$, в силу конечности энергии деформации в окрестности вершины трещины. В практических инженерных приложениях в (1) долгое время удерживалось исключительно первое слагаемое ($k = 1$) и первый амплитудный коэффициент получил название коэффициента интенсивности напряжений $K_I = \sqrt{2\pi}a_1^1 f_1^{1,22}(0)$, $K_{II} = \sqrt{2\pi}a_1^2 f_1^{2,12}(0)$.

Однако в последние 10-12 лет у представителей различных научных школ сложилось устойчивое понимание необходимости сохранения в ряде Уильямса высших приближений, регулярных слагаемых более высокого порядка малости по сравнению с первыми двумя членами ряда Уильямса [38]. Данное осознание необходимости удержания 10–15 слагаемых в многопараметрическом ряде М. Уильямса является особенно ценным при проведении экспериментальных работ, нацеленных на исследование механических полей у вершины трещины, ибо обработка интерференционных картин, получаемых интерференционно-оптическими методами, требует удержания слагаемых высокого порядка малости. Обычно экспериментатор ставит своей целью определения параметров механики хрупкого разрушения (коэффициентов интенсивности напряжений и Т-напряжений), накладывая асимптотическое решение задачи на интерференционную картину, при цифровой обработке которой извлекаются искомые величины. При выборе точек экспериментальной картины для всех поляризационно-оптических методов экспериментатор, как правило, априори не знает, сколько слагаемых в асимптотическом представлении следует удерживать. В силу указанной причины, в ходе обработке всего комплекса экспериментальной информации ошибки могут быть обусловлены недостаточностью количества слагаемых в ряде Уильямса, удерживаемых в решении. Подобным образом обстоят дела с вычислительными подходами, основанными на применении метода конечных элементов, который приобрел особую популярность в последнее время, когда параметры механики разрушения извлекаются из конечно-элементных расчетов. Идея вычислительного подхода заключается в определении коэффициентов ряда Уильямса из имеющегося конечно-элементного решения задачи для тела с угловым вырезом или трещиной. Снова ошибка в анализе может быть обусловлена тем, что исследователь часто рассматривает усеченный ряд без должного теоретического анализа.

По всей видимости, первые рассуждения и доказательства необходимости учета первых двух несингулярных слагаемых в ряде Уильямса для правильной оценки экспериментальных данных относятся к работе Шона, Ирвина и Шукла [37], в которой сформулированы следующие основные выводы: 1) изохроматические картины полос вокруг вершины трещины обеспечивают удобное средство получения данных, необходимых для оценки требуемых параметров поля напряжений; 2) использование трехпараметрической модели может существенно расширить область, из которой могут быть сделаны точные вычисления напряженного состояния; 3) включение двух регулярных слагаемых существенно уменьшает колебания в расчетных значениях параметров для быстро прогрессирующих трещин. Отказ включить этот первый неособый член более высокого порядка может привести к существенным ошибкам, которые могут возникнуть даже в довольно небольших областях измерений; 3) представления поля напряжений, использующие более двух параметров, часто необходимы для анализа фотоупругих данных с оптимальной эффективностью и надежностью.

По всей видимости, статья [37] стала провозвестником целого направления исследований в механике хрупкого разрушения, посвященного влиянию регулярных слагаемых в мультипараметрическом разложении Уильямса на аккуратное представление полей напряжений и перемещений в окрестности вершины трещины. В настоящее время воззрение о необходимости удержания высших приближений снискало доверие у представителей многих научных школ мира [38–40].

Однако преимущественно в последующих работах учитываются, как правило, исключительно два параметра. Поэтому рассматривается двухчленное разложение в ряд полей напряжений, деформаций и перемещений. Так, например, в [41] для нахождения направления распространения дефекта предлагается принимать во внимание Т-напряжение и следующие за ним регулярные слагаемые более высокого порядка малости в разложении напряжений у вершины трещины. В работе [41] формулируется усовершенствованный критерий разрушения, опирающийся на известный критерий максимального окружного напряжения с учетом Т-напряжений у вершины трещины. В статье Ю.Г. Матвиенко [42] приведены многообещающие и актуальные подходы и критерии, построенные на двухпараметрическом разложении поля напряжений в окрестности вершиноподобного дефекта. Обсуждаются теоретические и экспериментальные подходы, позволяющие учесть регулярные слагаемые в представлении полей напряжений и деформаций у вершины трещины или разреза, что равным образом позволит более аккуратно оценить траекторию трещины, конструкционную прочность и долговечность ответственных элементов конструкции.

Для нахождения направления распространения трещины в [43] авторы предлагают учитывать T -напряжения и слагаемые более высокого порядка малости в разложении напряжений у вершины трещины. Авторы работы предлагают модифицированный критерий разрушения, базирующийся на критерии максимального тангенциального напряжений с учетом углового распределения T -напряжений у вершины трещины.

Авторы [44] предлагают исследование, включающее две части. В первой части работы авторы останавливаются на теоретических принципах модифицированного варианта разработанного ими метода последовательного наращивания длины трещины. Опираясь на данную теоретическую основу, авторы выдвигают новый метод экспериментального определения параметров механики разрушения. Разработанный метод зиждется на совместном применении метода последовательного наращивания длины трещины и интерференционно-оптических методов измерений локального деформационного отклика на малое увеличение длины трещины. Авторы основываются на двухпараметрическом представлении поля напряжений, включающем T -напряжения. В исследовании [45] автор исходит из наличия погрешностей в экспериментальных данных и предлагает процедуру нахождения регулярных слагаемых в разложении полей механических величин в ряды в окрестности кончика трещины или вершины надреза при наличии погрешностей исходных данных, обусловленных неточностями измеряемых данных. Автор показывает, что метод разложения по собственным функциям решения плоских задач для двугранных углов предоставляет возможность нахождения искомого параметра с приемлемой для практики точностью даже при имеющихся значительных погрешностях. Авторы в проведенном исследовании учитывают только первое регулярное слагаемое – T -напряжения. Автор [46; 47] представляет результаты численных расчетов несингулярных слагаемых в разложении М. Уильямса (T -напряжений) в растягиваемой пластине с центральной трещиной с использованием графового метода. С помощью грубой сетки проведено сравнение расчетов для T -напряжений.

В целом идея применения двухпараметрического разложения М. Уильямса сейчас используется повсеместно [48–51].

Можно отметить, что впоследствии к данному кругу вопросов обращались авторы [52; 53] и всегда анализ количества удерживаемых в асимптотических представлениях слагаемых был неразрывно связан с рассмотрением экспериментальных данных, полученных поляризационно-оптическими методами. Представители разных научных школ независимо друг от друга приходили к заключению, что правильная интерпретация экспериментально измеренных величин, предназначенных для нахождения параметров механики разрушения (коэффициентов интенсивности напряжений, T -напряжений) влечет за собой сохранения в разложении М. Уильямса высших приближений. Скорее всего, первое систематическое изучение напряженно-деформированного состояния вблизи вершины трещины для образцов с различной конфигурацией с помощью метода цифровой фотоупругости с учетом несингулярных слагаемых было выполнено в диссертации [54]. Автор впервые разработал программное обеспечение, позволяющее проводить процедуру утонения изохроматических полос и увеличения яркости получаемых изображений для увеличения размеров зоны, из которой извлекаются экспериментальные точки. По всей видимости, впервые в диссертации были рассмотрены нагружения образцов, приводящие к смешанным модам деформирования в окрестности трещины и (или) выреза, а также изучены образцы с двумя взаимодействующими дефектами. В диссертационной работе впервые были предложены очертания метода линеаризации, получившего впоследствии название переопределенного метода. Лишь в 1997 году переопределенный метод был детально разработан, протестирован и описан Рамешем [55], а основы цифровой фотоупругости подробно изложены в монографии Рамеша [56]. Только после 2000 г. появилась целая серия исследований [57–64], посвященных построению многоточечных асимптотических разложений поля напряжений, и с тех пор экспериментаторы с помощью различных преимущественно интерференционно-оптических методов находят амплитудные (масштабные) коэффициенты многопараметрических разложений Уильямса для образцов с трещинами, угловыми вырезами и включениями различной формы. Начиная с 2000 годов сложилось понимание потребности сохранения в асимптотических разложениях механических величин высших приближений вплоть до 10–15 слагаемых. Именно понимание об усечении ряда Уильямса при сохранении регулярных слагаемых и разработанный переопределенный метод привели в механике разрушения к целому направлению конечно-элементных расчетов, нацеленных на реконструкцию разложения Уильямса из вычислительного эксперимента, проведенного с помощью метода конечных элементов. По всей видимости, калька с англоязычного названия данного подхода будет следующей: конечно-элементный переопределенный метод. Основной целью конечно-элементных вычислений в данном случае является восстановление разложения Уильямса (его коэффициентов) из численных расчетов и получение приближенных ашпроксимационных соотношений для параметров механики разрушения. Авторы [65], опираясь на проведенный ими компьютерный эксперимент, определяют количество слагаемых, требуемых для удержания, и вычисляют их значения из численных расчетов напряженно-деформированного

состояния. Следует заметить, что в настоящее время техника переопределенного метода достаточно хорошо разработана, тем не менее остаются многочисленные вопросы. Является ли число сохраняемых слагаемых одинаковым для всех видов образцов или некоторые конфигурации более чувствительны к высшим приближениям, а некоторые конфигурации не требуют сохранения 10–15 слагаемых и достаточно удержания 3–5 слагаемых ряда? Ответам на данные вопросы и посвящено настоящее исследование, в рамках которого рассмотрены семь различных конфигураций для тел с трещинами и для каждой из конфигураций построены многопараметрические разложения и определены количества слагаемых, необходимых для точного описания напряженно-деформированного состояния у вершины трещиноподобного дефекта.

Для ответа на сформулированный вопрос мы обращаемся к классическому методу теории функций комплексного переменного и рассматриваем семь конфигураций, допускающих точные решения. Затем, используя точные решения и раскладывая комплексные потенциалы для различных плоских задач теории упругости в ряд в окрестности вершины трещины, получаем решения задач в рядах. Такой прием позволит пролить свет на количество удерживаемых слагаемых и дает возможность экспериментатору более осознанно подходить к удержанию высших приближений в асимптотическом решении.

1. Классическое представление полей напряжений Колосова – Мусхелишвили

Приведем основные соотношения традиционной плоской задачи теории упругости и представление решения с помощью комплексных потенциалов Колосова – Мусхелишвили, которые и в настоящее время остаются мощным математическим аппаратом для получения решения плоских задач теории упругости [1; 34; 66–68]. Для затухающих в бесконечно удаленной точке полей напряжений и перемещений истинно аттическое представление плоской задачи теории упругости, основывающееся на теории функций комплексного переменного, – представление Колосова – Мусхелишвили [2; 3; 19]

$$\sigma_{11}^* + \sigma_{22}^* = 4Re [\varphi^{*'}(z)], \quad (8)$$

$$\sigma_{22}^* - \sigma_{11}^* + 2i\sigma_{12}^* = 2 [\bar{z}\varphi^{*''}(z) + \psi^{*'}(z)], \quad (9)$$

$$2\mu(u_1^* + iu_2^*) = \varkappa\varphi^*(z) - z\varphi^{*'}(z) - \psi^*(z), \quad (10)$$

где $\varphi^{*'}(z)$, $\psi^{*'}(z)$ – комплексные потенциалы, являющиеся аналитическими функциями комплексного переменного $z = x_1 + ix_2$ в верхней полуплоскости, черта сверху означает знак комплексного сопряжения, μ – модуль сдвига, $\varkappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$, ν – коэффициент Пуассона. Условие симметрии задачи $\sigma_{12}^*(x_2 = 0) = 0$ можно удовлетворить, приняв $\psi^*(z) = \varphi^*(z) - z\varphi^{*'}(z)$.

Поэтому справедливы соотношения

$$\sigma_{11}^* = 2Re [\varphi^{*'}(z)] - 2x_2Im [\varphi^{*''}(z)], \quad (11)$$

$$\sigma_{22}^* = 2Re [\varphi^{*'}(z)] - 2x_2Im [\varphi^{*''}(z)], \quad (12)$$

$$\sigma_{12}^* = -2x_2Re [\varphi^{*''}(z)]. \quad (13)$$

Для построения комплексной функции $\varphi^{*'}(z)$ формулируется смешанная краевая задача для верхней полуплоскости: на берегах трещины $|x_1| < l, x_2 = 0$ задается действительная часть потенциала $Re [\varphi^{*'}] = -\sigma_{22}^*/2$, а на оставшейся части действительной оси известна мнимая часть комплексного потенциала $Im [\varphi^{*'}(z)] = 0, |x_1| > l$. Структура решения сформулированной задачи получается с помощью общей формулы для смешанной задачи теории аналитических функций для верхней полуплоскости. Пусть на вещественной оси x_1 заданы n отрезков (рассматривается плоскость, разрезанная вдоль n отрезков)

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n), \quad (14)$$

на которых заданы значения действительной части потенциала $\varphi^{*'}(z)$, а вне этих отрезков исчезает мнимая часть комплексного потенциала. В бесконечно удаленной точке напряжения и перемещения затухают. Общее представление решения смешанной задачи теории упругости для полуплоскости имеет вид

$$\varphi^{*'}(z) = \frac{\sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} \int_{a_j}^{b_j} \sqrt{\prod_{j=1}^n (t - a_j)(t - b_j)} \frac{\sigma_{22}^*(t) dt}{t - z} + P_{n-1}(z)}{2\pi \sqrt{\prod_{j=1}^n (z - a_j)(z - b_j)}}, \quad (15)$$

где полином $P_{n-1}(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \dots + c_nz^n$ обладает вещественными коэффициентами. Выражение (15) будет являться основной формулой для построения решений семи различных конфигураций образцов с дефектами. Типы образцов с трещинами, разрезами и включениями, рассмотренные в данной работе, приведены на рис. 2.

На рис. 2 показаны конфигурации тел с трещинами, для которых теория функций комплексного переменного и представление Колосова – Мусхелишвили дают возможность найти точные аналитические решения. В силу данной причины, оперируя точными решениями, оказывается возможным сравнить усеченные асимптотические разложения полей напряжений в окрестности вершины трещины. Конфигурации, рассмотренные в настоящем исследовании, – бесконечная пластина с центральным разрезом, нагруженная на бесконечности, бесконечная пластина, ослабленная двумя коллинеарными трещинами, бесконечная пластина с центральной трещиной, находящейся под действием сосредоточенных сил. К числу конфигураций, проанализированных в настоящей статье, относятся бесконечные пластины с двумя и с одним боковыми надрезами, нагруженные сосредоточенными силами. Последняя конфигурация – пластина с жестким включением.

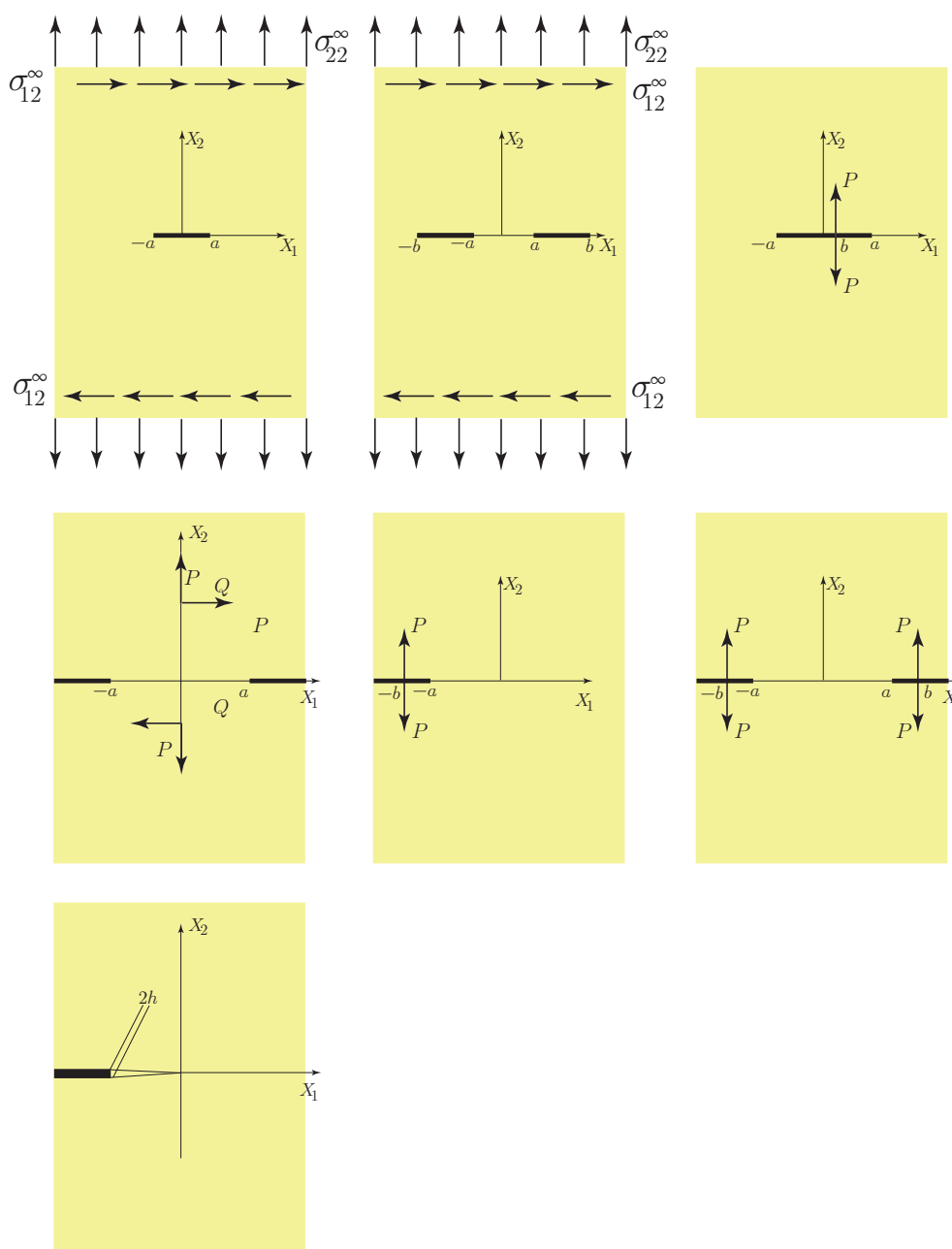


Рис. 1. Типы образцов с трещинами, разрезами и включениями
 Fig. 1. Types of specimens with cracks, notches and inclusions

2. Бесконечная пластина, ослабленная центральным разрезом

Первая конфигурация – бесконечная пластина, ослабленная центральным разрезом, является одним из наиболее изученных образцов в механике разрушения. Впервые амплитудные коэффициенты ряда Уильямса для данной конфигурации были получены в статье Г. Хелло [33]. Впоследствии к проблеме построения ряда М. Уильямса в окрестности вершины центральной трещины обращался автор статьи [69] и изучил влияние регулярных слагаемых на точность поля напряжений, даваемую усеченными рядами, в которых удерживалось различное количество слагаемых.

Следуя формализму Мухелишвили [2], можно найти комплексный потенциал $\varphi_1'(z)$:

$$\varphi_1'(z) = \frac{\sigma_{22}^\infty}{2} \frac{z}{\sqrt{(z^2 - a^2)}} + (\alpha - 1) \frac{\sigma_{22}^\infty}{4}, \quad C_1 = (\alpha - 1) \frac{\sigma_{22}^\infty}{2}. \quad (16)$$

$$\sigma_{11}^1(z) = 2\operatorname{Re}[\varphi_1'(z)] - 2x_2\operatorname{Im}[\varphi_1''(z)] + C_1, \quad (17)$$

$$\sigma_{22}^1(z) = 2\operatorname{Re}[\varphi_1'(z)] + 2x_2\operatorname{Im}[\varphi_1''(z)] - C_1, \quad (18)$$

$$\sigma_{12}^1(z) = -2x_2\operatorname{Re}[\varphi_1''(z)]. \quad (19)$$

Явные выражения для компонент тензора напряжений для чистого нормального отрыва имеют вид

$$\sigma_{11}^1(z) = \sigma_{22}^\infty \left\{ \operatorname{Re} \left[\frac{z}{(z^2 - a^2)^{1/2}} - x_2 \operatorname{Im} \left[\frac{z}{(z^2 - a^2)^{1/2}} - \frac{z^2}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \right] \right] \right\}, \quad (20)$$

$$\sigma_{22}^1(z) = \sigma_{22}^\infty \left\{ \operatorname{Re} \left[\frac{z}{(z^2 - a^2)^{1/2}} + x_2 \operatorname{Im} \left[\frac{z}{(z^2 - a^2)^{1/2}} - \frac{z^2}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \right] \right] \right\}, \quad (21)$$

$$\sigma_{12}^1(z) = -\sigma_{22}^\infty x_2 \operatorname{Re} \left[\frac{z}{(z^2 - a^2)^{1/2}} - \frac{z^2}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \right]. \quad (22)$$

2.1. Поперечный сдвиг пластины с центральной трещиной

В случае поперечного сдвига решение задачи удовлетворяет условию антисимметрии $\sigma_{22} = 0$ при $x_2 = 0$. Это позволяет выразить напряженное состояние через единственный комплексный потенциал $\varphi_2(z)$:

$$\sigma_{11}^2 = 4\operatorname{Re}[\varphi_2'(z)] - 2x_2\operatorname{Im}[\varphi_2''(z)], \quad \sigma_{22}^2 = 2x_2\operatorname{Im}[\varphi_2''(z)], \quad (23)$$

$$\sigma_{12}^2 = -\operatorname{Im}[\varphi_2'(z)] - 2x_2\operatorname{Re}[\varphi_2''(z)] - C_2. \quad (24)$$

Решение задачи о поперечном сдвиге пластины с трещиной имеет вид [2]

$$\varphi_2'(z) = -i \frac{\sigma_{12}^\infty}{2} \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} + i \frac{\sigma_{12}^\infty}{2}, \quad C_2 = -\sigma_{12}^\infty. \quad (25)$$

Явные выражения для компонент тензора напряжений для чистого поперечного сдвига могут быть записаны в виде

$$\sigma_{11}^1(z) = \sigma_{12}^\infty \left\{ \operatorname{Im} \left[\frac{z}{(z^2 - a^2)^{1/2}} + x_2 \operatorname{Re} \left[\frac{z}{(z^2 - a^2)^{1/2}} - \frac{z^2}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \right] \right] \right\}, \quad (26)$$

$$\sigma_{22}^1(z) = -\sigma_{12}^\infty x_2 \operatorname{Re} \left[\frac{z}{(z^2 - a^2)^{1/2}} - \frac{z^2}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \right], \quad (27)$$

$$\sigma_{12}^1(z) = \sigma_{12}^\infty \left\{ \operatorname{Im} \left[\frac{z}{(z^2 - a^2)^{1/2}} - x_2 \operatorname{Re} \left[\frac{z}{(z^2 - a^2)^{1/2}} - \frac{z^2}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \right] \right] \right\}. \quad (28)$$

Полагая в (16) $z = a + re^{i\theta}$ и раскладывая комплексный потенциал $\varphi_1'(z)$ в ряд по степеням r , можно получить следующее асимптотическое разложение:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = a_2^2 f_2^{1,ij}(\theta) + \sum_{m=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}^m f_{2n+1}^{m,ij} r^{n-1/2}, \quad (29)$$

в котором масштабные коэффициенты асимптотического разложения вычисляются как [33]

$$a_{2n+1}^1 = \frac{(-1)^{n+1} (2n)!}{2^{3n+1/2} (n!)^2 (2n-1)} \frac{\sigma_{22}^\infty}{a^{n-1/2}}, \quad n \geq 0, \quad (30)$$

$$a_2^1 = \sigma_{22}^\infty (\alpha - 1)/4, \quad a_k^1 = 0, \text{ в других случаях}$$

и для трещины поперечного сдвига

$$a_{2n+1}^2 = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{3n+1/2} (n!)^2 (2n-1)} \frac{\sigma_{12}^\infty}{a^{n-1/2}}, \quad n \geq 0, \quad (31)$$

$$a_k^2 = 0 \text{ в других случаях.} \quad (32)$$

Тем самым простой подход, основанный на имеющемся точном аналитическом решении задачи о деформировании плоскости с разрезом, позволяет обрести функциональную зависимость любого масштабного множителя в асимптотическом разложении a_k^1 как функции геометрических параметров задачи и системы приложенных нагрузок.

На рис. 2–10 показаны угловые распределения компонент тензора напряжений σ_{11} , σ_{22} и σ_{12} на различных расстояниях от кончика дефекта. На рис. 2 приведено распределение компоненты σ_{11} на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.025$ от вершины трещины. Из рис. 2 следует, что на указанном расстоянии от вершины трещины следует учитывать три слагаемых ряда М. Уильямса, ибо трехчленное разложение, изображенное на рисунке, отличается от точного решения, также приведенного на иллюстрации. При увеличении расстояния в два раза картина принципиальным образом не изменяется: по-прежнему достаточно оставлять три слагаемых ряда Уильямса (2). На рис. 3 угловые распределения компоненты σ_{11} на расстояниях $\hat{r} = r/a = 0.1$ и $\hat{r} = r/a = 0.25$ от вершины трещины. Можно видеть, что на рисунке слева трехчленное асимптотическое разложение полностью совпадает с точным решением и, следовательно, слагаемые более высоких порядков могут быть отброшены. На рисунке справа видны различия трехчленного асимптотического разложения от точного решения. На расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.5$ (половины полудлины трещины или, очевидно, на расстоянии четверти длины трещины) следует сохранять семь слагаемых в ряде Уильямса. На расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$, как это обнаруживается на рис. 4, необходимо сохранять 11 слагаемых. Девятичленное асимптотическое разложение отличается от точного решения. При дальнейшем увеличении расстояния от вершины центрального разреза можно выявить следующие закономерности: на расстоянии половины длины трещины $\hat{r} = r/a = 1$ требуется удерживать пятнадцать слагаемых, на расстоянии $\hat{r} = r/a = 1.25$ нужно в разложении компоненты тензора напряжений σ_{11} оставлять двадцать три слагаемых (рис. 6). На расстоянии $\hat{r} = r/a = 1.5$ оказывается достаточным 49-членное асимптотическое разложение на том основании, что именно 49-членное асимптотическое разложение полностью совпадает с точным аналитическим решением задачи (количественные оценки и точность будут описаны ниже). Для $\hat{r} = r/a = 1.75$, как показывает рис. 7, требуется сохранять в асимптотическом разложении М. Уильямса 99 слагаемых. Из рис. 8 ясно видно, что точное решение совпадает с 99-членным разложением М. Уильямса. На рис. 9 показано распределение компоненты σ_{12} на расстоянии $\hat{r} = r/a = 1.75$, откуда следует, что так же, как и в случае компоненты σ_{11} , на данном расстоянии необходимо сохранять 99 слагаемых.

На рис. 10 проиллюстрированы угловые функции для компоненты тензора напряжений σ_{22} на расстоянии $\hat{r} = r/a = 1.75$. Из графиков можно заключить, что только 99-членное разложение полностью соответствует точному решению задачи. Таким образом, увеличение числа удерживаемых слагаемых ведет к расширению области, в которой справедливо асимптотическое представление Уильямса: чем больше слагаемых мы удерживаем, тем больше область, в которой верно асимптотическое решение Уильямса. Тем самым, удерживая большее число слагаемых, можно выбрать большую область, из которой выбираются экспериментальные точки для экспериментального или численного анализа.

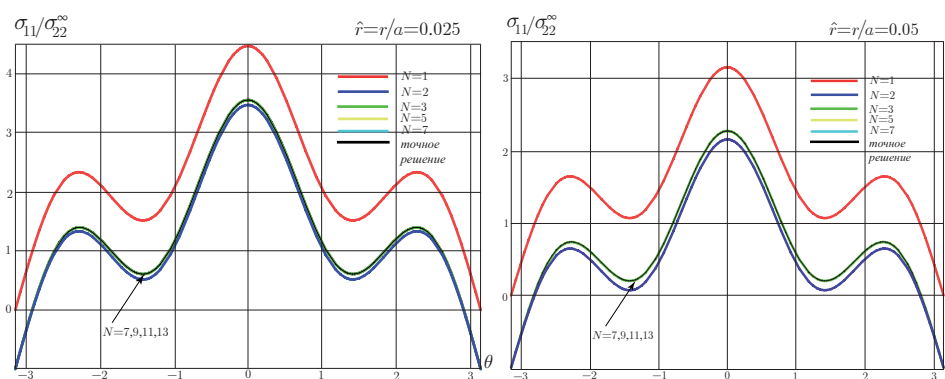


Рис. 2. Угловые распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины на расстояниях $\hat{r} = r/a = 0.025$ и $\hat{r} = r/a = 0.05$

Fig. 2. Circumferential distributions of stress component $\sigma_{11}(r, \theta)$ near the crack tip at distances $\hat{r} = r/a = 0.025$ and $\hat{r} = r/a = 0.05$

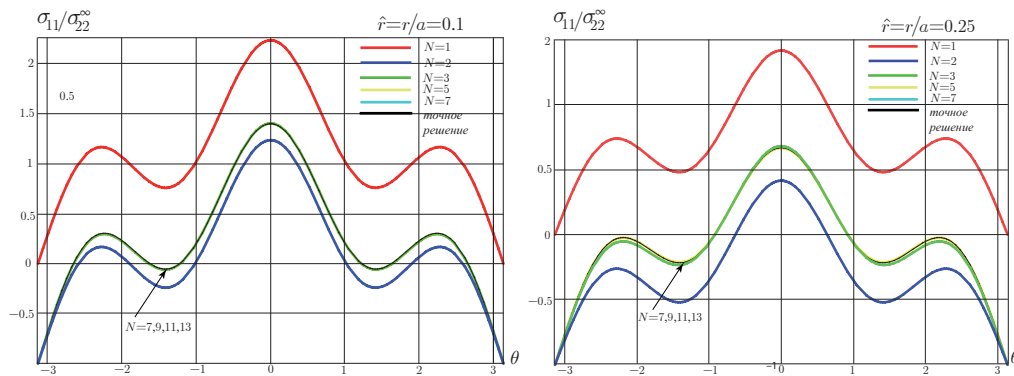


Рис. 3. Угловые распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины на расстояниях $\hat{r} = r/a = 0.1$ и $\hat{r} = r/a = 0.25$

Fig. 3. Circumferential distributions of stress component $\sigma_{11}(r, \theta)$ near the crack tip at distances $\hat{r} = r/a = 0.1$ and $\hat{r} = r/a = 0.25$

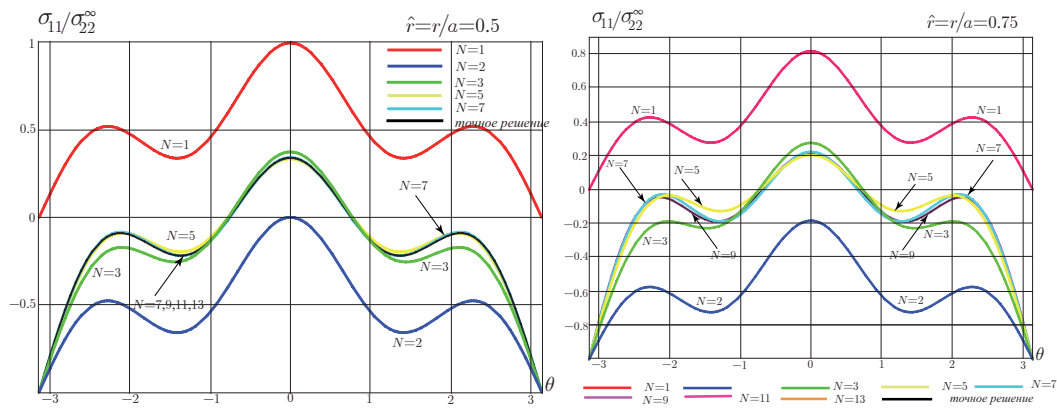


Рис. 4. Угловые распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины на расстояниях $\hat{r} = r/a = 0.5$ и $\hat{r} = r/a = 0.75$

Fig. 4. Circumferential distributions of stress component $\sigma_{11}(r, \theta)$ near the crack tip at distances $\hat{r} = r/a = 0.5$ and $\hat{r} = r/a = 0.75$

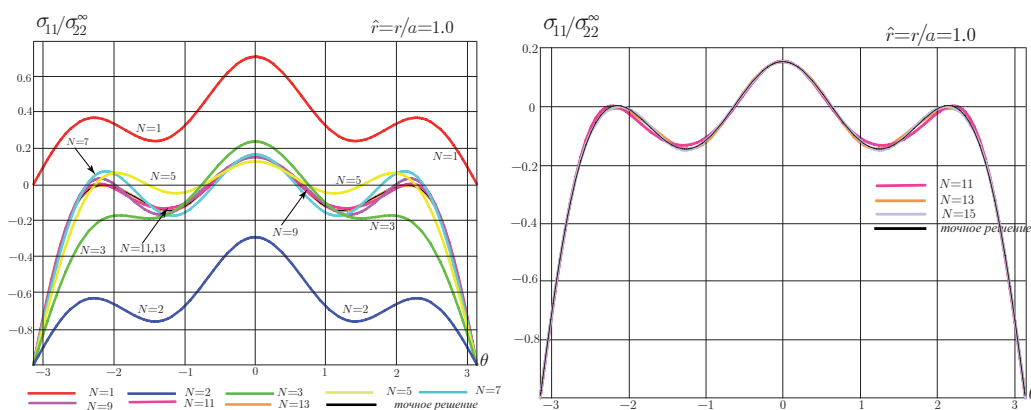


Рис. 5. Угловые распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 1.00$

Fig. 5. Circumferential distributions of stress component $\sigma_{11}(r, \theta)$ near the crack tip at the distance $\hat{r} = r/a = 1.00$

Таким образом, при экспериментальном и численном нахождении коэффициентов ряда Уильямса у вершины центральной трещины в пластине следует руководствоваться приведенными сравнениями точного и приближенного решения.

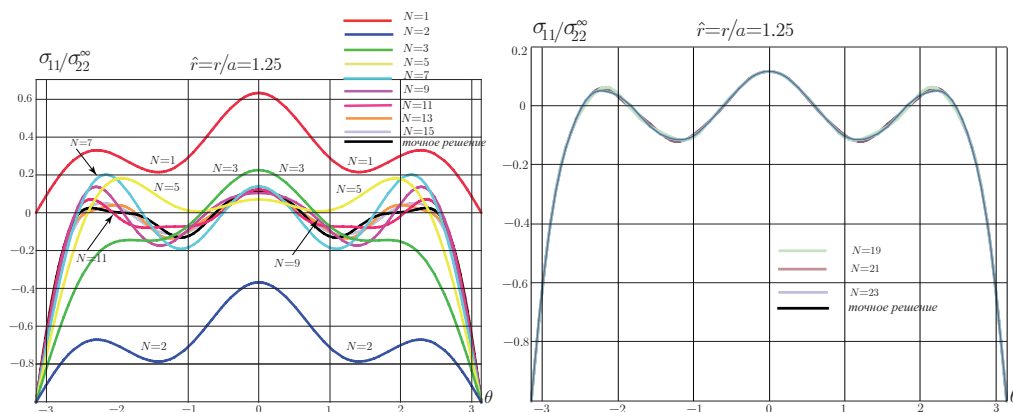


Рис. 6. Угловые распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 1.25$
 Fig. 6. Circumferential distributions of stress component $\sigma_{11}(r, \theta)$ near the crack tip at the distance $\hat{r} = r/a = 1.25$

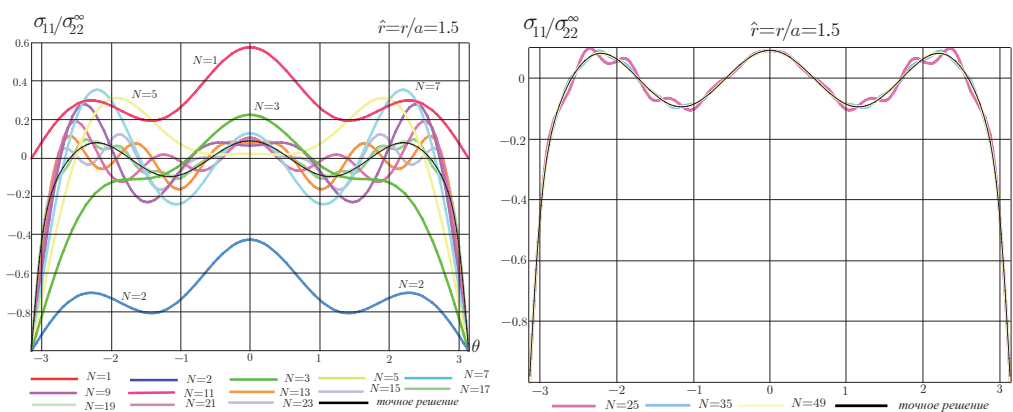


Рис. 7. Угловые распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 1.5$
 Fig. 7. Circumferential distributions of stress component $\sigma_{11}(r, \theta)$ near the crack tip at the distance $\hat{r} = r/a = 1.5$

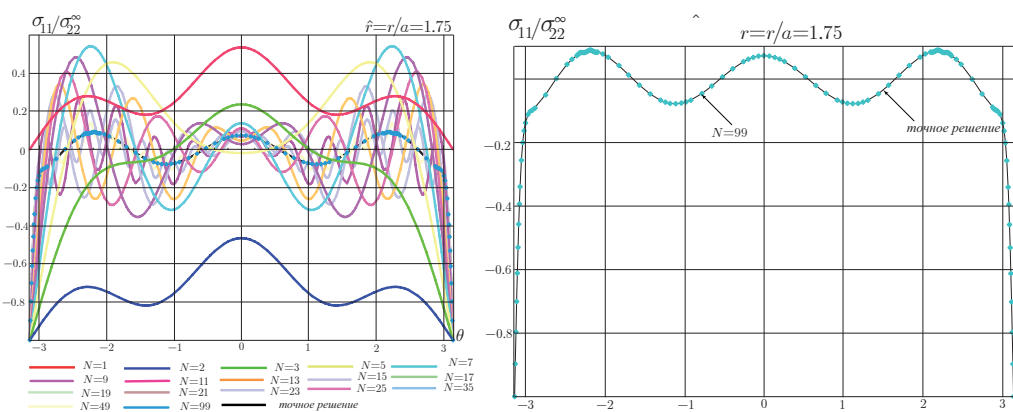


Рис. 8. Угловые распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 1.75$
 Fig. 8. Circumferential distributions of stress component $\sigma_{11}(r, \theta)$ near the crack tip at the distance $\hat{r} = r/a = 1.75$

3. Бесконечная пластина, ослабленная двумя горизонтальными разрезами (вторая конфигурация)

3.1. Нормальный отрыв бесконечной плоскости с двумя горизонтальными разрезами

Данная конфигурация тела с трещиной также позволяет найти точное аналитическое решение с помощью методов теории функции комплексного переменного, и она была предметом многочисленных рассмотрений [35; 36; 63; 64].

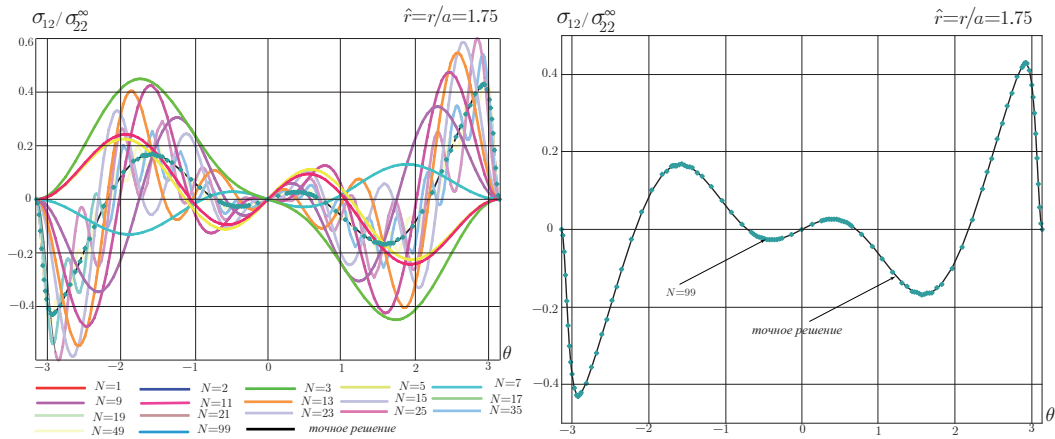


Рис. 9. Угловые распределения компоненты $\sigma_{12}(r, \theta)$ у вершины трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 1.75$
 Fig. 9. Circumferential distributions of stress component $\sigma_{12}(r, \theta)$ near the crack tip at the distance $\hat{r} = r/a = 1.75$

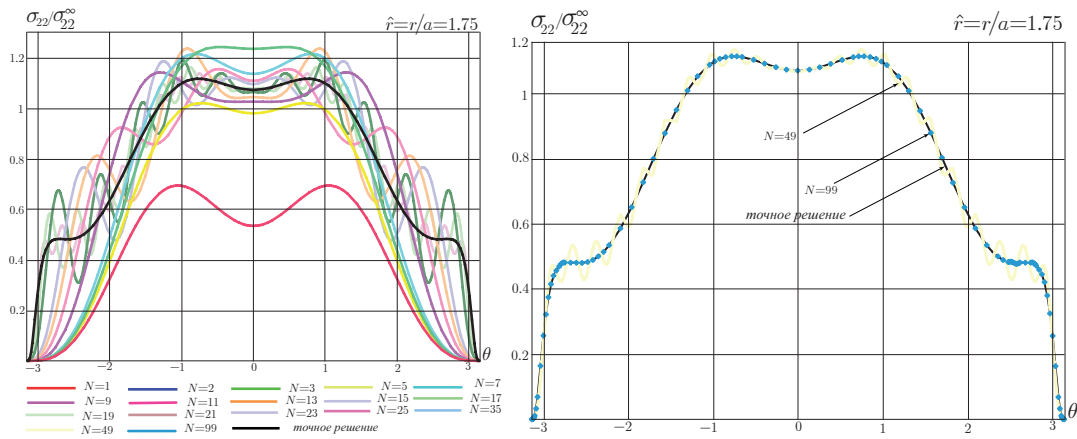


Рис. 10. Угловые распределения компоненты $\sigma_{22}(r, \theta)$ у вершины трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 1.75$, полученные с помощью усеченных на различном количестве слагаемых асимптотических разложений
 Fig. 10. Circumferential distributions of stress component $\sigma_{22}(r, \theta)$ near the crack tip at the distance $\hat{r} = r/a = 1.75$

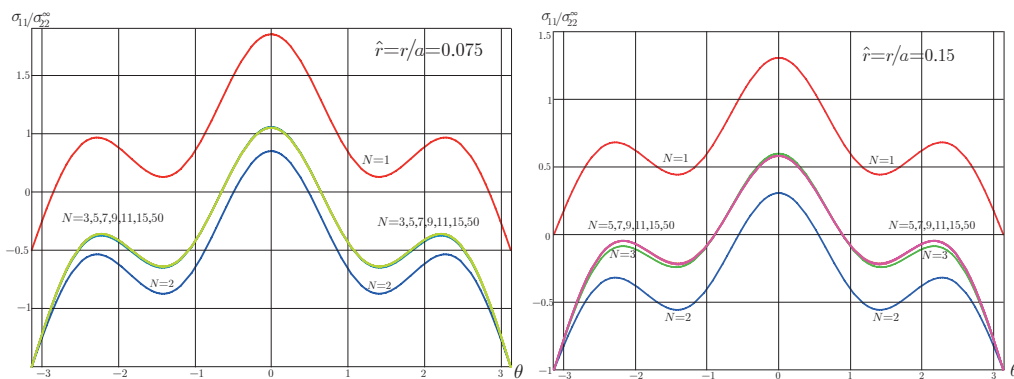


Рис. 11. Угловые распределения компонент $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины $z = b$ на расстояниях $\hat{r} = r/a = 0.075$ и $\hat{r} = r/a = 0.15$
 Fig. 11. Circumferential distributions of stress component $\sigma_{11}(r, \theta)$ near the crack tip $z = b$ at distances $\hat{r} = r/a = 0.075$ and $\hat{r} = r/a = 0.15$

На рис. 11 очерчены зависимости от угловой координаты компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины $z = b$ на расстояниях $\hat{r} = r/a = 0.075$ и $\hat{r} = r/a = 0.15$ соответственно. Цифрами на рис. 11 отображается количество слагаемых, сохраненных в разложении. Понятно, что на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.075$ от вершины $z = b$ достаточно трехчленного асимптотического разложения, ибо после

удержания пяти, семи, девяти и более слагаемых кривые, полученные посредством удержания высших приближений, сливаются. На расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.15$ должно сохранять не менее пяти слагаемых. На рис. 12 изображены зависимости напряжения $\sigma_{11}(r, \theta)$ от полярного угла на расстояниях $\hat{r} = r/a = 0.3$ и $\hat{r} = r/a = 0.35$ от вершины разреза $z = b$. Из приведенных графиков явно следует необходимость удержания девяти и одиннадцати членов ряда Уильямса, что согласуется с результатами, полученными ранее для пластины с центральной трещиной. Количество слагаемых, подлежащих удержанию, имеет один и тот же порядок.

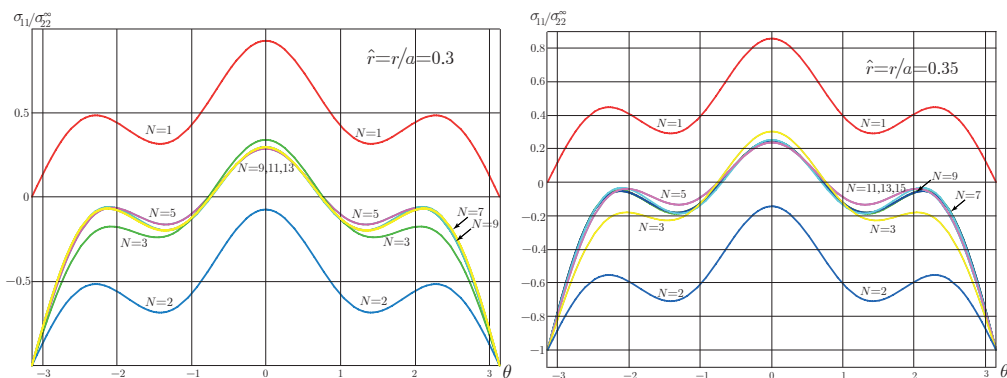


Рис. 12. Угловые распределения компонент $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины $z = b$ на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.3$ и $\hat{r} = r/a = 0.35$

Fig. 12. Circumferential distributions of stress component $\sigma_{11}(r, \theta)$ near the crack tip $z = b$ at distances $\hat{r} = r/a = 0.3$ and $\hat{r} = r/a = 0.35$

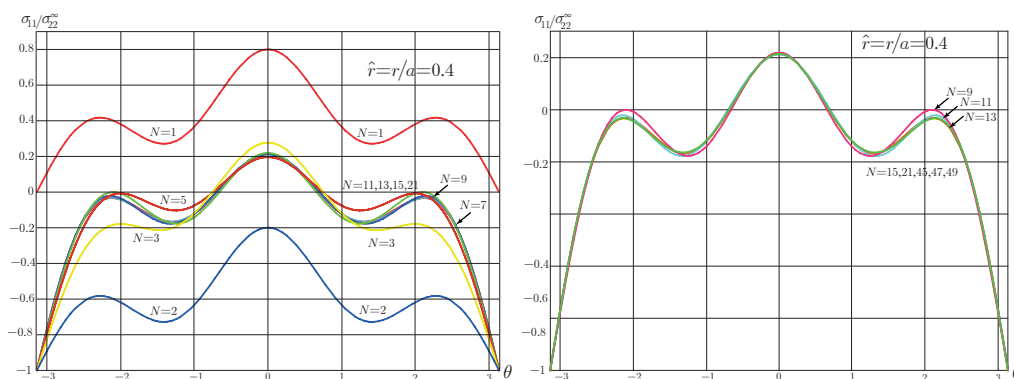


Рис. 13. Угловые распределения компонент $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины $z = b$ на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.4$

Fig. 13. Circumferential distributions of stress component $\sigma_{11}(r, \theta)$ near the crack tip $z = b$ at the distance $\hat{r} = r/a = 0.4$

На рис. 13 представлены усеченные асимптотические разложения компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины $z = b$ на расстояниях $\hat{r} = r/a = 0.4$. Из графиков видно, что только после удержания тринадцати слагаемых в асимптотическом разложении дальнейшие асимптотические представления не вносят изменений в представление напряжений.

Следующий график (рис. 14) представляет усеченные асимптотические разложения компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины $z = b$ на расстояниях $\hat{r} = r/a = 0.5$. Наблюдается сходная картина: на данном расстоянии пятнадцатичленное разложение отличается от последующих разложений, но учет 21 слагаемого дает возможность получить асимптотическое представление разложения, полностью совпадающее с разложениями, содержащими большее количество слагаемых.

На рис. 15 приведены угловые распределения компонент тензора напряжения $\sigma_{11}(r, \theta)$ и $\sigma_{12}(r, \theta)$ в случае нормального отрыва на расстоянии от вершины трещины $\hat{r} = r/a = 0.75$. На графиках дополнительно показано точное аналитическое решение задачи. На рис. 16 приведены угловые распределения компонент тензора напряжения $\sigma_{22}(r, \theta)$ и интенсивности касательных напряжений $\sigma_e(r, \theta)$ в случае нормального отрыва на расстоянии от вершины трещины $\hat{r} = r/a = 0.75$. На графиках

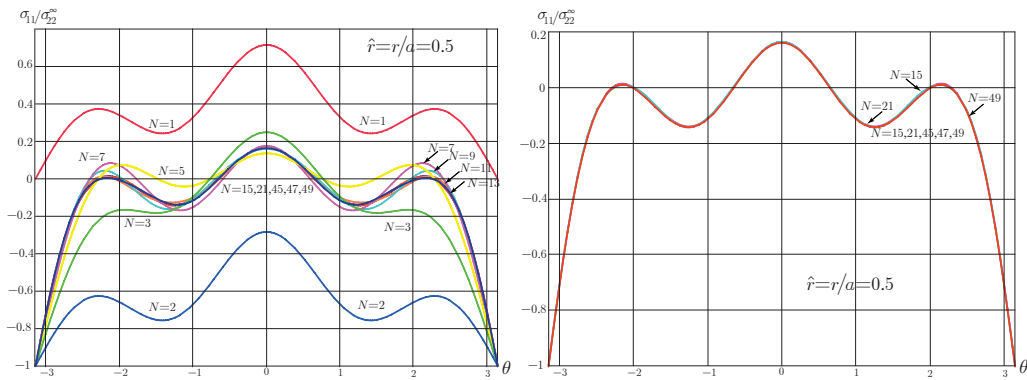


Рис. 14. Угловые распределения компонент $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины $z = b$ в условиях нормального отрыва на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.5$

Fig. 14. Circumferential distributions of stress component $\sigma_{11}(r, \theta)$ near the crack tip $z = b$ at the distance $\hat{r} = r/a = 0.5$

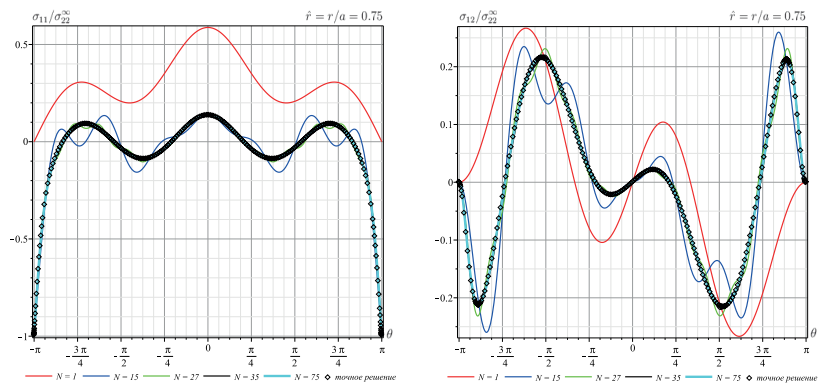


Рис. 15. Угловые распределения компонент σ_{11} и σ_{12} у вершины трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$

Fig. 15. Circumferential distributions of stress components $\sigma_{11}(r, \theta)$ and $\sigma_{12}(r, \theta)$ near the crack tip at the distance $\hat{r} = r/a = 0.75$

дополнительно показано точное аналитическое решение задачи. Сравнение приближенного решения и точного решения тридцатипятичленного разложения дает возможность воспроизвести точное решение.

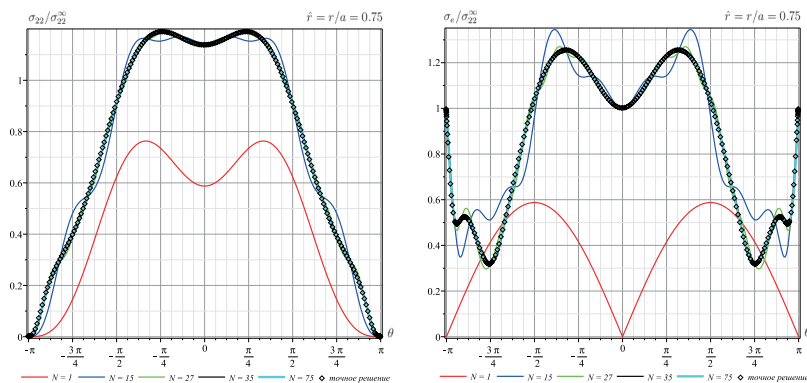


Рис. 16. Угловые распределения компонент σ_{22} и интенсивности касательных напряжений у вершины трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$

Fig. 16. Circumferential distributions of stress component $\sigma_{22}(r, \theta)$ and equivalent von Mises stress near the crack tip at the distance $\hat{r} = r/a = 0.75$

3.2. Поперечный сдвиг бесконечной плоскости с двумя горизонтальными разрезами

На рис. 17 приведены угловые распределения компоненты тензора напряжения $\sigma_{12}(r, \theta)$ в случае поперечного сдвига на расстояниях $\hat{r} = r/a = 0.05$ и $\hat{r} = r/a = 0.25$ от вершины $z = b$ трещины, полученные с помощью усеченных на различном количестве слагаемых. На расстояниях порядка $\hat{r} = r/a = 0.05$ достаточно трехчленного асимптотического разложения. Однако отказ от учета высших приближений не дает возможности построить точное решение, и только удержание девяти слагаемых на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.25$ позволяет правильно описать распределение компоненты тензора напряжений.

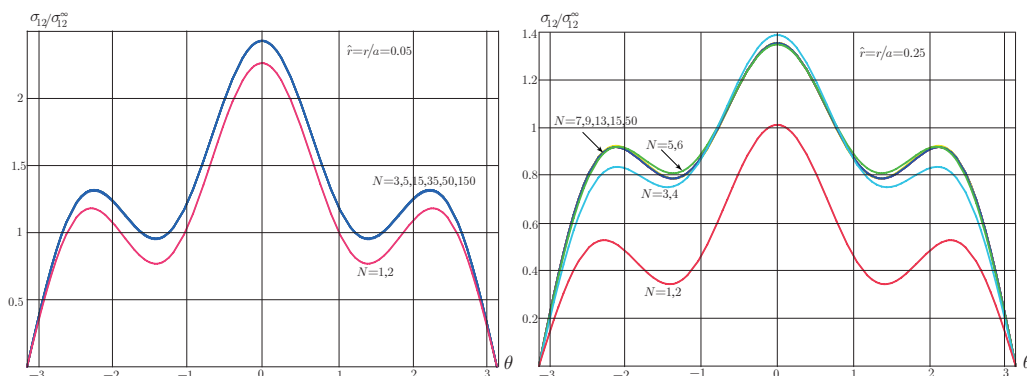


Рис. 17. Угловые распределения компонент σ_{12} у вершины трещины на расстояниях $\hat{r} = r/a = 0.05$ и $\hat{r} = r/a = 0.25$ в условиях поперечного сдвига

Fig. 17. Circumferential distributions of stress component $\sigma_{12}(r, \theta)$ near the crack tip at distances $\hat{r} = r/a = 0.05$ and $\hat{r} = r/a = 0.25$

На рис. 18 построены угловые распределения компоненты тензора напряжения $\sigma_{12}(r, \theta)$ в случае поперечного сдвига на расстоянии от вершины трещины $\hat{r} = r/a = 0.45$. На рис. 18 слева показаны одночленное, трех-, пяти-, семи-, девяти-, одиннадцати-, пятидесяти-, стоятидесяти и двухсотчленное разложения. Кривые, построенные на графиках 18 справа, свидетельствуют, что после учета тринадцати слагаемых дальнейшее увеличение числа слагаемых не требуется, и для рассматриваемой конфигурации оказывается достаточным учет первых тринадцати слагаемых. Тем не менее очевидно, что девятичленного разложения недостаточно для описания поля напряжений.

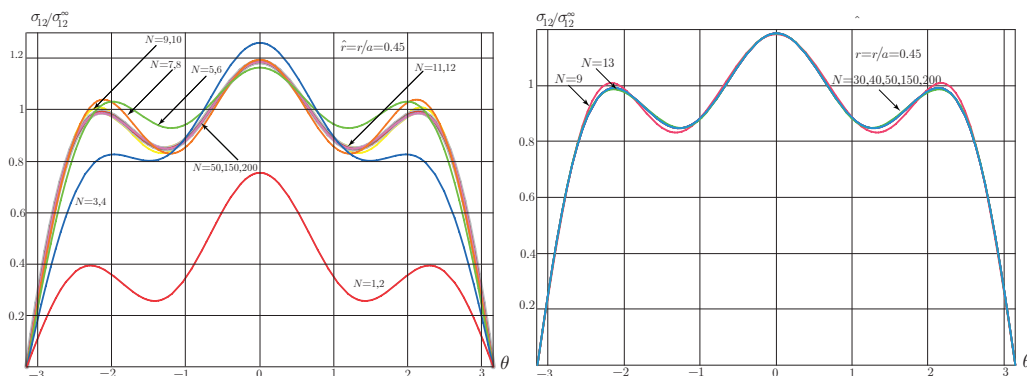


Рис. 18. Угловые распределения компонент σ_{12} у вершины трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.45$

Fig. 18. Circumferential distributions of stress component $\sigma_{12}(r, \theta)$ near the crack tip at the distance $\hat{r} = r/a = 0.45$

На рис. 19 построены угловые зависимости компоненты $\sigma_{12}(r, \theta)$ в случае поперечного сдвига на расстоянии от вершины трещины $\hat{r} = r/a = 0.75$. Из графиков 19 справа следует, что тридцатишестичленное разложение все еще отличается от кривых, построенных с большим количеством слагаемых. Лишь при сохранении пятидесяти членов графики сливаются. Поэтому можно заключить, что на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$. от вершины трещины необходимо сохранять порядка 50 слагаемых.

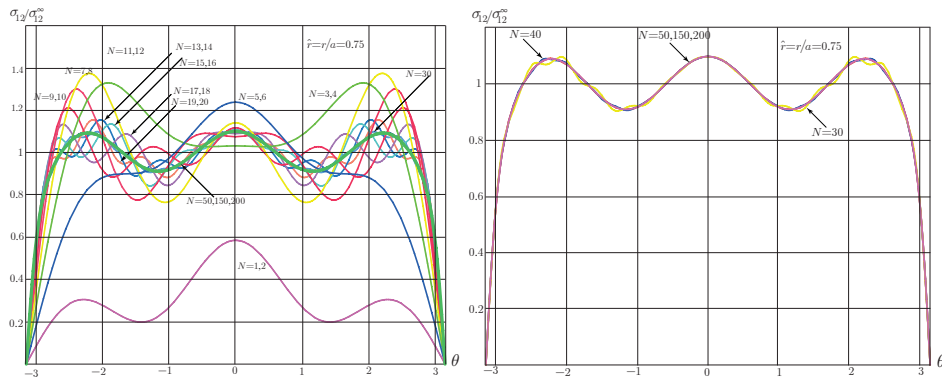


Рис. 19. Угловые распределения компоненты σ_{12} у вершины $z = b$ трещины поперечного сдвига на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$

Fig. 19. Circumferential distributions of stress component $\sigma_{12}(r, \theta)$ near the crack tip $z = b$ at the distance $\hat{r} = r/a = 0.75$

3.3. Смешанное нагружение бесконечной плоскости с двумя горизонтальными разрезами

В случае смешанного деформирования бесконечной пластины с двумя коллинеарными разрезами, пользуясь принципом суперпозиции решений, можно отыскивать угловые распределения напряжений на различных расстояниях от кончика трещины и убедиться в сохранении общей тенденции. На рис. 20 показаны распределения компоненты тензора напряжений $\sigma_{22}(r, \theta)$ для смешанного нагружения, когда параметр смешанности нагружения

$$M^e = \frac{2}{\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \arctg \left| \frac{\sigma_{22}(r, \theta = 0)}{\sigma_{12}(r, \theta = 0)} \right| \quad (33)$$

равен 1/2. Действительно, на расстояниях порядка $\hat{r} = r/a = 0.05$ и $\hat{r} = r/a = 0.15$ следует сохранять три и пять слагаемых соответственно.

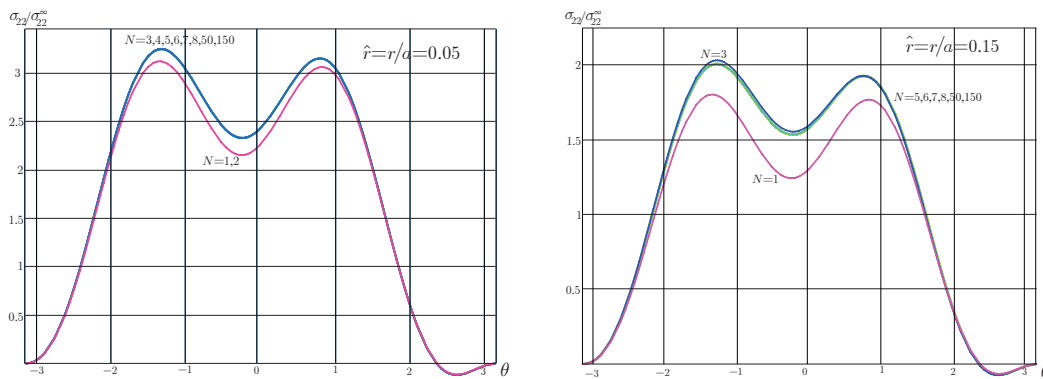


Рис. 20. Угловые распределения компонент $\sigma_{22}(r, \theta)$ у вершины трещины $z = b$ на расстояниях $\hat{r} = r/a = 0.05$ и $\hat{r} = r/a = 0.15$

Fig. 20. Circumferential distributions of stress component $\sigma_{22}(r, \theta)$ near the crack tip $z = b$ at distances $\hat{r} = r/a = 0.05$ and $\hat{r} = r/a = 0.15$

Из графиков 21, где также представлены результаты для смешанного нагружения, можно четко понять, что на расстояниях $\hat{r} = r/a = 0.25$ и $\hat{r} = r/a = 0.35$ необходимы не менее пяти и семи слагаемых соответственно. На рис. 21 справа четко видны различия между пятичленным и семичленным асимптотическими разложениями. На графиках 22 изображена компонента $\sigma_{22}(r, \theta)$ при $\hat{r} = r/a = 0.45$ и $\hat{r} = r/a = 0.55$. Вновь увеличение расстояния от вершины дефекта приводит к необходимости сохранения большего количества слагаемых: при $\hat{r} = r/a = 0.45$ следует оставлять 11 слагаемых, при $\hat{r} = r/a = 0.55$ – не менее 19. На графиках 23 изображена компонента $\sigma_{22}(t, \theta)$ при $\hat{r} = r/a = 0.65$. Кривые, построенные с помощью асимптотических разложений, усеченных на различном количестве слагаемых, стремятся к предельной кривой только после сохранения 25 слагаемых. Двадцатичленное разложение заметно отличается от кривых, построенных с удержанием большего числа слагаемых. Изображения 24

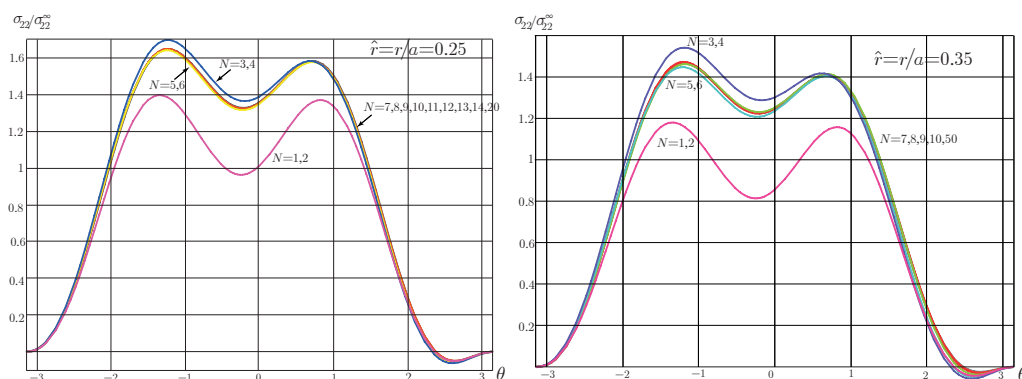


Рис. 21. Угловые распределения компонент σ_{22} и интенсивности касательных напряжений у вершины трещины $z = b$ на расстояниях $\hat{r} = r/a = 0.25$ и $\hat{r} = r/a = 0.35$

Fig. 21. Circumferential distributions of stress component $\sigma_{22}(r, \theta)$ near the crack tip $z = b$ at distances $\hat{r} = r/a = 0.25$ and $\hat{r} = r/a = 0.35$

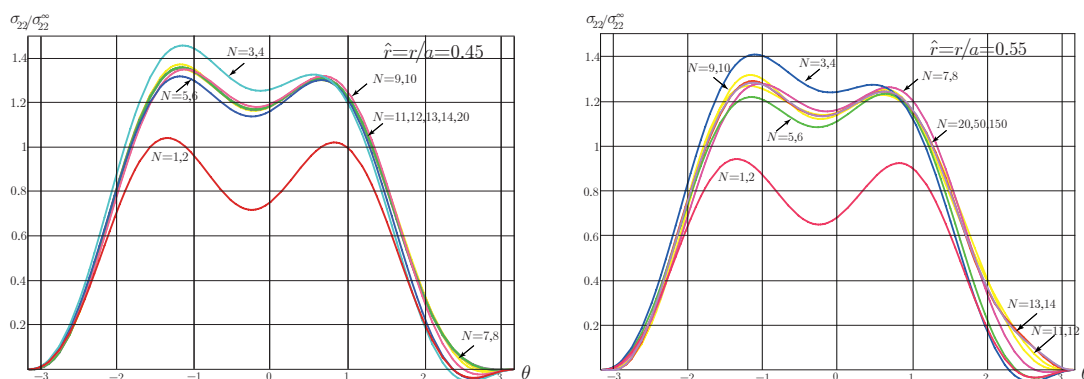


Рис. 22. Угловые распределения компонент $\sigma_{22}(r, \theta)$ и интенсивности касательных напряжений у вершины трещины $z = b$ на расстояниях $\hat{r} = r/a = 0.45$ и $\hat{r} = r/a = 0.55$

Fig. 22. Circumferential distributions of stress component $\sigma_{22}(r, \theta)$ near the crack tip $z = b$ at distances $\hat{r} = r/a = 0.45$ and $\hat{r} = r/a = 0.55$

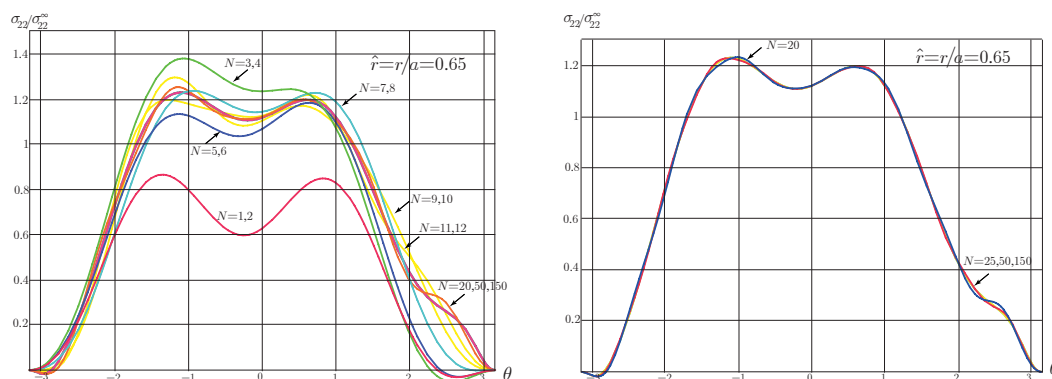


Рис. 23. Угловые распределения компоненты $\sigma_{22}(r, \theta)$ у вершины трещины $z = b$ на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.65$

Fig. 23. Circumferential distributions of stress component $\sigma_{22}(r, \theta)$ near the crack tip $z = b$ at the distance $\hat{r} = r/a = 0.65$

демонстрируют зависимость угловых распределений компоненты $\sigma_{22}(t, \theta)$ при $\hat{r} = r/a = 0.75$ в условиях смешанного нагружения пластины с двумя коллинеарными трещинами. Во-первых, из рис. 24 можно прийти к заключению, что на данном расстоянии от кончика трещины мультипараметрическое асимптотическое разложение М, Уильямса эффективно описывает поле напряжений, однако для справедливости подхода, базирующегося на представлении М. Уильямса, следует удерживать порядка 40 слагаемых. Во-вторых, смешанное нагружение не приводит к принципиальному изменению общих

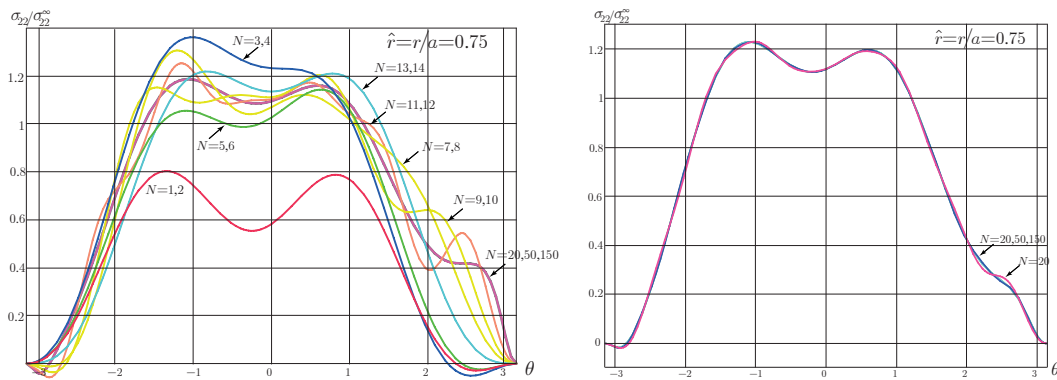


Рис. 24. Угловые распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины $z = b$ на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$

Fig. 24. Circumferential distributions of stress component $\sigma_{22}(r, \theta)$ near the crack tip $z = b$ at the distance $\hat{r} = r/a = 0.75$

закономерностей, т. е. на исследуемых расстояниях от вершины трещины следует сохранять такое же число слагаемых ряда.

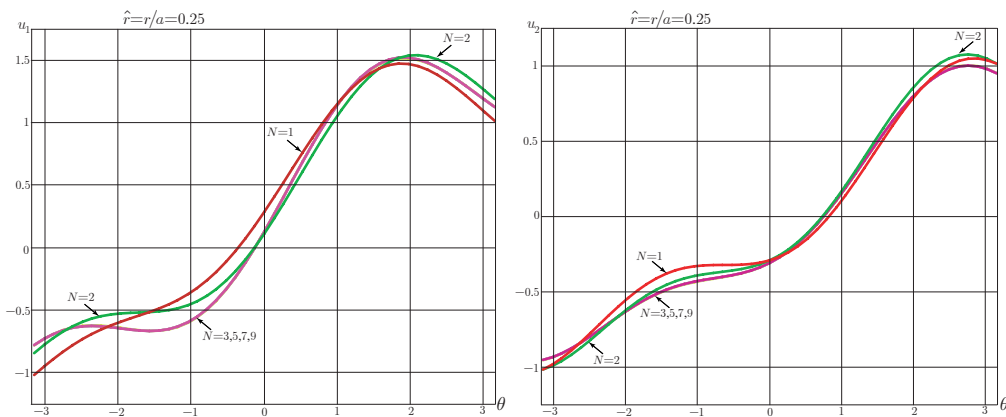


Рис. 25. Угловые распределения компонент вектора перемещения $u_1(r, \theta)$ и $u_2(r, \theta)$ у вершины трещины в условиях смешанного нагружения на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.25$

Fig. 25. Circumferential distributions of displacement $u_1(r, \theta)$ и $u_2(r, \theta)$ near the crack tip under mixed mode loading at the the distance $\hat{r} = r/a = 0.25$

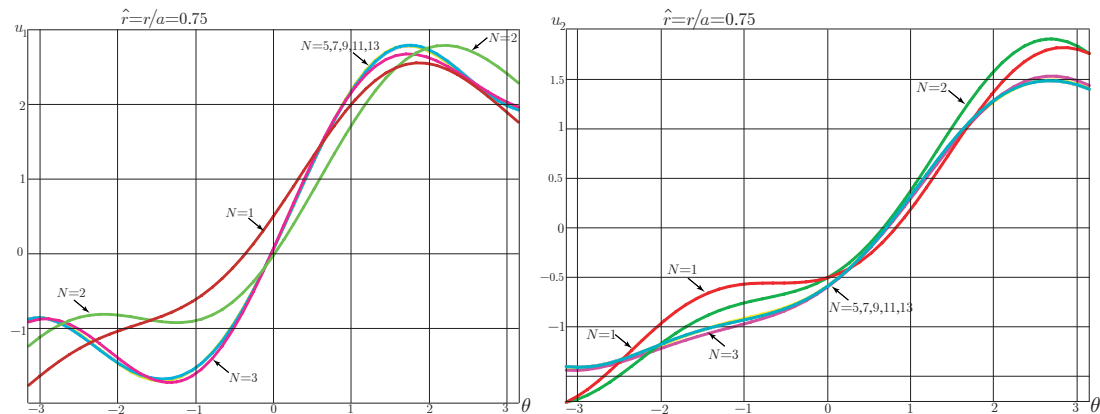


Рис. 26. Угловые распределения компонент вектора перемещения $u_1(r, \theta)$ и $u_2(r, \theta)$ у вершины трещины в условиях смешанного нагружения на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$

Fig. 26. Circumferential distributions of displacement $u_1(r, \theta)$ и $u_2(r, \theta)$ near the crack tip under mixed mode loading at the the distance $\hat{r} = r/a = 0.75$

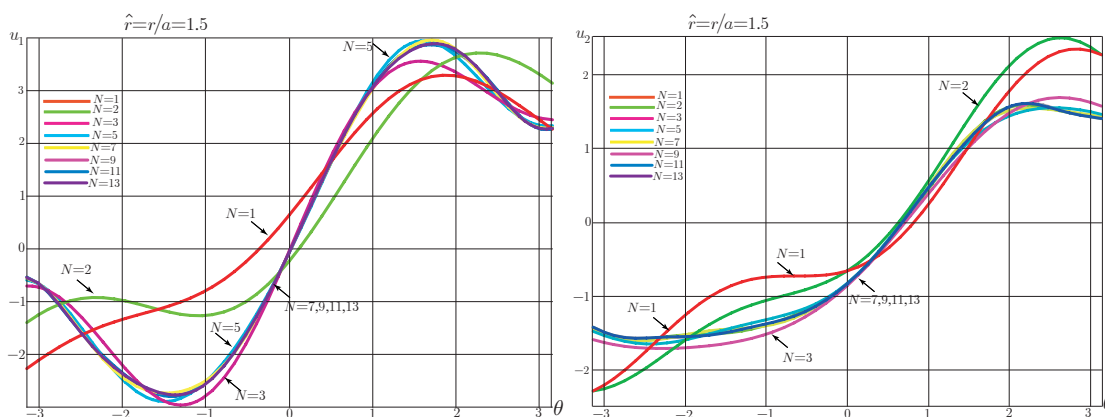


Рис. 27. Угловые распределения компонент вектора перемещения $u_1(r, \theta)$ и $u_2(r, \theta)$ у вершины трещины в условиях смешанного нагружения на расстоянии $\hat{r} = r/a = 1.5$

Fig. 27. Circumferential distributions of displacement $u_1(r, \theta)$ и $u_2(r, \theta)$ near the crack tip under mixed mode loading at the the distance $\hat{r} = r/a = 1.5$

4. Бесконечная пластина, ослабленная центральной трещиной, расклинивающейся двумя противоположно направленными сосредоточенными силами (третья конфигурация)

Напряженное состояние в бесконечной линейно-упругой пластине с центральной трещиной, на берегах которой приложены две противоположно направленные сосредоточенные расклинивающие силы, также может быть представлено с помощью комплексного потенциала, разложение в ряд которого в окрестности вершины трещины делает возможным определение всех масштабных коэффициентов ряда Уильямса и предоставляет возможность сравнения различных усеченных разложений и оценки вклада неособых слагаемых в окрестности вершины трещины. Комплексный потенциал данной задачи задается выражением

$$\varphi'_1(z) = \frac{P\sqrt{b^2 - a^2}}{\pi} \frac{1}{(z - b)\sqrt{z^2 - a^2}}. \quad (34)$$

Амплитудные (масштабные) коэффициенты ряда выражаются соотношениями:

$$a_{2n+1}^1 = \frac{P\sqrt{a+b}}{\pi} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \sum_{k=0}^n \frac{(2k)!(a-b)^{k-n-\frac{1}{2}}}{2^{3k+\frac{1}{2}}(k!)^2 a^{k+\frac{1}{2}}}. \quad (35)$$

Обладая коэффициентами ряда (35), можно рассмотреть поле напряжений на различных расстояниях от кончика трещины и изучить асимптотические разложения поля напряжений, получаемые удерживанием различного числа слагаемых. На рис. 28, 29 показаны построенные угловые распределения компонент тензора напряжений на расстоянии $\hat{r} = 0.75$ от вершины трещины. На рис. 28, 29 представлены кривые, полученные с помощью главного члена асимптотического разложения, 15-членного разложения, 35-членного ряда, 45-членного ряда и 91-членного разложения. Ромбами показано точное решение. Из представленных графиков ясно, что только 45-членное разложение воспроизводит аналитическое решение, полученное с помощью методов теории функции комплексного переменного.

Поэтому можно вывести заключение, что анализируемая конфигурация проявляет более сильную зависимость от количества слагаемых в разложении по сравнению с пластиной с центральной трещиной, растягиваемой на бесконечности. Для пластины с центральной трещиной, растягиваемой на бесконечности, на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$ следует сохранять тринадцать слагаемых, в то время как для пластины с трещиной, находящейся под действием сосредоточенных сил, требуется 45 слагаемых ряда.

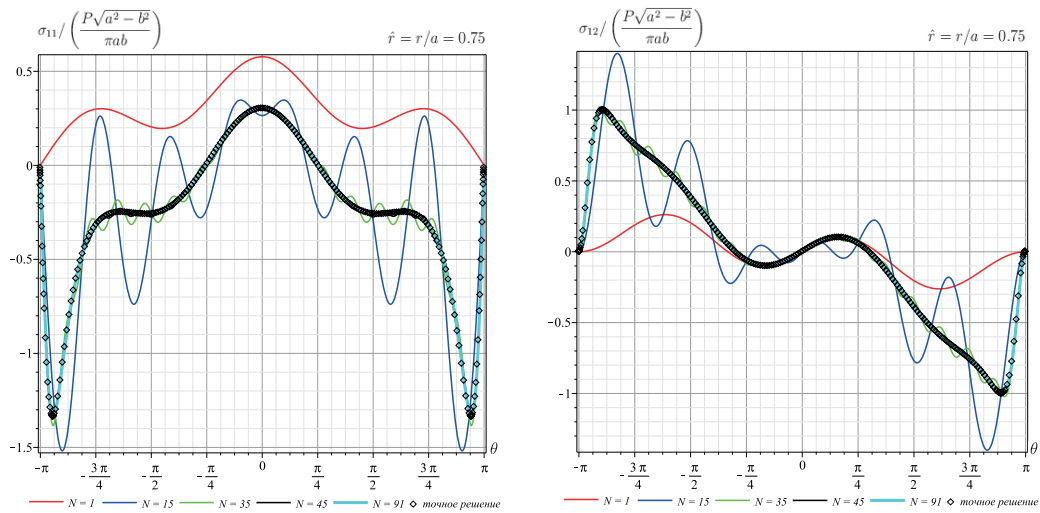


Рис. 28. Угловые распределения компонент σ_{11} и σ_{12} у вершины трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$
 Fig. 28. Circumferential distributions of stress components $\sigma_{11}(r, \theta)$ and $\sigma_{12}(r, \theta)$ near the crack tip at the distance $\hat{r} = r/a = 0.75$

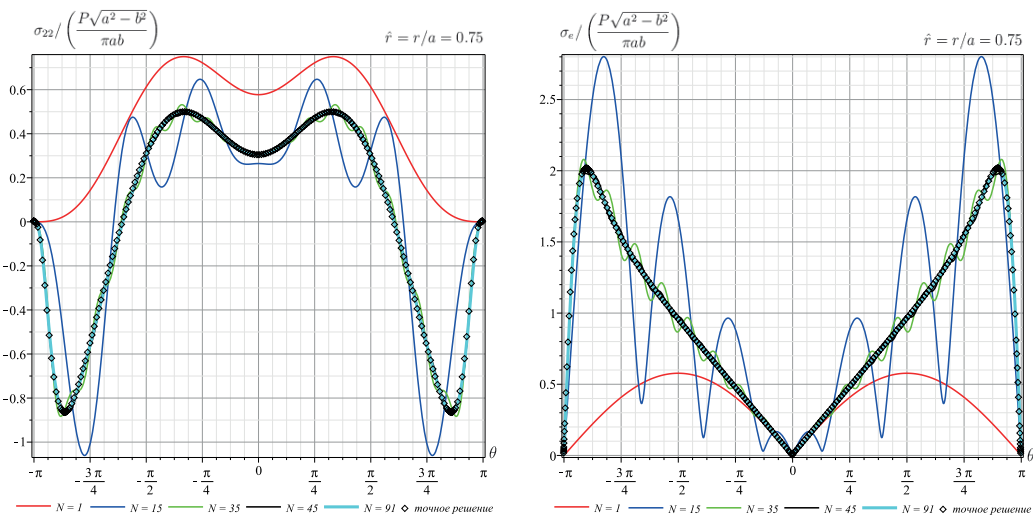


Рис. 29. Угловые распределения компонент σ_{22} и интенсивности касательных напряжений у вершины трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$
 Fig. 29. Circumferential distributions of stress components $\sigma_{22}(r, \theta)$ and the equivalent stress near the crack tip at the distance $\hat{r} = r/a = 0.75$

5. Бесконечная пластина под действием двух противоположно направленных, действующих по вертикальной оси сосредоточенных сил, ослабленная двумя боковыми надрезами (четвёртая конфигурация)

Комплексный потенциал для четвертой конфигурации – бесконечной пластины, ослабленной двумя боковыми горизонтальными трещинами с вершинами в точках $-a$ и a соответственно, находящейся под действием противоположно направленных по вертикальной оси сосредоточенных в точках $-y_0$ и y_0 сил P (рис. 30 – 32), можно представить следующим соотношением [2; 18; 70]:

$$\varphi'_1(z) = \frac{P}{\pi} \left(f(z, y_0) - \alpha y_0 \frac{\partial f(z, y_0)}{\partial y_0} \right), \quad (36)$$

где $f(z, y_0) = \frac{y_0}{y_0^2 + z^2} \sqrt{\frac{a^2 + y_0^2}{a^2 - z^2}}$.

Масштабные множители в случае нормального отрыва определяются выражениями

$$a_{2n+1}^1 = \frac{C_1 \zeta_n}{2n+1}, \quad a_{2n}^1 = 0, \quad \forall n \geq 1, \quad (37)$$

где приняты обозначения

$$C_1 = \frac{P y_0 [a^2 + y_0^2 - \alpha (a^2 + 2y_0^2)]}{\pi \sqrt{a^2 + y_0^2}}, \quad C_2 = \frac{y_0^2 [y_0^2 + a^2(1 + \alpha)]}{a^2 + y_0^2 - \alpha (a^2 + 2y_0^2)},$$

$$\zeta_n = \sum_{l=0}^n \xi_l \gamma_{n-l}, \quad \xi_n = \sum_{l=0}^n \alpha_l \beta_{n-l}, \quad \gamma_n = \sum_{l=0}^n \delta_l \eta_{n-l},$$

$$\alpha_0 = a^2 + C_2, \quad \alpha_1 = -2a, \quad \alpha_2 = 1, \quad \forall k > 2,$$

$$\beta_n = \frac{|2n-1|!}{2^{2n+1/2} a^{n+1/2} n!}, \quad \delta_n = \frac{n+1}{(a + iy_0)^{n+2}}, \quad \eta_n = \frac{n+1}{(a - iy_0)^{n+2}}.$$

Приведем графики компонент тензора напряжений для различных значений y_0 . Так, на рис. 30–32 изображены угловые распределения компоненты тензора напряжений σ_{11} для различных расстояний от вершины левого выреза: $\hat{r} = 0.25, \hat{r} = 0.5, \hat{r} = 0.75$. С точностью до $\varepsilon = 10^{-7}$ определены необходимые количества удерживаемых слагаемых для рассматриваемых конфигураций: для определения напряженно-деформированного состояния при $y_0 = 1$ на расстоянии 0.25 установлено, что достаточно удерживать 17 слагаемых в асимптотическом разложении М. Уильямса, тогда как на более дальних расстояниях этого количества становится недостаточно: на расстояниях 0.5 и 0.75 для достижения согласования с точным решением, полученным с помощью комплексных потенциалов, необходимо учитывать 29 и 45 слагаемых соответственно.

Стоит отметить, что при приложении сосредоточенных нагрузок вблизи ($y_0 = 1$) вершин разреза (рис. 30) наблюдается высокая концентрация напряжений, что обуславливает высокую чувствительность приближенного решения к количеству удерживаемых слагаемых. Если отдалить приложенные нагрузки на более дальние расстояния от центра пластины, например, приняв $y_0 = 1.5$ (рис. 31), получим, что для определения напряженно-деформированного состояния на расстояниях от вершины трещины 0.25, 0.5 и 0.75, которое совпадает с точным решением с точностью 10^{-7} , достаточно удерживать меньшее количество слагаемых: 17, 23 и 35. Отдаляя точки приложения нагрузок, наблюдается стабилизация по выбору количества удерживаемых слагаемых в асимптотическом разложении. Выбрав $y_0 = 5$ или выше, аналогичным образом определяется необходимое количество удерживаемых слагаемых на расстояниях от вершины трещины 0.25, 0.5 и 0.75: 13, 19 и 25. Проведенный анализ различных модификаций выбранной конфигурации показывает, что в учете необходимого количества слагаемых в асимптотическом разложении Уильямса важную роль играют не только выбор расстояния от вершины трещины, но и координаты приложенных нагрузок в рассматриваемой конфигурации. При варьировании y_0 меняется чувствительность конфигурации к выбору количества удерживаемых слагаемых, необходимых для более точного определения напряженно-деформированного состояния вблизи трещины. Таким образом, можно выявить закономерность: приближение точек действия сосредоточенных сил непосредственно к вершине трещины требует учета более высокого количества слагаемых.

6. Деформирование бесконечной плоскости, ослабленной краевым полубесконечным разрезом, находящимся под действием двух противоположно направленных сосредоточенных сил (пятая конфигурация)

Пятая конфигурация, которая будет рассмотрена в настоящей работе, — это пластина с одним краевым полубесконечным разрезом, на берегах которого приложена пара противоположно направленных сосредоточенных сил. В этом случае комплексный потенциал определяется выражением [2; 34]

$$\varphi_1'(z) = \frac{P\sqrt{b}}{\pi} \frac{1}{(z+b)\sqrt{z}}. \quad (38)$$

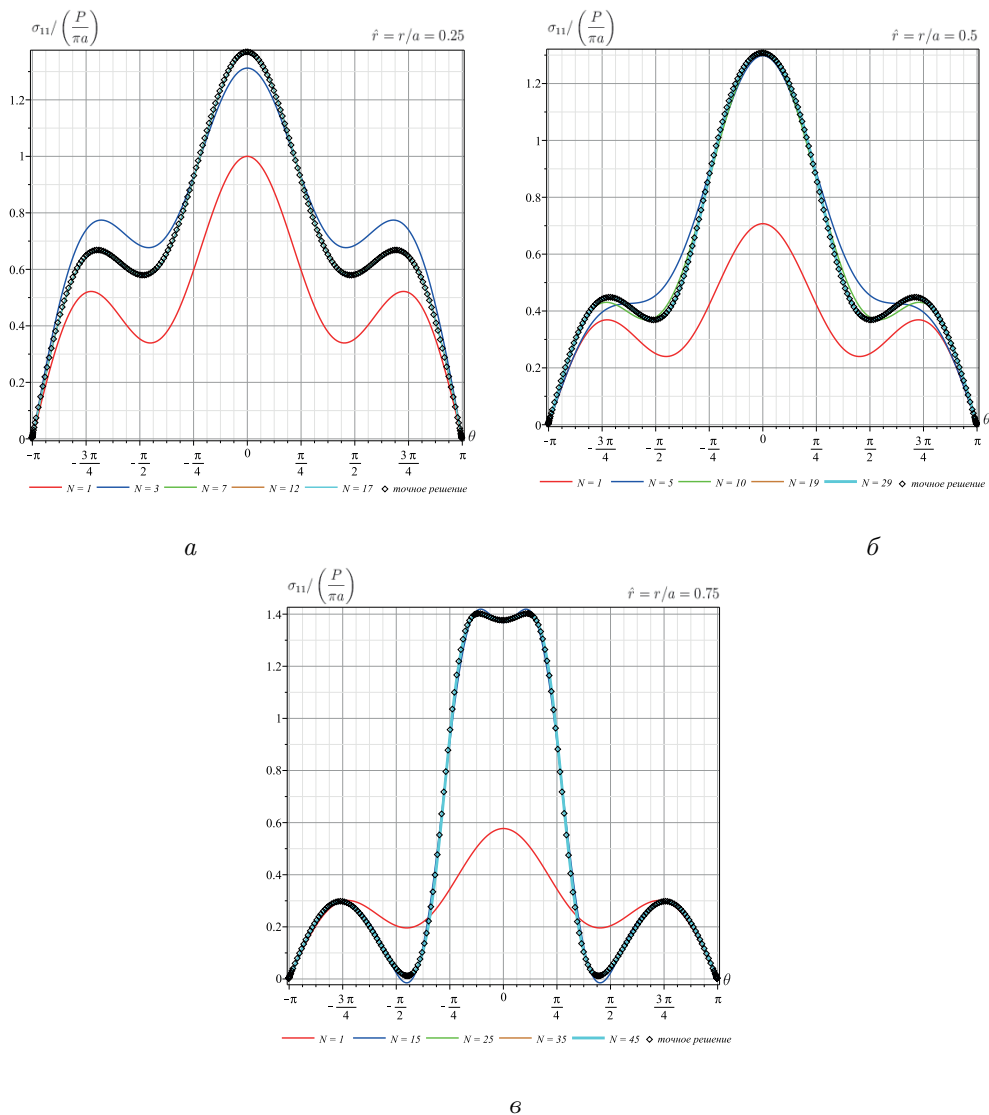


Рис. 30. Угловые распределения компоненты σ_{11} на расстоянии от вершины трещины: а — $\hat{r} = r/a = 0.25$; б — $\hat{r} = r/a = 0.5$; в — $\hat{r} = r/a = 0.75$ и приложенными нагрузками в точках $(0, 1)$ и $(0, -1)$

Fig. 30. Angular distributions of the stress tensor component σ_{11} at the distances from the crack tip: а — $\hat{r} = r/a = 0.25$; б — $\hat{r} = r/a = 0.25$; в — $\hat{r} = r/a = 0.25$ and loads applied at points $(0, 1)$ and $(0, -1)$

Масштабные (амплитудные) множители — коэффициенты ряда М. Уильямса — вычисляются по формулам

$$a_{2n+1}^1 = \frac{P}{\pi b^{n+\frac{1}{2}}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}. \quad (39)$$

Сообразно с развитым подходом построим угловые распределения компонент тензора напряжений у вершины трещины на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$ от ее вершины. Результаты приведены на графиках 33 и 34, где продемонстрированы распределения компонент тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$ и $\sigma_{22}(r, \theta)$ (рис. 33), компонента $\sigma_{12}(r, \theta)$ и интенсивность касательных напряжений $\sigma_e(r, \theta)$ (рис. 34).

Поэтому в рассматриваемом случае приходим к сходному выводу: для пластин с трещинами, находящимися под действием сосредоточенных сил, наблюдается более сильная зависимость от числа слагаемых в ряду Уильямса, тем самым для данной конфигурации на расстоянии $\hat{r} = r/a = 0.75$ следует оставлять в асимптотическом разложении 45 слагаемых. Из построенных графиков ясна общая тенденция: чем больше расстояние от вершины трещины, тем больше слагаемых необходимо удерживать. Вместе с тем следует отметить, что в случае сосредоточенных сил речь идет о достаточно большом числе неособых слагаемых. В большинстве случаев экспериментаторы удерживают 5–10 слагаемых ряда Уильямса, тогда как имеются конфигурации, аналогичные изученной, для которых требуется существенное увеличение числа слагаемых.

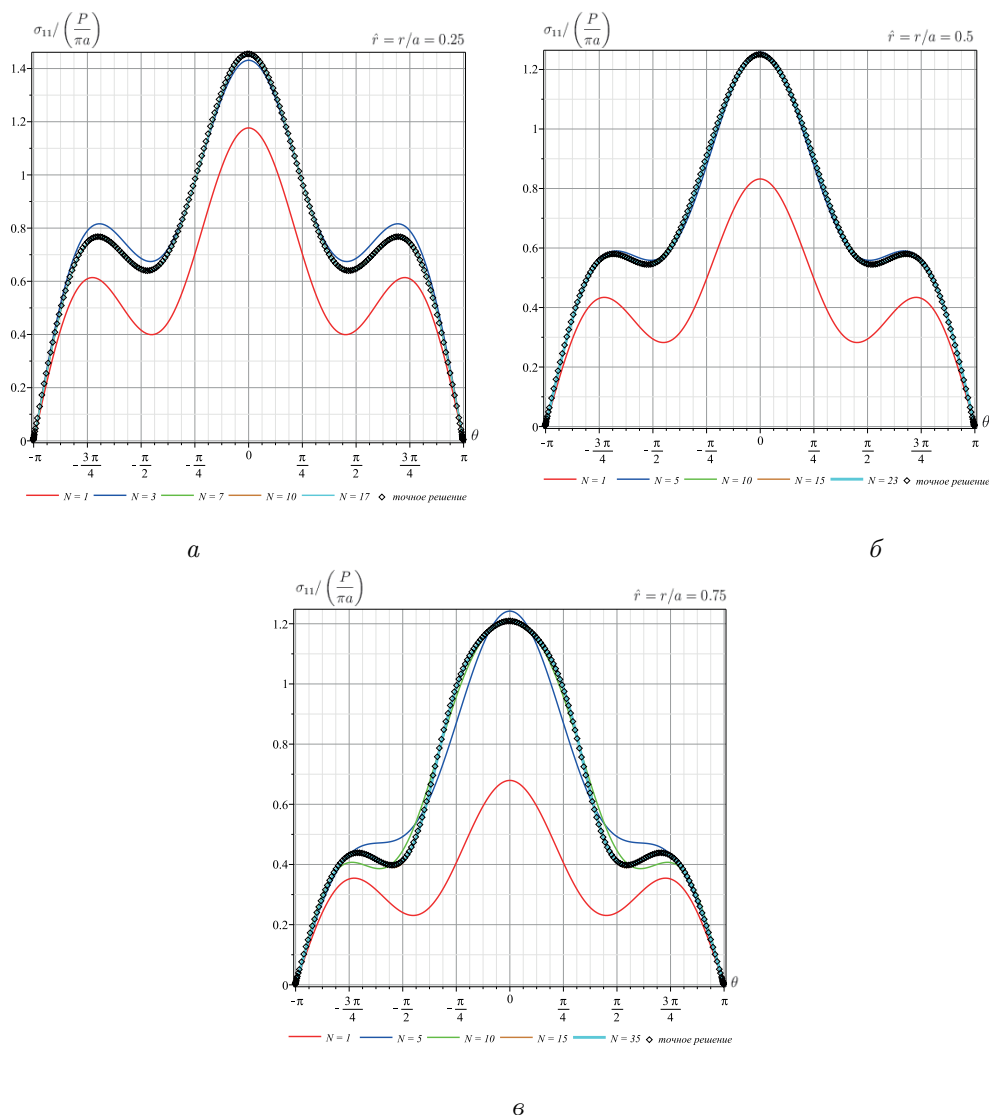


Рис. 31. Угловые распределения компоненты σ_{11} на расстоянии от вершины трещины: а – $\hat{r} = r/a = 0.25$; б – $\hat{r} = r/a = 0.5$; в – $\hat{r} = r/a = 0.75$ и приложенными нагрузками в точках $(0, 1.5)$ и $(0, -1.5)$

Fig. 31. Angular distributions of the stress tensor component σ_{11} at the distances from the crack tip:

а – $\hat{r} = r/a = 0.25$; б – $\hat{r} = r/a = 0.5$; в – $\hat{r} = r/a = 0.75$ and loads applied at points $(0, 1.5)$ and $(0, -1.5)$

7. Деформирование бесконечной плоскости, ослабленной двумя краевыми полубесконечными разрезами, к берегам которых приложены пары противоположно направленных сосредоточенных сил (шестая конфигурация)

Комплексный потенциал Колосова – Мухелишвили для пластины с двумя краевыми разрезами, на берегах которых действуют пары раскрывающих сосредоточенных сил, имеет вид

$$\varphi_1'(z) = \frac{2Pb\sqrt{b^2 - a^2}}{\pi} \frac{1}{(b^2 - z^2)\sqrt{a^2 - z^2}}, \quad (40)$$

где $(a, 0)$ и $(-a, 0)$ – координаты вершин полубесконечных разрезов, $(b, 0)$ и $(-b, 0)$ – координаты точек приложения сосредоточенных сил, P – величина приложенной силы. Коэффициенты ряда Уильямса находятся в замкнутой форме, таким образом, можно проанализировать любое наперед заданное число членов ряда:

$$a_{2n+1}^1 = \frac{Pb}{\pi(2n+1)} \sum_{k=0}^n \left(\frac{(2k)!}{2^{3k-\frac{1}{2}}(k!)^2 a^{k+\frac{1}{2}}} \sum_{l=0}^{n-k} \frac{(-1)^l}{(b-a)^{l+\frac{1}{2}}(b+a)^{n-k-l+\frac{1}{2}}} \right). \quad (41)$$

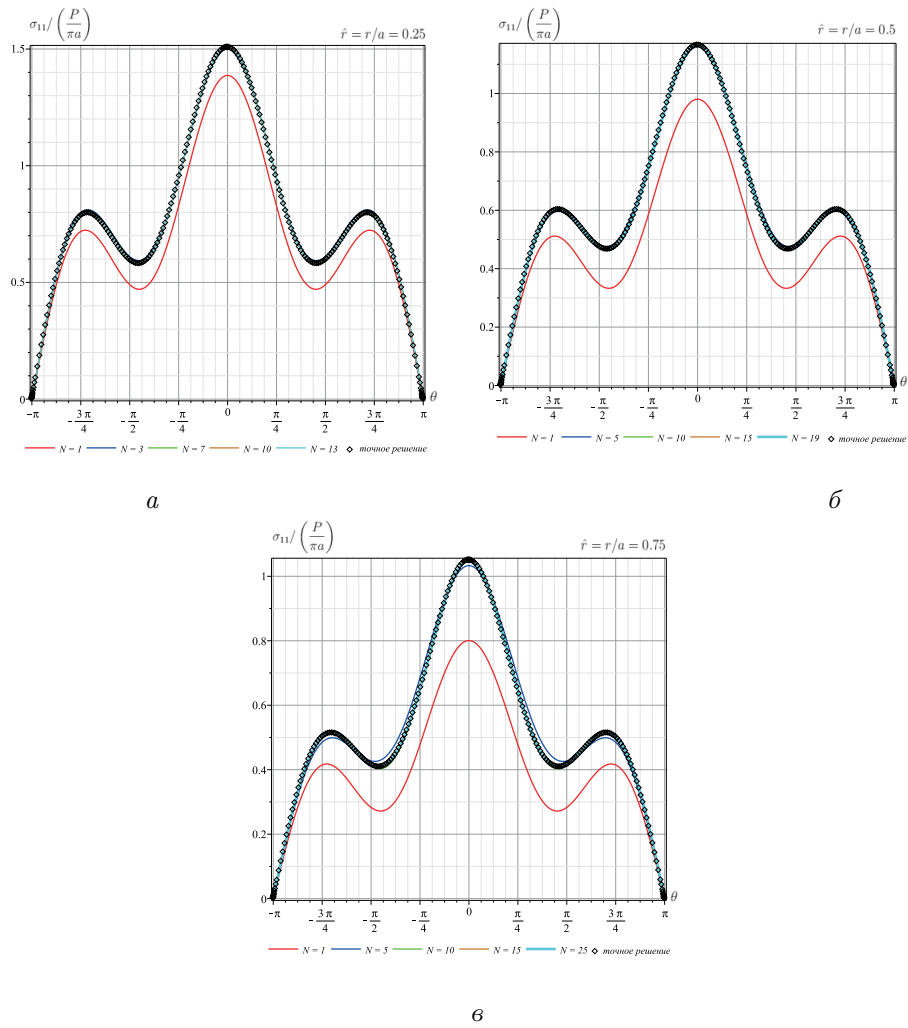


Рис. 32. Угловые распределения компоненты σ_{11} на расстоянии от вершины трещины: *a* — $\hat{r} = r/a = 0.25$; *б* — $\hat{r} = r/a = 0.5$; *в* — $\hat{r} = r/a = 0.75$ и приложенными нагрузками в точках (0, 5) и (0, -5)

Fig. 32. Angular distributions of the stress tensor component σ_{11} at the distances from the crack tip: *a* — $\hat{r} = r/a = 0.25$; *б* — $\hat{r} = r/a = 0.5$; *в* — $\hat{r} = r/a = 0.75$ and loads applied at points (0, 5) and (0, -5)

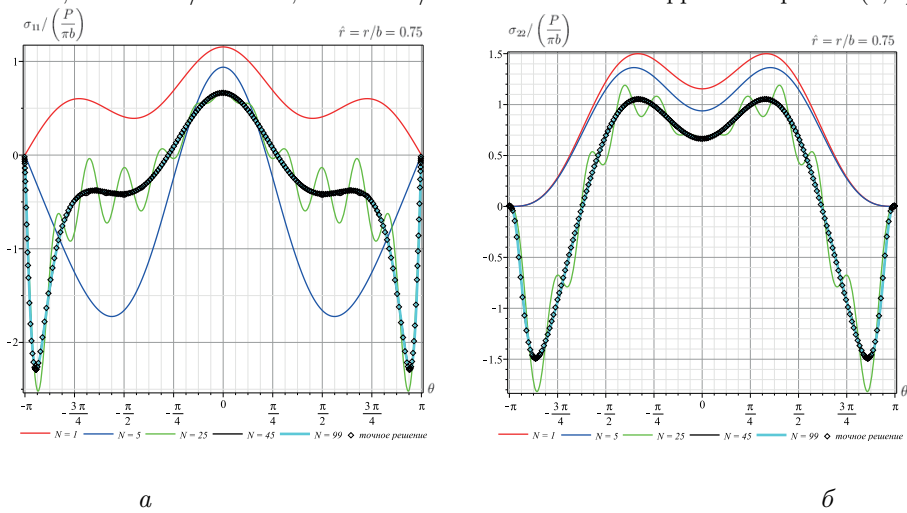


Рис. 33. Угловые распределения компонент *a* σ_{11} и *б* σ_{22} у вершины трещины
 Fig. 33. Angular distributions of the stress tensor components *a* σ_{11} and *б* σ_{22} near the crack tip

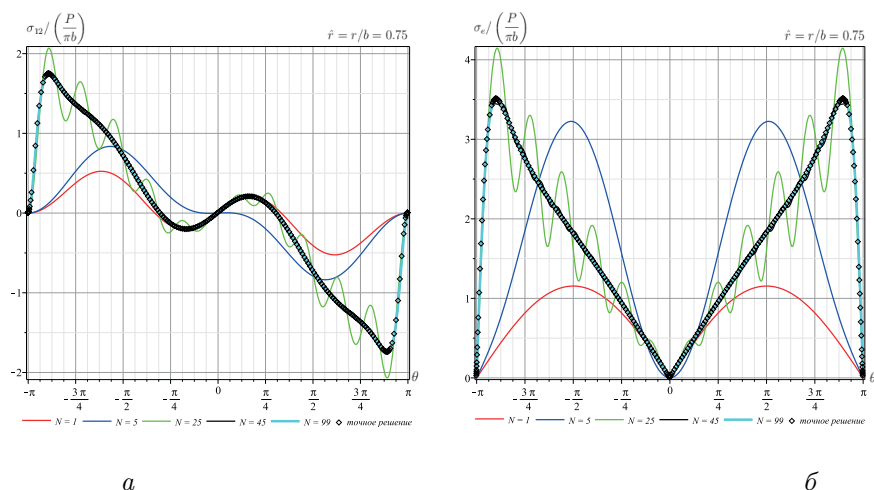


Рис. 34. Угловые распределения касательных напряжений (а) σ_{12} и интенсивности касательных напряжений (б) σ_e у вершины трещины

Fig. 34. Angular distributions of the stress tensor components (a) σ_{12} and (b) equivalent stress σ_e near the crack tip

Следует отметить, что все коэффициенты с четными индексами обращаются в нуль, поэтому в случае приложения сосредоточенных сил отсутствуют T -напряжения. Для изучаемой конфигурации угловые зависимости компонент напряжений представлены на графиках 35 и 36. Из графиков наглядно видно, что на выбранном для анализа расстоянии пятнадцатичленное разложение в значительной степени отличается от точного решения, двадцатипятичленное разложение отличается существенными колебаниями вблизи точного решения, и только тридцатипятичленное разложение позволяет построить кривые, совпадающие с точным аналитическим решением, и дальнейшее увеличение числа слагаемых ряда приводит к изменению приближенного решения.

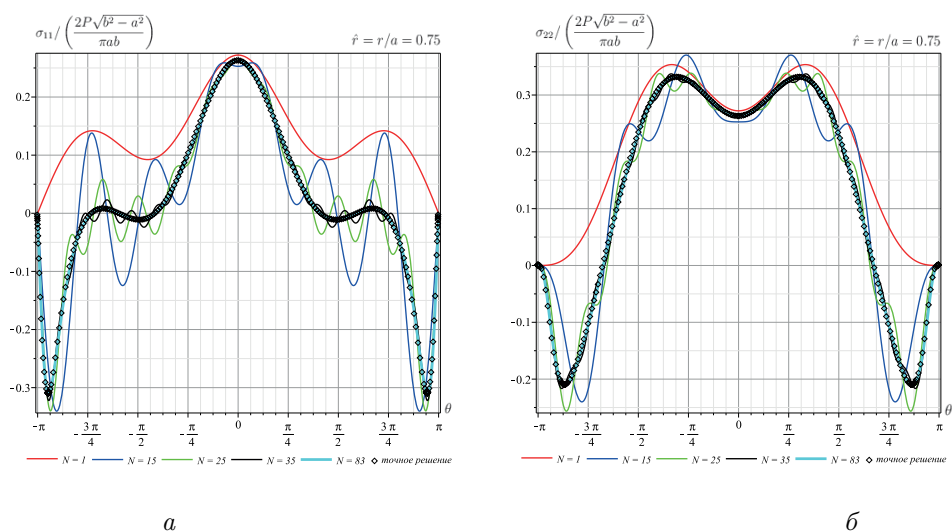


Рис. 35. Угловые распределения компонент (а) σ_{11} и (б) σ_{22} у вершины трещины

Fig. 35. Angular distributions of the stress tensor components (a) σ_{11} and (b) σ_{22} near the crack tip

Тем самым можно заключить, что и данная конфигурация тела с разрезами подчиняется общим выявленным закономерностям: необходима ретенция высших приближений в асимптотическом представлении М. Уильямса.

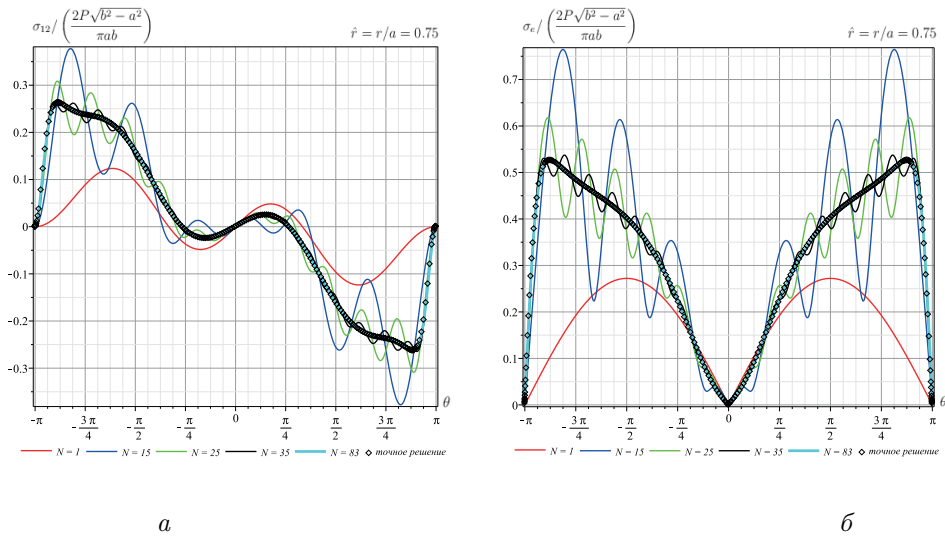


Рис. 36. Угловые распределения касательных напряжений (а) σ_{12} и интенсивности касательных напряжений (б) σ_e у вершины трещины
 Fig. 36. Angular distributions of the stress tensor components (a) σ_{12} and (b) equivalent stress σ_e near the crack tip

8. Бесконечная пластина, ослабленная полубесконечной трещиной, с жестким плоским включением (седьмая конфигурация)

Для бесконечной пластины с полубесконечной трещиной и включением комплексный потенциал Колосова – Мухелишвили имеет вид [34]

$$\varphi'_1(z) = \frac{E'h}{\pi} \frac{1}{\sqrt{z + b}\sqrt{z}}, \quad (42)$$

где h — толщина включения, E' — модуль Юнга ($E' = E$ в случае плоского деформированного состояния и $E' = E/(1 - \nu^2)$ в случае плоского напряженного состояния), $(b, 0)$ — координата точки, являющейся вершиной жесткого плоского включения.

Масштабные множители найдены в работе [34]

$$a_{2n+1}^1 = \frac{E'h}{\pi b^{n+\frac{1}{2}}} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n+1} (2n+1)(n!)^2}. \quad (43)$$

Опираясь на амплитудные коэффициенты (43), можно проанализировать влияние усечения ряда Уильямса на разном количестве слагаемых для данной конфигурации. Данная конфигурация тела с включением была изучена в [34], но сейчас мы обратим свое внимание на угловых распределениях компонент тензора напряжений, которые построены на рис. 38–45. На рис. 38 приведены угловые распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины на расстоянии $\hat{r} = r/b = 0.025$. На рис. 10 показаны угловые распределения с помощью усеченных на различном количестве слагаемых разложений. Видно, что одночленное асимптотическое разложение отличается от трехчленного асимптотического разложения, которое полностью совпадает с точным аналитическим решением задачи. Поясним, что в этом случае T -напряжений не возникает и все коэффициенты, в отличие от задач о трещинах, с четными номерами обращаются в нуль. Таким образом, на расстоянии $\hat{r} = r/b = 0.025$ от кончика дефекта совпадающее с точным аналитическим решением распределение напряжений дает трехчленное асимптотическое разложение М. Уильямса.

На рис. 39 приведены угловые распределения компоненты тензора напряжения $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины на расстоянии $\hat{r} = r/b = 0.05$. На указанном расстоянии, анализируя угловые распределения, можно признать, что одно- и трехчленные разложения поля напряжений отличаются друг от друга заметнее, чем на предыдущем графике, но тем не менее трехчленного асимптотического разложения вполне достаточно для построения асимптотического решения, совпадающего с точным решением.

На рис. 40 приведены угловые распределения компоненты тензора напряжения $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины на расстоянии $\hat{r} = r/b = 0.1$. Из графиков, полученных с помощью усеченных асимптотических разложений, становится ясным, что при увеличении рассматриваемой области необходимо прибегнуть

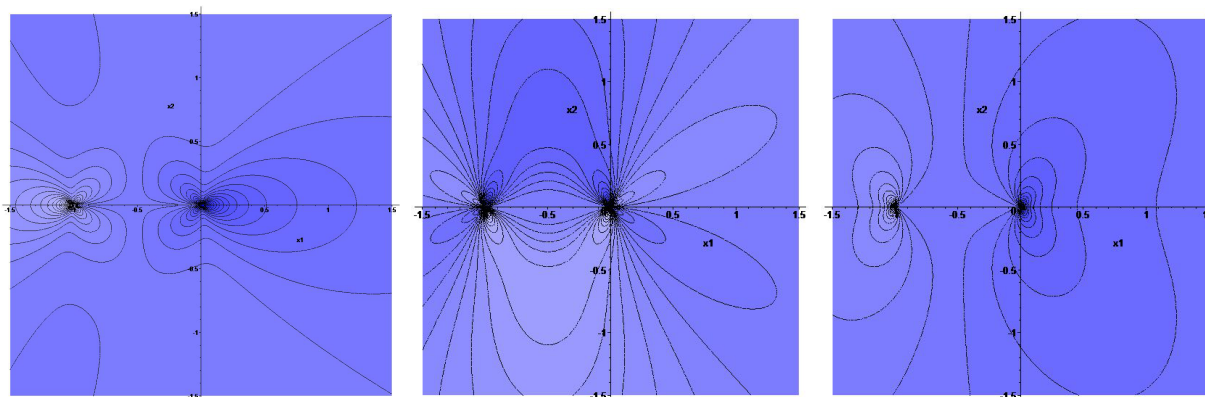


Рис. 37. Линии уровня компонент тензора напряжений σ_{11}, σ_{12} и σ_{22}
 Fig. 37. Contour plots of stress tensor components: σ_{11}, σ_{12} and σ_{22}

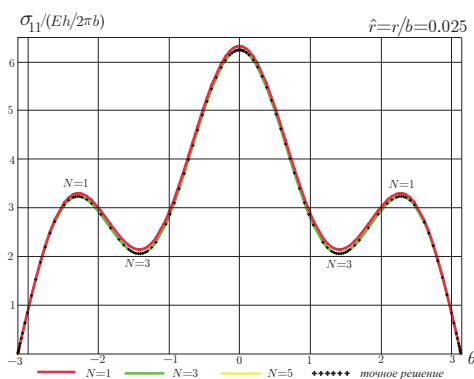


Рис. 38. Угловые распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины на расстоянии $\hat{r} = r/b = 0.025$
 Fig. 38. Angular distributions of the stress tensor component $\sigma_{11}(r, \theta)$ near the crack tip at the distance $\hat{r} = r/b = 0.025$

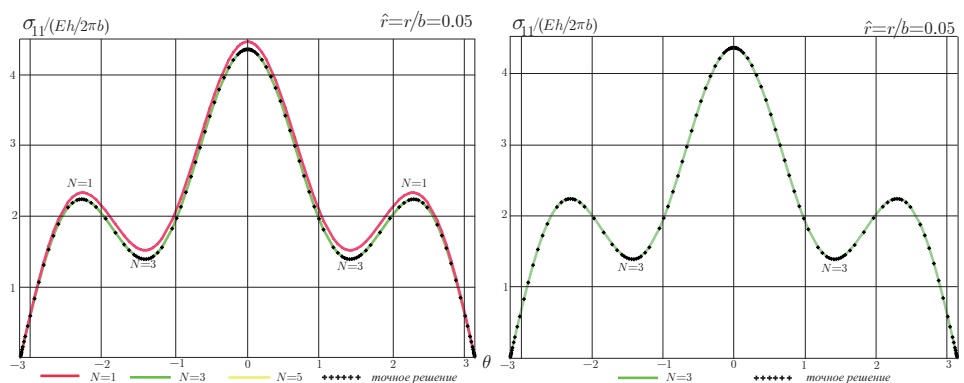


Рис. 39. Угловые распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины на расстоянии $\hat{r} = r/b = 0.05$
 Fig. 39. Angular distributions of the stress tensor component $\sigma_{11}(r, \theta)$ near the crack tip at the distance $\hat{r} = r/b = 0.05$

к пятичленному асимптотическому разложению, ибо только удержание пятичленного асимптотического разложения позволяет получить кривую, полностью совпадающую с точным аналитическим решением.

Дальнейшее увеличение расстояния от кончика приводит к необходимости увеличения количества слагаемых в разложении. Действительно, на рис. 41 показаны угловые распределения компоненты тензора напряжений $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины на расстоянии $\hat{r} = r/b = 0.25$. Из рис. 41 следует, что только семичленное асимптотическое разложение поля напряжений у вершины трещины совпадает с точным решением, полученным методами теории функций комплексного переменного. Видно, что пяти- и семичленное разложения отличаются друг от друга, отличается и пятичленное асимптотическое разложение от точного аналитического решения.

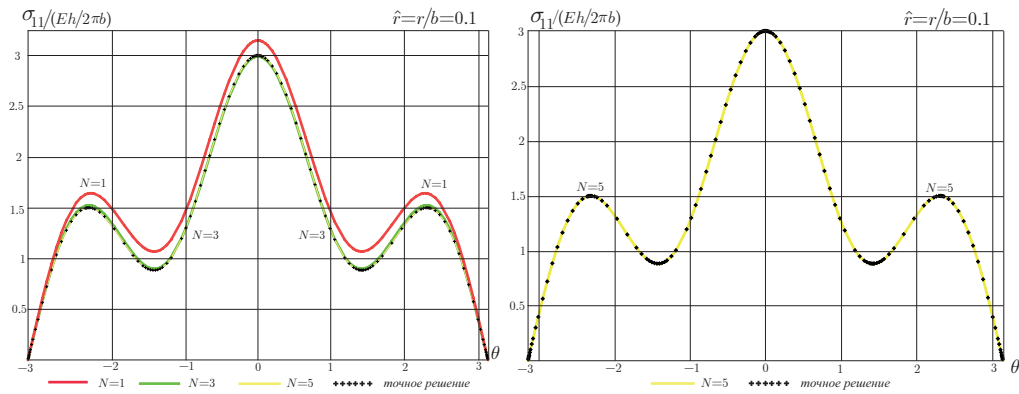


Рис. 40. Угловые распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины на расстоянии $\hat{r} = r/b = 0.1$
 Fig. 40. Angular distributions of the stress tensor component $\sigma_{11}(r, \theta)$ near the crack tip at the distance $\hat{r} = r/b = 0.1$

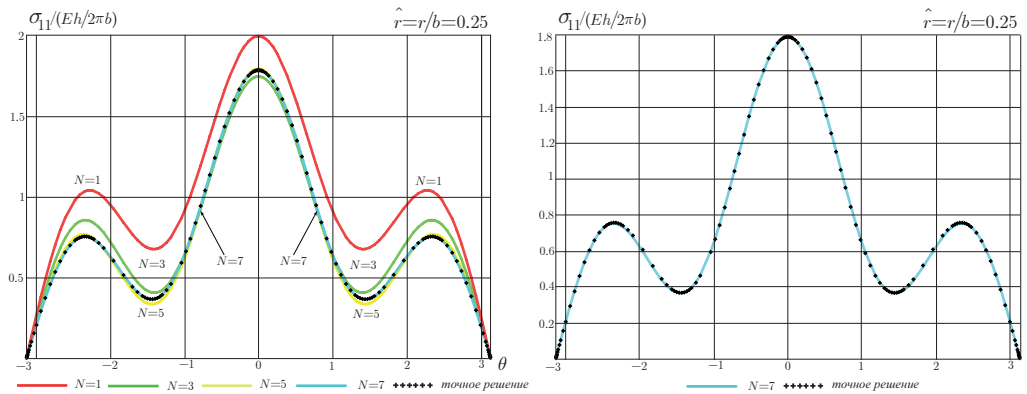


Рис. 41. Угловые распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины на расстоянии $\hat{r} = r/b = 0.25$
 Fig. 41. Angular distributions of the stress tensor component $\sigma_{11}(r, \theta)$ near the crack tip at the distance $\hat{r} = r/b = 0.25$

К значительному увеличению числа удерживаемых слагаемых приводит расширение области, в которой считается справедливым асимптотическое представление М. Уильямса. Тринадцатичленное асимптотическое разложение отличается от точного решения и оказывается, что на расстояниях $\hat{r} = r/b = 0.5$ от вершины трещины необходимо рассматривать семнадцать слагаемых ряда М. Уильямса. Выбор пятнадцати- и семнадцатичленного разложения обуславливается наперед заданной точностью. Таким образом, на указанном расстоянии следует сохранять не менее 15 слагаемых.

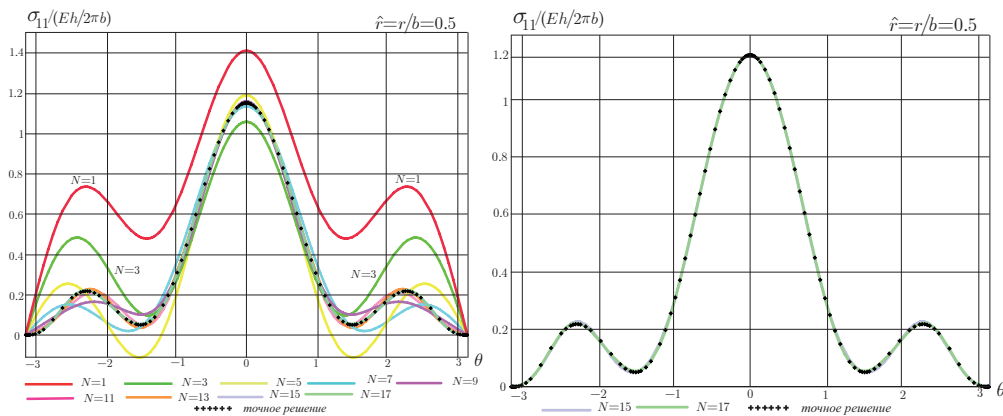


Рис. 42. Угловые распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины на расстоянии $\hat{r} = r/b = 0.5$
 Fig. 42. Angular distributions of the stress tensor component $\sigma_{11}(r, \theta)$ near the crack tip at the distance $\hat{r} = r/b = 0.5$

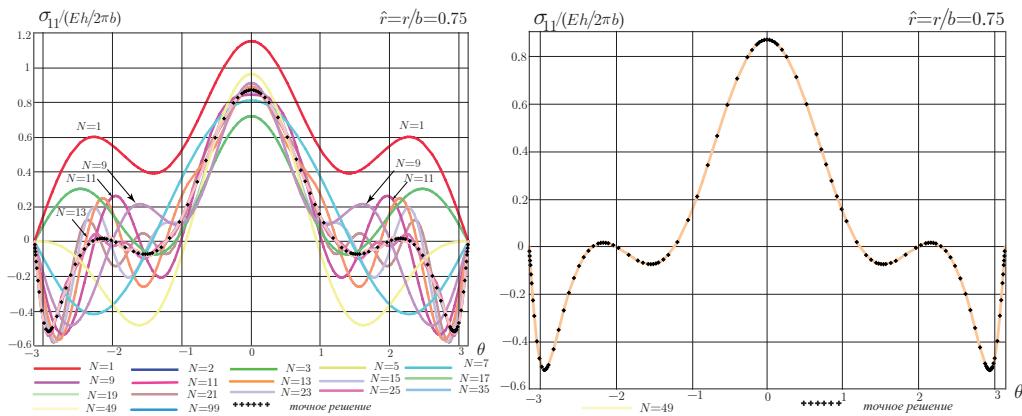


Рис. 43. Угловые распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины на расстоянии $\hat{r} = r/b = 0.75$
 Fig. 43. Angular distributions of the stress tensor component $\sigma_{11}(r, \theta)$ near the crack tip at the distance $\hat{r} = r/b = 0.75$

На рис. 43 демонстрируются угловые распределения компонент тензора напряжений, полученные посредством усеченных разложений на расстоянии $\hat{r} = r/b = 0.75$ от вершины трещины. Можно заключить, что на данном расстоянии от кончика трещины оказываются существенными сорок девять слагаемых. Откуда следует вывод, что данная конфигурация тела с разрезом и включением является заметно более чувствительной к регулярным слагаемым ряда Уильямса, поскольку только сорок девять слагаемых в разложении позволяют получить распределение, совпадающее с точным решением.

К еще более удивительной картине мы приходим, если рассмотрим расстояние $\hat{r} = r/b = 0.85$ (рис. 44). Сравнение асимптотических разложений с различным числом удерживаемых слагаемых и точного решения позволяет вывести заключение, что на данном расстоянии восемьдесят слагаемых ряда воспроизводят угловое распределение, даваемое точным решением. На рис. 45 показано распределение

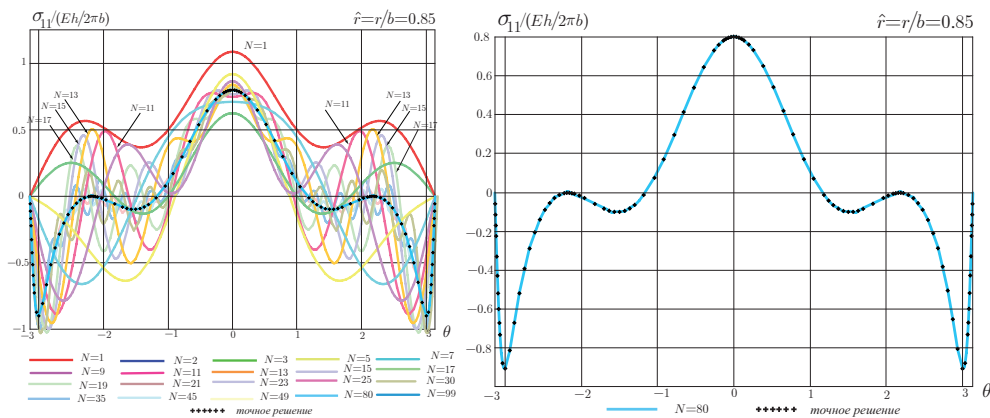


Рис. 44. Угловые распределения компоненты $\sigma_{11}(r, \theta)$ у вершины трещины на расстоянии $\hat{r} = r/b = 0.85$
 Fig. 44. Angular distributions of the stress tensor component $\sigma_{11}(r, \theta)$ near the crack tip at the distance $\hat{r} = r/b = 0.85$

касательного напряжения $\sigma_{12}(r, \theta)$. Как и в случае нормального напряжения $\sigma_{11}(r, \theta)$, на данном расстоянии от вершины в асимптотическом разложении необходимо сохранять 15–17 слагаемых. На рис. 46 показано распределение компоненты напряжения $\sigma_{22}(r, \theta)$. Как и в случае нормального напряжения $\sigma_{11}(r, \theta)$, на данном расстоянии от вершины трещины в асимптотическом разложении необходимо сохранять 49 слагаемых.

Таким образом, аккуратное и отвечающее точному решению асимптотическое решение задачи о деформировании пластины с полубесконечным разрезом и включением, основанное на асимптотическом представлении М. Уильямса, требует сохранения в ряду Уильямса высших приближений, число которых зависит от расстояния от кончика трещины. Если натурный или вычислительный эксперимент делает необходимым рассмотрение точек на расстояниях порядка $\hat{r} = r/b = 0.75$ от вершины трещины, то необходимо сохранять порядка 50 слагаемых. Таким образом, те конфигурации для тел с трещинами,

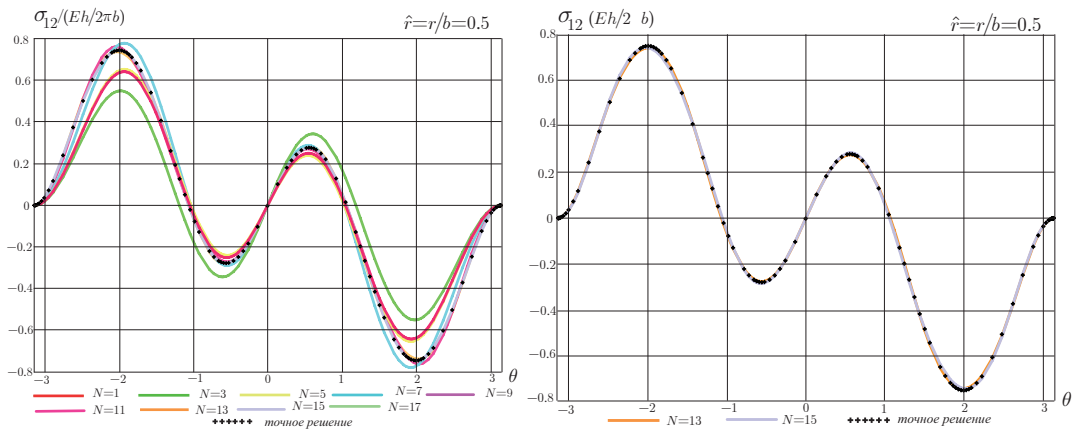


Рис. 45. Угловые распределения компоненты $\sigma_{12}(r, \theta)$ у вершины трещины на расстоянии $\hat{r} = r/b = 0.5$
 Fig. 45. Angular distributions of the stress tensor component $\sigma_{12}(r, \theta)$ near the crack tip at the distance $\hat{r} = r/b = 0.5$

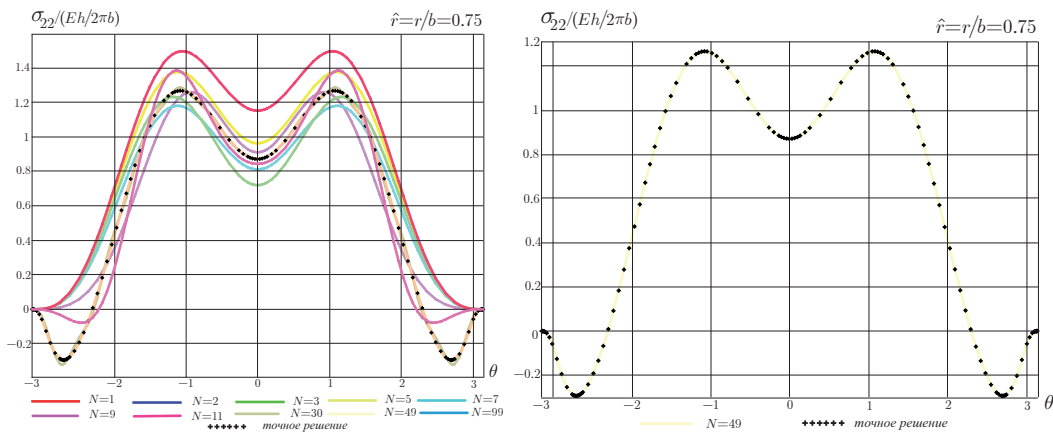


Рис. 46. Угловые распределения компоненты $\sigma_{22}(r, \theta)$ у вершины трещины
 Fig. 46. Angular distributions of the stress tensor component $\sigma_{22}(r, \theta)$ near the crack tip at the distance $\hat{r} = r/b = 0.75$

для которых имеются точные аналитические решения, свидетельствуют о насущной необходимости удержания высших приближений.

Обсуждение результатов и выводы

В статье была рассмотрена серия плоских конфигураций образцов с трещинами, допускающих построение точных аналитических решений с помощью классического формализма Колосова — Мухелишвили. На основании имеющихся комплексных потенциалов для всех геометрий тел с дефектами были найдены в замкнутой форме коэффициенты ряда Уильямса и проанализировано влияние регулярных слагаемых на поле напряжений в окрестности вершины трещины.

Показано, что для аккуратного описания полей напряжений в асимптотическом разложении следует удерживать высшие приближения, причем их количество определяется геометрией образца с трещиной. Оказалось, что наиболее чувствительными являются образцы с включением и приложенными к берегам трещины сосредоточенными силами.

Оказалось, что на расстоянии $\hat{r} = r/b = 0.75$ в асимптотическом разложении поля напряжений вблизи вершины трещины в образце с плоским горизонтальным жестким включением толщины h необходимо рассматривать сорокадевятичленное асимптотическое разложение Уильямса.

Проведенное исследование полезно при анализе и обработке всей совокупности экспериментальной информации, получаемой, например, посредством интерференционно-оптических методов, ибо для правильной и точной интерпретации экспериментальных данных следует понимать, на каких расстояниях от кончика трещины или разреза ведется сбор информации.

Полученные результаты несомненно могут быть использованы при восстановлении масштабных коэффициентов ряда Уильямса с помощью конечно-элементных вычислений, поскольку можно осознанно подходить к вопросу выбора множества точек, в которых происходит сбор вычислительной информации.

Следовательно, выбор экспериментальных точек в ходе интерференционно-оптических исследований и вычислительного эксперимента необходимо осуществлять вкуче с имеющимися теоретическими решениями классической механики разрушения, ибо: 1) использование мультипараметрической модели позволяет существенно расширить область, в которой могут быть сделаны точные вычисления напряженного и деформированного состояния; 2) включение регулярных слагаемых существенно уменьшает колебания в расчетных значениях параметров механики разрушения. Пренебрежение неособыми слагаемыми более высокого порядка в ряду М. Уильямса приводит к значительным ошибкам, которые могут возникнуть даже в довольно небольших областях измерений. Учитывая вышеизложенное, можно заключить, что представления полей напряжений и перемещений, использующие большое число слагаемых, необходимы для анализа интерференционно-оптических данных и результатов конечно-элементных расчетов с оптимальной эффективностью и надежностью.

Проведенное исследование показывает, что, вне сомнения, первое и второе приближения не всегда обеспечивают нужную точность, построение последующих приближений часто составляет весьма трудоемкую задачу. Поэтому экспериментальное и вычислительное извлечение коэффициентов высших слагаемых ряда Уильямса должно опираться на имеющиеся теоретические оценки. Назрело время для разработки компьютерных алгоритмов, позволяющих надежным образом извлекать коэффициенты асимптотических разложений из экспериментальных и вычислительных данных.

Проведенное исследование может быть полезным и при построении асимптотических решений нелинейных задач определения напряженно-деформированного состояния у вершины трещины в условиях ползучести, в целом в средах с нелинейными конституциональными уравнениями.

Литература

- [1] Sadd M.H. Elasticity. Theory, Applications and Numerics. Oxford: Academic Press, 2021. 624 p. Available at: [http://nozdr.ru/data/media/biblio/kolxoz/P/PC/PCem/Sadd%20M.H.%20Elasticity.%20Theory,%20applications,%20and%20numerics%20\(Elsevier,%202005\)\(473s\)_PCem_.pdf](http://nozdr.ru/data/media/biblio/kolxoz/P/PC/PCem/Sadd%20M.H.%20Elasticity.%20Theory,%20applications,%20and%20numerics%20(Elsevier,%202005)(473s)_PCem_.pdf).
- [2] Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва: Изд-во Академии наук СССР, 1954. 647 с. URL: <https://lib-bkm.ru/load/86-1-0-2343>.
- [3] Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. Москва-Ленинград: Гостехиздат, 1949. 272 с. URL: http://publ.lib.ru/ARCHIVES/SH/SHTAERMAN_И'ya_Yakovlevich/_Shtaerman_I.Ya..html.
- [4] Razumovsky I.A. Interference-optical methods of solid mechanics. Berlin: Springer, Foundations of Engineering Mechanics. 2011. 180 p. URL: [http://nozdr.ru/data/media/biblio/kolxoz/E/EO/Razumovsky%20I.A.,%20Yakovlevich%20G.A.%20\(eds.\)%20Interference-optical%20Methods%20of%20Solid%20Mechanics%20\(Springer,%202010\)\(ISBN%203642112218\)\(O\)\(195s\)_EO_.pdf](http://nozdr.ru/data/media/biblio/kolxoz/E/EO/Razumovsky%20I.A.,%20Yakovlevich%20G.A.%20(eds.)%20Interference-optical%20Methods%20of%20Solid%20Mechanics%20(Springer,%202010)(ISBN%203642112218)(O)(195s)_EO_.pdf).
- [5] Sironi R.S. Optical methods of measurement. Wholefield Techniques. Boca Raton: CRC Press, 2009. 316 p. DOI: <http://doi.org/10.1201/9781315221359>.
- [6] Ramesh K. Developments in Photoelasticity: A renaissance. IOP Publishing, 2021. 225 p. URL: <https://iopscience.iop.org/book/mono/978-0-7503-2472-4>.
- [7] Patil P., Vyasrayani C.P., Ramji M. Linear least squares approach for evaluating crack tip fracture parameters using isochromatic and isoclinic data from digital photoelasticity // Optics and Lasers in Engineering. 2017. Vol. 93. P. 182–194. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2017.02.003>.
- [8] Vivekanandan A., Ramesh K. Study of interaction effects of asymmetric cracks under biaxial loading using digital photoelasticity // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2019. Vol. 99. P. 104–117. DOI: <http://doi.org/10.1007/s11340-019-00561-9>.
- [9] Dondeti S., Tippur H.V. A Comparative Study of Crack Branching in Glass Using Photoelasticity, Digital Image Correlation and Digital Gradient Sensing Techniques // Challenges in Mechanics of Time Dependent Materials, Fracture, Fatigue, Failure and Damage Evolution, Volume 2. Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series. / Silberstein M., Amirkhizi A., Shuman X., Beese A., Berke R., Pataky G. (eds). Springer International Publishing, Cham. 2020. P. 9–15. DOI: http://doi.org/10.1007/978-3-030-29986-6_2.
- [10] Lee K.H., Kim B.S., Kim J.S. Fabrication of transparent homogeneous functionally graded materials and crack analysis by photoelasticity. // Journal of Mechanical Science and Technology. 2021. Vol. 35, P. 3919–3929. DOI: <http://doi.org/10.1007/s12206-021-0805-8>.
- [11] Vivekanandan A., Ramesh K. Study of Crack Interaction Effects Under Thermal Loading by Digital Photoelasticity and Finite Elements // Experimental Mechanics. 2020. Vol. 60. P. 295–316. DOI: [10.1007/s11340-019-00561-9](http://doi.org/10.1007/s11340-019-00561-9).

- [12] Thomre M., Ramesh K. Evaluation of Fracture Parameters of Cracks in Compressor Blade Root Using Digital Photoelasticity // Lecture Notes in Mechanical Engineering. 2020. P. 557–566. DOI: http://doi.org/10.1007/978-981-13-9008-1_46.
- [13] Berrekheroukh N., Sereir Z., Vivet A., Adda Bedia E.A., Fekrar A. Experimental and numerical models to study the creep behavior of the unidirectional Alfa fiber composite strength by the photoelasticity method // Mechanics of Time-Dependent Materials. 2021. P. 1573–2738. DOI: <http://doi.org/10.1007/S11043-021-09500-5>.
- [14] (Stevanovic) Hedrih K.R., Brcic S.V., Paunovic S. Application of Photoelasticity to Some Nonlinear Dynamic Problems and Stress State Analysis in Dams: A Brief Overview Inspired by the Results of Prof. Vlatko Brcic // Nonlinear Dynamics of Structures, Systems and Devices/ Lacarbonara, W., Balachandran, B., Ma, J., Tenreiro Machado, J., Stepan, G. (eds). Springer, Cham. 2020. P. 357–365. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-34713-0_36.
- [15] Juan C. Brinez-de L., Rico-Garcia M., Restrepo-Martinez A. PhotoelastNet: a deep convolutional neural network for evaluating the stress field by using a single color photoelasticity image // Applied Optics. 2022. Vol. 61. Issue 7. Pp. D50–D62. DOI: <http://doi.org/10.1364/ao.444563>.
- [16] Mose B., Shin D., Nam J. Experimental Stress Analysis of Spherical Roller Bearing for High-Speed Trains Using Photoelasticity // Experimental Techniques. 2022. DOI: <http://doi.org/10.1007/s40799-022-00576-3>.
- [17] Матвиенко Ю.Г. Двухпараметрическая механика разрушения. Москва: Издат. фирма «Физико-математическая литература», 2020. 210 с. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=44521290>. EDN: <https://elibrary.ru/ltcqcj>.
- [18] Косыгина Л.Н. Асимптотическое представление поля напряжений у вершины трещины для пластины с боковыми надрезами: теоретическое исследование и вычислительный эксперимент // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2018. Т. 24. №2. С. 55–66. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-2-55-66>. EDN: <https://elibrary.ru/ytbblbz>.
- [19] Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В. Прикладные задачи механики разрушения. Самара: Изд-во «Самарский университет», 1999. 195 с.
- [20] Li D., Huang P., Chen Z., Yao G., Guo X., Zheng X., Yang Y. Experimental study on fracture and fatigue crack propagation processes in concrete based on DIC technology // Engineering Fracture Mechanics. 2020. Vol. 235. P. 107166. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2020.107166>.
- [21] Степанова Л.В. Экспериментальное и конечно-элементное определение коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса у вершины трещины в линейно-упругом изотропном материале. Часть I // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Сер.: Механика. 2020. № 4. С. 237–249. DOI: <http://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.4.20>. EDN: <https://elibrary.ru/edwnlr>.
- [22] Степанова Л.В. Экспериментальное и конечно-элементное определение коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса у вершины трещины в линейно-упругом изотропном материале. Часть II // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Сер.: Механика. 2021. № 1. С. 72–85. DOI: <http://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.1.08>. EDN: <https://elibrary.ru/lezlhq>.
- [23] Степанова Л.В., Долгих В.С. Цифровая обработка результатов оптоэлектронных измерений. Метод фотоупругости и его применение для определения коэффициентов многопараметрического асимптотического разложения М. Уильямса поля напряжений // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер.: Физико-математические науки. 2017. Т. 21. № 4. С. 717–735. DOI: <http://doi.org/10.14498/vsgtu1544>. EDN: <https://elibrary.ru/yugzxh>.
- [24] Степанова Л.В., Долгих В.С. Экспериментальное определение коэффициентов многопараметрического разложения поля напряжений у вершины трещины: метод фотоупругости // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2017. Т. 23. № 1. С. 59–68. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=29945522>. EDN: <https://elibrary.ru/zfhtcl>.
- [25] Stepanova L.V. Photoelastic study of a double edge notched plate for determination of the Williams series expansion // Vestnik of Samara University. Natural Sciences. 2020. Vol. 26. № 4. P. 56–67. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-4-56-67>. EDN: <https://elibrary.ru/sfgqgl>.
- [26] Li Y., Zheng K. Crack tip asymptotic field coefficients analyses based on extended finite element method using over-deterministic displacement field fitting method // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2021. Vol. 113. P. 102971. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.TAFMEC.2021.102971>.
- [27] Li H., Zhong H. Weak form quadrature element analysis of crack-tip asymptotic field coefficients // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2022. Vol 119. P. 103320. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.tafmec.2022.103320>.
- [28] Williams M.L. On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack // Journal of Applied Mechanics. 1956. Vol. 24. № 1. P. 109–114. URL: <http://authors.library.caltech.edu/47558/1/382747.pdf>.
- [29] Williams M.L. Stress Singularities Resulting From Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension // Journal of Applied Mechanics. 1952. Vol. 74, № 4. P. 526–528. URL: <http://authors.library.caltech.edu/47672/1/382785.pdf>.

- [30] Karihaloo B.L., Abdalla H., Xiao Q.Z. Coefficients of the crack tip asymptotic field for wedge splitting specimens // *Engineering Fracture Mechanics*. 2003. Vol. 70, № 17. P. 2407–2420. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0013-7944\(03\)00005-5](http://doi.org/10.1016/S0013-7944(03)00005-5)
- [31] Karihaloo B.L., Xiao Q.Z. Accurate determination of the coefficients of elastic crack tip asymptotic field by a hybrid crack element with p-adaptivity // *Engineering Fracture Mechanics*. 2001. Vol. 68, № 15. P. 1609–1630. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0013-7944\(01\)00063-7](http://doi.org/10.1016/S0013-7944(01)00063-7).
- [32] Karihaloo B.L., Xiao Q.Z. Higher order terms of the crack tip asymptotic field for a wedge-splitting specimen // *International Journal of Fracture*. 2001. vol. 112, № 2. P. 129–137. DOI: <http://doi.org/10.1023/A%3A1013366025494>.
- [33] Hello G. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium. // *International Journal of Solids and Structures*. 2012. Vol. 49. Issues 3–4. P. 556–566. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.IJSOLSTR.2011.10.024>.
- [34] Hello G. Derivation of complete crack-tip expansion from Westergaard-Sanfors solutions // *International Journal of Solids and Structures*. 2019. Vol. 144–145. P. 265–275. DOI: [10.1016/j.ijsolstr.2018.05.012](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.05.012).
- [35] Stepanova L., Roslyakov P., Gerasimova T. Complete Williams Asymptotic Expansion near the Crack Tips of Collinear Cracks of Equal Lengths in an Infinite Plane // *Solid State Phenomena*. 2017. Vol. 258. P. 209–212. DOI: <http://doi.org/10.4028/www.scientific.net/SSP.258.209>.
- [36] Stepanova L. Complete Williams Asymptotic Expansion Near The Crack Tips of Collinear Cracks of Equal Lengths in an Infinite Plane Medium. *Procedia Structural Integrity*, 2016, vol. 2, pp. 1789–1796. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.PROSTR.2016.06.225>.
- [37] Chona R., Irwin G.R., Shukla A. Two and three parameter presentations of crack-tip stress field // *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*. 1982. Vol. 17, № 2. P. 79–86. DOI: <http://doi.org/10.1243/03093247V172079>.
- [38] Nejati M., Ghouli S., Ayatollahi M.R. Crack tip asymptotic fields in anisotropic planes: Importance of higher order terms // *Applied Mathematical Modelling*. 2021. Vol. 91. P. 837–862. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.APM.2020.09.025>.
- [39] Sanchez M., Mallor C., Canales M., Calvo S., Nunez J.L. Digital Image Correlation parameters optimized for the characterization of fatigue crack growth life // *Measurements*. 2021. Vol. 174. P. 109082. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.MEASUREMENT.2021.109082>.
- [40] Ayatollahi M.R., Nejati M., Ghouli S. Crack tip fields in anisotropic planes: a review // *International Journal of Fracture*. 2021. P. 1573–2673. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10704-021-00559-2>. EDN: <https://elibrary.ru/qgbbj>.
- [41] Akbardoost Ja. Scaling effect on the mixed-mode fracture path of rock materials // *Physical Mesomechanics*. 2016. Vol. 19. № 4. P. 441–451. DOI: <http://doi.org/10.1134/S102995991604010X>.
- [42] Матвиенко Ю.Г. Двухпараметрическая механика разрушения в современных проблемах прочности // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2013. № 5. С. 37–46. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=20466943>. EDN: <https://elibrary.ru/rfwvld>.
- [43] Большаков А.М., Прокопьев Л.А. Прогнозирование траектории роста трещины с учетом углового распределения малых составляющих тангенциальных напряжений у вершины трещины // *Деформация и разрушение материалов*. 2019. № 3. С. 25–27. DOI: <http://doi.org/10.31044/1814-4632-2019-3-25-27>. EDN: <https://elibrary.ru/yejqiq>.
- [44] Луценко А.Н., Одинцев И.Н., Гриневиц А.В., Северов П.Б., Плугатарь Т.П. Исследование процесса распространения трещины по данным измерений локального деформационного отклика I. Поле действующих напряжений // *Ученые записки ЦАГИ*. 2015. Т. 46. № 7. С. 55–80. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=24344617>. EDN: <https://elibrary.ru/umtbfm>.
- [45] Литвинов И.А., Матвиенко Ю.Г., Разумовский И.А. О точности определения несингулярных компонент поля напряжений в вершине трещины с применением метода экстраполяции // *Машиностроение и инженерное образование*. 2014. № 4(41). С. 43–51. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=22868188>. EDN: <https://elibrary.ru/tglaux>.
- [46] Тырымов А.А. Численная оценка τ -напряжений для образца с центральной трещиной на основе графовой модели упругого тела // *Известия Волгоградского государственного технического университета*. 2019. № 6(229). С. 26–29. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=38223103>. EDN: <https://elibrary.ru/fxobjj>.
- [47] Тырымов А.А. Численная оценка коэффициента интенсивности напряжений и коэффициента биаксильности для компактного образца с использованием сингулярного элемента графовой модели упругого тела // *Известия Волгоградского государственного технического университета*. 2020. № 2(237). С. 58–61. DOI: <http://doi.org/10.35211/1990-5297-2020-2-237-58-61>. EDN: <https://elibrary.ru/ouybnl>.
- [48] Матвиенко Ю.Г. Несингулярные T-напряжения в критериях механики разрушения тел с вырезами // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*. 2011. № 4–5. С. 2651–2652. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=21121940>. EDN: <https://elibrary.ru/rufmtb>.

- [49] Acanfora M., Gallo P., Razavi S.M.J., Ayatollahi M.R., Berto F. Numerical evaluation of T-stress under mixed mode loading through the use of coarse meshes // Физическая неомеханика. 2018. Vol. 21, № 1. P. 30–40. DOI: <http://doi.org/10.1134/S1029959918020054>.
- [50] Шлянников В.Н., Захаров А.П., Герасименко А.А. Характеристики циклической трещиностойкости стали Ст-3 при двухосном нагружении // Труды Академэнерго. 2013. № 4. С. 91–101. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=21056907>. EDN: <https://elibrary.ru/rsumsj>.
- [51] Шлянников В.Н., Захаров А.П. Обобщенные диаграммы циклической трещиностойкости при двухосном нагружении // Труды Академэнерго. 2015. № 4. С. 72–89. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=25655495>. EDN: <https://elibrary.ru/vpkxeb>.
- [52] Степанова Л.В., Белова О.Н., Туркова В.А. Определение коэффициентов разложения М. Уильямса поля напряжений у вершины трещины с помощью метода цифровой фотоупругости и метода конечных элементов // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2019. Т. 25. № 3. С. 62–82. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-3-62-82>. EDN: <https://elibrary.ru/bogzpu>.
- [53] Stepanova L.V., Roslyakov P.S. Complete asymptotic expansion M. Williams near the crack tips of collinear cracks of equal lengths in an infinite plane medium // PNRPU Mechanics Bulletin. 2015. № 4. P. 188–225. DOI: <http://doi.org/10.15593/perm.mech/2015.4.12>. EDN: <https://elibrary.ru/szclpz>.
- [54] Mehdi-Soozani A. Experimental fracture mechanics through digital image analysis. Retrospective Theses and Dissertations. Iowa: Iowa State University, 1986, 157 p. DOI: <http://doi.org/10.31274/RTD-180813-12927>.
- [55] Ramesh K., Gupta S., Kelkar A.A. Evaluation of stress field parameters in fracture mechanics by photoelasticity — revisited // Engineering Fracture Mechanics. 1997. Vol. 56. № 1. P. 25–41, 43–45. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0013-7944\(96\)00098-7](http://doi.org/10.1016/S0013-7944(96)00098-7).
- [56] Ramesh K. Digital Photoelasticity: Advanced Techniques and Applications. Berlin: Springer, 2000. 410 p. DOI: <http://doi.org/10.1115/1.1483353>.
- [57] Косыгин А.Н., Косыгина Л.Н. Цифровая обработка экспериментальных интерферограмм, полученных методом фотоупругости // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2019. Т. 25. № 2. С. 75–91. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-2-75-91>. DOI: <https://elibrary.ru/lqkuto>.
- [58] Malikova L., Vesely V. Significance of Higher-order Terms of the Williams Expansion for Plastic Zone Extent Estimation Demonstrated on a Mixed-mode Geometry. *Procedia Materials Science*, 2014. Vol. 3. P. 1383–1388. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.mspro.2014.06.223>.
- [59] Aytaollahi M.R., Moazzami M. Digital image correlation method for calculating coefficients of Williams expansion in compact specimen // Optics and Lasers in Engineering. 2017. Vol. 90. P. 26–33. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2016.09.011>.
- [60] Moazzami M., Aytaollahi M.R., Chamani H.R., Guagliano M., Vergani L. Determination of higher order stress terms in cracked Brazilian disc specimen under mode I loading using digital image correlation technique // Optics and Laser Technology. 2018. Vol. 107. P. 344–352. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2018.06.010>.
- [61] Su R.K.L., Feng W.J. Accurate determination of mode I and II leading coefficients of the Williams expansion by finite element analysis // Finite Elements in Analysis and Design. 2005. Vol. 41. Issues 11–12. P. 1175–1186. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.finel.2004.11.006>.
- [62] Roux-Langlois C., Gravouil A., Baietto M. S.-C., Rethore J., Mathieu F., Hild F., Roux S. DIC identification and X-FEM simulation of fatigue crack growth based on the Williams series // International Journal of Solids and Structures. 2015. Vol. 53. Pp. 38–47. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2014.10.026>.
- [63] Степанова Л.В. Влияние высших приближений в асимптотическом разложении М. Уильямса поля напряжений на описание напряженно-деформированного состояния у вершины трещины. Часть I // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2019. Т. 25, № 1. С. 63–79. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-1-63-79>.
- [64] Степанова Л.В. Влияние высших приближений в асимптотическом разложении М. Уильямса поля напряжений на описание напряженно-деформированного состояния у вершины трещины. Часть II // Вестник Самарского университета. Естественная серия. 2019. Т. 25, № 1. С. 80–96. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-1-80-96>.
- [65] Malikova L. Multi-parameter fracture criteria for the estimation of crack propagation direction applied to a mixed-mode geometry // Engineering Fracture Mechanics. 2015. Vol. 143. P. 32–46. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.06.029>.
- [66] Camacho-Reyes A., Vasco-Olmo J.M., James M.N., Diaz F.A. Towards a new methodology for the characterization of crack tip fields based on a hybrid computational approach // International Journal of Fatigue. 2022. Vol. 162, P. 106942. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2022.106942>.
- [67] Mirzaei A.M., Bahrami B., Aytollahi M.R. Asymptotic stress field around the blunt and sharp notches in bimaterial media under mixed mode I/II loading // Applied Mathematical Modelling. 2022. Vol. 109. P. 848–863. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.apm.2022.04.017>.

- [68] Liu Z.-E., Wei Y. An analytical solution to the stress fields of kinked cracks // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2021. Vol. 156. P. 104619. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.jmps.2021.104619>.
- [69] Степанова Л.В. Асимптотический анализ поля напряжений у вершины трещины (учет высших приближений) // Сибирский журнал вычислительной математики. 2019. Т. 22, № 3. С. 345–361. DOI: <http://doi.org/10.15372/SJNM20190307>. EDN: <https://elibrary.ru/qaqied>.
- [70] Sanford R.J. A critical re-examination of the Westergaard method for solving opening-mode crack problems // Mechanics Research Communications. 1979. Vol. 6, P. 289–294.



Scientific article

DOI: 10.18287/2541-7525-2021-27-4-30-67

Submitted: 03.09.2021

Revised: 11.10.2021

Accepted: 25.11.2021

R.M. Zhabbarov

Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: zhabbarov.rm@ssau.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9340-8512>

L.V. Stepanova

Samara National Research University, Samara, Russian Federation
E-mail: petr2021@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6693-3132>

COMPARATIVE ANALYSIS OF STRESS STATE IN THE VICINITY OF THE CRACK-TIPS AND NOTCHES USING TRUNCATED WILLIAMS SERIES EXPANSION²

ABSTRACT

In the present study the asymptotic analysis of the multi-parameter Williams series expansion of the stress-strain state in the vicinity of seven different configurations is performed. The aim of the asymptotic analysis is to educate the sensitivity of different cracked and notched configurations to the number of kept terms in Williams series expansion. It is shown that all configurations with the concentrated forces possess the more sensitivity to the number of terms in the truncated Williams series expansions and, therefore, require the more terms in the series expansion. The cracked configurations with distributed loadings are less sensitive to the number of terms in Williams series expansion. As a whole, it is demonstrated that high order terms have principal role in the description of the stress-strain in the vicinity of the crack tip.

Key words: multi-parameter Williams series expansion; Williams series coefficients high order terms; theory of functions of a complex variable.

Citation. Zhabbarov R.M., Stepanova L.V. Comparative analysis of stress state in the vicinity of the crack-tips and notches using truncated Williams series expansion. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia* = *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 4, pp. 30–67. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-4-30-67>. (In Russ.)

Information about the conflict of interests: authors and reviewers declare no conflict of interests.

© Zhabbarov R.M., 2021

Ramil M. Zhabbarov — postgraduate student of the Department of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.

© Stepanova L.V., 2021

Larisa V. Stepanova — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.

References

- [1] Sadd M.H. Elasticity. Theory, Applications and Numerics. Oxford: Academic Press, 2021, 624 p. Available at: [http://nozdr.ru/data/media/biblio/kolkoz/P/PC/PCem/Sadd%20M.H.%20Elasticity.%20Theory,%20applications,%20and%20numerics%20\(Elsevier,%202005\)\(473s\)_PCem_.pdf](http://nozdr.ru/data/media/biblio/kolkoz/P/PC/PCem/Sadd%20M.H.%20Elasticity.%20Theory,%20applications,%20and%20numerics%20(Elsevier,%202005)(473s)_PCem_.pdf).

²The work is carried out with the support of the Russian Foundation for Basic Research within the grant № 19-31-90100

- [2] Muskhelishvili N.I. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Moscow: Izdatel'stvo akademii nauk SSSR, 1954, 647 p. Available at: <https://lib-bkm.ru/load/86-1-0-2343>. (In Russ.)
- [3] Shtaerman I.Ya. Contact problem in elasticity theory. Moscow-Leningrad: Gostekhizdat, 1949, 272 p. Available at: http://publ.lib.ru/ARCHIVES/SH/SHTAERMAN_И'ya_Yakovlevich/_Shtaerman_I.Ya..html. (In Russ.)
- [4] Razumovsky I.A. Interference-optical methods of solid mechanics. Berlin: Springer, Foundations of Engineering Mechanics, 2011, 180 p. Available at: [http://nozdr.ru/data/media/biblio/kolxoz/E/EO/Razumovsky%20I.A.,%20Yakovlevich%20G.A.%20\(eds.\)%20Interference-optical%20Methods%20of%20Solid%20Mechanics%20\(Springer,%202010\)\(ISBN%203642112218\)\(O\)\(195s\)_EO_.pdf](http://nozdr.ru/data/media/biblio/kolxoz/E/EO/Razumovsky%20I.A.,%20Yakovlevich%20G.A.%20(eds.)%20Interference-optical%20Methods%20of%20Solid%20Mechanics%20(Springer,%202010)(ISBN%203642112218)(O)(195s)_EO_.pdf).
- [5] Sironi R.S. Optical methods of measurement. Wholefield Techniques. Boca Raton: CRC Press, 2009, 316 p. DOI: <http://doi.org/10.1201/9781315221359>.
- [6] Ramesh K. Developments in Photoelasticity: A renaissance. IOP Publishing, 2021, 225 p. URL: <https://iopscience.iop.org/book/mono/978-0-7503-2472-4>.
- [7] Patil P., Vyasarayani C.P., Ramji M. Linear least squares approach for evaluating crack tip fracture parameters using isochromatic and isoclinic data from digital photoelasticity. *Optics and Lasers in Engineering*, 2017, vol. 93, pp. 182–194. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2017.02.003>.
- [8] Vivekanandan A., Ramesh K. Study of interaction effects of asymmetric cracks under biaxial loading using digital photoelasticity. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2019, vol. 99, pp. 104–117. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.TAFMEC.2018.11.011>.
- [9] Dondeti S., Tippur H.V. A Comparative Study of Crack Branching in Glass Using Photoelasticity, Digital Image Correlation and Digital Gradient Sensing Techniques. *Silberstein M., Amirkhizi A., Shuman X., Beese A., Berke R., Pataky G. (Eds). Challenges in Mechanics of Time Dependent Materials, Fracture, Fatigue, Failure and Damage Evolution*, vol. 2. Part of the Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series. Springer International Publishing, 2020, pp. 9–15. DOI: http://doi.org/10.1007/978-3-030-29986-6_2.
- [10] Lee K.H., Kim B.S., Kim J.S. Fabrication of transparent homogeneous functionally graded materials and crack analysis by photoelasticity. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2021, vol. 35, pp. 3919–3929. DOI: <http://doi.org/10.1007/s12206-021-0805-8>.
- [11] Vivekanandan A., Ramesh K. Study of Crack Interaction Effects Under Thermal Loading by Digital Photoelasticity and Finite Elements. *Experimental Mechanics*, 2020, vol. 60, pp. 295–316. DOI: <http://doi.org/10.1007/s11340-019-00561-9>.
- [12] Thomre M., Ramesh K. Evaluation of Fracture Parameters of Cracks in Compressor Blade Root Using Digital Photoelasticity. *Lecture Notes in Mechanical Engineering*, 2020, pp. 557–566. DOI: https://doi.org/10.1007/978-981-13-9008-1_46.
- [13] Berrekheroukh N., Sereir Z., Vivet A., Adda Bedia E.A., Fekrar A. Experimental and numerical models to study the creep behavior of the unidirectional Alfa fiber composite strength by the photoelasticity method. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 2021, pp. 1573–2738. DOI: <http://doi.org/10.1007/S11043-021-09500-5>.
- [14] (Stevanovic) Hedrih K.R., Brcic S.V., Paunovic S. Application of Photoelasticity to Some Nonlinear Dynamic Problems and Stress State Analysis in Dams: A Brief Overview Inspired by the Results of Prof. Vlatko Brcic. *Lacarbonara W., Balachandran B., Ma J., Tenreiro Machado J., Stepan G. (Eds). Nonlinear Dynamics of Structures, Systems and Devices*. Springer, Cham, 2020, pp. 357–365. DOI: http://doi.org/10.1007/978-3-030-34713-0_36.
- [15] Juan C. Brinez-de L., Rico-Garcia M., Restrepo-Martinez A. PhotoelastNet: a deep convolutional neural network for evaluating the stress field by using a single color photoelasticity image. *Applied Optics*, 2022, vol. 61, issue 7, pp. D50–D62. DOI: <http://doi.org/10.1364/ao.444563>.
- [16] Mose B., Shin D., Nam J. Experimental Stress Analysis of Spherical Roller Bearing for High-Speed Trains Using Photoelasticity. *Experimental Techniques*, 2022. DOI: <http://doi.org/10.1007/s40799-022-00576-3>.
- [17] Matvienko Yu.G. Two-parameter damage mechanics. Moscow: Izdatel'skaya firma «Fiziko-matematicheskaya literatura», 2020, 210 p. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=44521290>. EDN: <https://elibrary.ru/ltcqcj>. (In Russ.)
- [18] Kosygina L.N. Asymptotic representation of the stress field near the crack tip of an infinite plate with two semi-infinite symmetrical edge notches: theoretical study and computational experiment. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2018, vol. 24, no. 2, pp. 55–66. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2018-24-2-55-66>. EDN: <https://elibrary.ru/ytbbbz>. (In Russ.)
- [19] Astafyev V.I., Radaev Yu.N., Stepanova L.V. Applied problems of fracture mechanics. Samara: Izdatel'stvo «Samarskii universitet», 1999, 195 p. (In Russ.)
- [20] Li D., Huang P., Chen Z., Yao G., Guo X., Zheng X., Yang Y. Experimental study on fracture and fatigue crack propagation processes in concrete based on DIC technology. *Engineering Fracture Mechanics*, 2020, vol. 235, p. 107166. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2020.107166>.

- [21] Stepanova L.V. Experimental determination and finite element analysis of coefficients of the multi-parameter Williams series expansion in the vicinity of the crack tip in linear elastic materials. Part I. *PNRPU MECHANICS BULLETIN*, 2020, №4, pp. 237–249. DOI: <http://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.4.20>. EDN: <https://elibrary.ru/edwnlr>. (In Russ.)
- [22] Stepanova L.V. Experimental determination and finite element analysis of coefficients of the multi-parameter Williams series expansion in the vicinity of the crack tip in linear elastic materials. Part II. *PNRPU MECHANICS BULLETIN*, 2021, №1. pp. 72–85. DOI: <http://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.1.08>. EDN: <https://elibrary.ru/lezhqh>. (In Russ.)
- [23] Stepanova L.V., Dolgikh V.S. Digital processing of the results of optoelectronic measurements. The photoelasticity method and its application for determination of coefficients of the multiparameter asymptotic Williams expansion of the stress field. *Journal of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2017, vol. 21, no. 4. pp. 717–735. DOI: <http://doi.org/10.14498/vsgtu1544>. EDN: <https://elibrary.ru/yugzxx>. (In Russ.)
- [24] Stepanova L.V., Dolgikh V.S. Experimental determination of coefficients of a multiparameter decomposition of field of crack tip stresses: photoelasticity method. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia serii = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2017, vol. 23, no. 1. pp. 59–68. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=29945522>. EDN: <https://elibrary.ru/zfhfcl>. (In Russ.)
- [25] Stepanova L.V. Photoelastic study of a double edge notched plate for determination of the Williams series expansion. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia serii = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2020, vol. 26, no. 4, pp. 56–67. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2020-26-4-56-67>. EDN: <https://elibrary.ru/sfgqgl>.
- [26] Li Y., Zheng K. Crack tip asymptotic field coefficients analyses based on extended finite element method using over-deterministic displacement field fitting method. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2021, vol. 113, p. 102971. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.TAFMEC.2021.102971>.
- [27] Li H., Zhong H. Weak form quadrature element analysis of crack-tip asymptotic field coefficients. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2022, vol. 119, p. 103320. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.tafmec.2022.103320>.
- [28] Williams M.L. On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack. *Journal of Applied Mechanics*, 1956, vol. 24, no. 1, pp. 109–114. Available at: <http://authors.library.caltech.edu/47558/1/382747.pdf>.
- [29] Williams M.L. Stress Singularities Resulting From Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension. *Journal of Applied Mechanics*, 1952, vol. 74, issue 4, pp. 526–528. Available at: <http://authors.library.caltech.edu/47672/1/382785.pdf>.
- [30] Karihaloo B.L., Abdalla H., Xiao Q.Z. Coefficients of the crack tip asymptotic field for wedge splitting specimens. *Engineering Fracture Mechanics*, 2003, vol. 70, issue 17, pp. 2407–2420. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0013-7944\(03\)00005-5](http://doi.org/10.1016/S0013-7944(03)00005-5).
- [31] Karihaloo B.L., Xiao Q.Z. Accurate determination of the coefficients of elastic crack tip asymptotic field by a hybrid crack element with p-adaptivity. *Engineering Fracture Mechanics*, 2001, vol. 68, issue 15, pp. 1609–1630. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0013-7944\(01\)00063-7](http://doi.org/10.1016/S0013-7944(01)00063-7).
- [32] Karihaloo B.L., Xiao Q.Z. Higher order terms of the crack tip asymptotic field for a wedge-splitting specimen. *International Journal of Fracture*, 2001, vol. 112, issue 2, pp. 129–137. DOI: <http://doi.org/10.1023/A%3A1013366025494>.
- [33] Hello G. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium. *International Journal of Solids and Structures*, 2012, vol. 49, issues 3–4, pp. 556–566. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.IJSOLSTR.2011.10.024>.
- [34] Hello G. Derivation of complete crack-tip stress expansions from Westergaard-Sanfors solutions. *International Journal of Solids and Structures*, 2019, vols. 144–145, pp. 265–275. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.05.012>.
- [35] Stepanova L., Roslyakov P., Gerasimova T. Complete Williams Asymptotic Expansion near the Crack Tips of Collinear Cracks of Equal Lengths in an Infinite Plane. *Solid State Phenomena*, 2017, vol. 258, pp. 209–212. DOI: <http://doi.org/10.4028/www.scientific.net/SSP.258.209>.
- [36] Stepanova L. Complete Williams Asymptotic Expansion Near The Crack Tips of Collinear Cracks of Equal Lengths in an Infinite Plane Medium. *Procedia Structural Integrity*, 2016, vol. 2, pp. 1789–1796. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.PROSTR.2016.06.225>.
- [37] Chona R., Irwin G.R., Shukla A. Two and three parameter representations of crack-tip stress fields. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Analysis*, 1982, Vol. 17, Issue 2, pp. 79–86. DOI: <http://doi.org/10.1243/03093247V172079>.
- [38] Nejati M., Ghouli S., Ayatollahi M.R. Crack tip asymptotic fields in anisotropic planes: Importance of higher order terms. *Applied Mathematical Modelling*, 2021, vol. 91, pp. 837–862. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.APM.2020.09.025>

- [39] Sanchez M., Mallor C., Canales M., Calvo S., Nunez J.L. Digital Image Correlation parameters optimized for the characterization of fatigue crack growth life. *Measurements*, 2021, vol. 174, p. 109082. DOI: <https://doi.org/10.1016/J.MEASUREMENT.2021.109082>.
- [40] Ayatollahi M.R., Nejati M., Ghouli S. Crack tip fields in anisotropic planes: a review. *International Journal of Fracture*, 2021, pp. 1573–2673. DOI: <http://doi.org/10.1007/s10704-021-00559-2>. EDN: <https://elibrary.ru/qgboj>.
- [41] Akbardoost Ja. Scaling effect on the mixed-mode fracture path of rock materials. *Physical Mesomechanics*, 2016, vol. 19, no. 4, pp. 441–451. DOI: <http://doi.org/10.1134/S102995991604010X>.
- [42] Matvienko Yu.G. Two-parameter fracture mechanics in contemporary strength problems. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2013, vol. 42, no. 5. pp. 374–381. DOI: <https://doi.org/10.3103/S1052618813050087>. EDN: <https://elibrary.ru/sofejt>. (In English; Russian original).
- [43] Bol'shakov A.M., Prokop'ev L.A. Prediction of a crackh growth trajectory with allowance for the angular distribution of the small components of the tangential stresses at a crack tip. *Russian Metallurgy (Metally)*, 2019, no. 10, pp. 964–966. DOI: <http://doi.org/10.1134/S0036029519100033>. EDN: <https://elibrary.ru/uvffjt>. (In English; Russian original)
- [44] Lutsenko A.N., Odintsev I.N., Grinevich A.V., Severov P.B., Plugatar' T.P. Investigation of the crack propagation process using local strain response measurement data I. Stress Field. *Uchenye Zapiski TsAGI [TsAGI Scientific Notes]*, 2015, vol. 46, no. 7, pp. 55–80. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=24344617>. EDN: <https://elibrary.ru/umtbfm>. (In Russ.)
- [45] Litvinov I.A., Matvienko Yu.G., Razumovsky I.A. On the accuracy of determination of nonsingular component in stress field at crack tip using extrapolation method. *Mashinostroenie i inzhenernoe obrazovanie*, 2014, no. 4 (41), pp. 43–51. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=22868188>. EDN: <https://elibrary.ru/tglaux>. (In Russ.)
- [46] Tyrymov A.A. Numerical evaluation of T-stress for centrally cracked specimen based on graph model of elastic solid. *Izvesia Volgograd State Technical University*, 2019, no. 6 (229), pp. 26–29. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=38223103>. EDN: <https://elibrary.ru/fxobyj>. (In Russ.)
- [47] Tyrymov A.A. Numerical evaluation of stress intensity factor and stress biaxiality for compact specimen based on graph model elastic solid. *Izvesia Volgograd State Technical University*, 2020, no. 2 (237), pp. 58–61. DOI: <https://doi.org/10.35211/1990-5297-2020-2-237-58-61>. EDN: <https://elibrary.ru/ouybnl>. (In Russ.)
- [48] Matvienko Yu.G. The non-singular T-stresses in fracture mechanics criteria of solids with notches. *Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*, 2011, no. 4–5, pp. 2651–2652. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=21121940>. EDN: <https://elibrary.ru/rufmtb>. (In Russ.)
- [49] Acanfora M., Gallo P., Razavi S.M.J., Ayatollahi M.R., Berto F. Numerical evaluation of T-stress under mixed mode loading through the use of coarse meshes. *Physical Mesomechanics*, 2018, vol. 21, issue 1, pp. 124–134. DOI: <http://doi.org/10.1134/S1029959918020054>.
- [50] Shlyannikov V.N., Zakharov A.P., Gerasimenko A.A. Characteristics of cyclic crack resistance of St-3 steel under biaxial loading. *Transactions of Academenergo*, 2013. no. 4, pp. 91–101. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=21056907>. EDN: <https://elibrary.ru/rsumsj>. (In Russ.)
- [51] Shlyannikov V.N., Zakharov A.P. Generalized fatigue fracture diagram under biaxial loading. *Transactions of Academenergo*, 2013, no. 4, pp. 72–89. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=25655495>. EDN: <https://elibrary.ru/vpkxeb>. (In Russ.)
- [52] Stepanova L.V., Belova O.N., Turkova V.A. Determination of the Williams series expansion's coefficients using digital photoelasticity method and finite element method. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 62–82. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-3-62-82>. EDN: <https://elibrary.ru/bogzpu>. (In Russ.)
- [53] Stepanova L.V., Roslyakov P.S. Complete asymptotic expansion M. Williams near the crack tips of collinear cracks of equal lengths in an infinite plane medium. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2015, no. 4, pp. 188–225. DOI: <http://doi.org/10.15593/perm.mech/2015.4.12>. EDN: <https://elibrary.ru/szclpz>.
- [54] Mehdi-Soozani A. Experimental fracture mechanics through digital image analysis. Retrospective Theses and Dissertations. Iowa: Iowa State University, 1986, 157 p. DOI: <http://doi.org/10.31274/RTD-180813-12927>.
- [55] Ramesh K., Gupta S., Kelkar A.A. Evaluation of stress field parameters in fracture mechanics by photoelasticity – revisited. *Engineering Fracture Mechanics*, 1997, vol. 56, issue 1, pp. 25–41, 43–45. DOI: [http://doi.org/10.1016/S0013-7944\(96\)00098-7](http://doi.org/10.1016/S0013-7944(96)00098-7).
- [56] Ramesh K. Digital Photoelasticity: Advanced Techniques and Applications. Berlin: Springer, 2000. 410 p. DOI: <http://doi.org/10.1115/1.1483353>.
- [57] Kosygin A.N., Kosygina L.N. Digital processing of interferograms obtained by the photoelasticity method. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 75–91. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-2-75-91>. EDN: <https://elibrary.ru/lqkuto>. (In Russ.)

- [58] Malikova L., Vesely V. Significance of Higher-order Terms of the Williams Expansion for Plastic Zone Extent Estimation Demonstrated on a Mixed-mode Geometry. *Procedia Materials Science*, 2014, vol. 3, pp. 1383–1388. DOI: <http://doi.org/10.1016/J.MSPRO.2014.06.223>.
- [59] Aytollahi M.R., Moazzami M. Digital image correlation method for calculating coefficients of Williams expansion in compact specimen. *Optics and Lasers in Engineering*, 2017, vol. 90, pp. 26–33. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2016.09.011>.
- [60] Moazzami M., Aytollahi M.R., Chamani H.R., Guagliano M., Vergani L. Determination of higher order stress terms in cracked Brazilian disc specimen under mode I loading using digital image correlation technique. *Optics and Laser Technology*, 2018, vol. 107, pp. 344–352. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.optlastec.2018.06.010>.
- [61] Su R.K.L., Feng W.J. Accurate determination of mode I and II leading coefficients of the Williams expansion by finite element analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2005, vol. 41, issues 11–12, pp. 1175–1186. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.finel.2004.11.006>.
- [62] Roux-Langlois C., Gravouil A., Baietto M. S.-C., Rethore J., Mathieu F., Hild F., Roux S. DIC identification and X-FEM simulation of fatigue crack growth based on the Williams series. *International Journal of Solids and Structures*, 2015, vol. 53, pp. 38–47. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2014.10.026>.
- [63] Stepanova L.V. Influence of the higher order terms in Williams' series expansion of the stress field on the stress-strain state in the vicinity of the crack tip. Part I. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2019, vol. 25, no. 1, pp. 63–79. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-1-63-79>. (In Russ.)
- [64] Stepanova L.V. Influence of the higher order terms in Williams' series expansion of the stress field on the stress-strain state in the vicinity of the crack tip. Part II]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaia seriia = Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, vol. 25, no. 1, pp. 80–96. DOI: <http://doi.org/10.18287/2541-7525-2019-25-1-80-96> (In Russ.)
- [65] Malikova L. Multi-parameter fracture criteria for the estimation of crack propagation direction applied to a mixed-mode geometry. *Engineering Fracture Mechanics*, 2015, vol. 143, pp. 32–46. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.06.029>.
- [66] Camacho-Reyes A., Vasco-Olmo J.M., James M.N., Diaz F.A. Towards a new methodology for the characterization of crack tip fields based on a hybrid computational approach. *International Journal of Fatigue*, 2022, vol. 162, p. 106942. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2022.106942>.
- [67] Mirzaei A.M., Bahrami B., Aytollahi M.R. Asymptotic stress field around the blunt and sharp notches in bimaterial media under mixed mode I/II loading. *Applied Mathematical Modelling*, 2022, vol. 109, pp. 848–863. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.apm.2022.04.017>.
- [68] Liu Z.-E., Wei Y. An analytical solution to the stress fields of kinked cracks. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2021, vol. 156, p. 104619. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.jmps.2021.104619>.
- [69] Stepanova L.V. Asymptotic analysis of the crack tip stress field (consideration of higher order terms). *Numerical Analysis and Applications*, 2019, vol. 12, no. 3, pp. 284–296. DOI: <http://doi.org/10.1134/S1995423919030078>. EDN: <https://elibrary.ru/bxdesn>. (In English; Russian original).
- [70] Sanford R.J. A critical re-examination of the Westergaard method for solving opening-mode crack problems. *Mechanics Research Communications*, 1979, vol. 6, issue 5, pp. 289–294. DOI: [http://doi.org/10.1016/0093-6413\(79\)90033-8](http://doi.org/10.1016/0093-6413(79)90033-8).